

一类非自治时滞反馈系统的分岔控制^{*}

钱长照^{1)†} 唐驾时¹⁾

1) 湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

2) 长沙理工大学桥梁与结构工程学院, 长沙 410076)

(2005 年 3 月 31 日收到, 2005 年 6 月 1 日收到修改稿)

对含有两个时滞参数、受简谐激励作用下的 van der Pol-Duffing 方程进行了研究, 着重研究了时滞参数对该类参数激励系统的主共振的分岔响应控制. 首先采用摄动法从理论上推导出时滞动力系统的分岔响应方程, 用奇异性理论得到了退化余维一分岔和余维二分岔的条件, 以及 Hopf 分岔的存在性及发生该分岔的条件, 最后用数值模拟的方法研究了时滞参数对系统分岔响应的影响. 研究表明, 适当选取时滞参数, 不仅可以改变分岔响应曲线的拓扑形态, 还可以改变分岔点的位置.

关键词: 摄动法, 分岔控制, 时滞动力系统

PACC: 0547, 0520D, 1120D

1. 引言

在工程中, 许多动力系统可用状态变量随时间演化的微分方程来描述, 其中, 有相当一部分动力系统的状态变量存在时间滞后现象, 即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态, 也依赖于系统过去某一时刻或若干时刻的状态. 这类动力系统称作时滞动力系统. 近年来, 时滞动力系统已成为许多研究领域的重要研究对象. 在电路、光学、神经网络、生物环境与医学、建筑结构、机械等领域, 人们对时滞系统作了大量的研究, 取得了许多重要的成果, 并巧妙的利用时滞来控制动力系统的行为, 如时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法^[1]. 文献 [2] 从时滞动力系统的特点、研究方法、动力学热点问题出发, 对非线性时滞动力系统的研究进展作了综述.

分岔与混沌一直都是非线性动力学研究的重要课题, 许多科学工作者在这些方面做了大量的研究^[3-5], 对于混沌的控制研究也取得比较成熟的成果, 当前, 非线性系统的分岔控制在国际上也正在形成一个专门的、全新的研究方向. 分岔控制的主要任务是研究分岔控制理论, 提出分岔控制的方法, 对具体的工程系统设计一个控制器来改变其非线性特性, 从而获得需要的动力学行为, Chen 等^[6]对分岔

控制的理论、方法和应用前景已经作了详尽的叙述. 文献 [7, 8] 对几种典型的分岔控制进行了研究. Hu 等^[9]通过对含有时滞状态反馈的线性阻尼系统的研究, 得到了系统稳定性与时滞无关的准则, 利用摄动方法, Attilio^[10]研究了受外激励 van der Pol 系统主共振的时滞反馈控制, 得到时滞项对响应幅值的影响关系^[10]; Ji 等^[11]对含有两个时滞参数的 Duffing 系统的主共振、亚谐共振及超谐共振进行了研究, 结果表明时滞参数对该系统有着良好的控制作用; Xu 等^[12-14]研究 van der Pol-Duffing 系统的时滞反馈控制, 证明了 Hopf 分岔的存在性及其稳定性, 并得出了时滞参数的影响作用.

本文研究非线性动力系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \alpha x^3 = \epsilon f \cos \Omega t \quad (1)$$

的时滞反馈控制. 式中 ω_0 表示固有角频率, f 表示激励幅值, Ω 表示外激励角频率, ϵ 为小参数, μ 为阻尼系数, α, β 为非线性系数, 因为方程 (1) 为工程中无量纲化后抽象出来的方程, 本文主要对该方程的分岔控制进行研究, 因此以上参数以及本文后面涉及到的各变换参数均为无量纲量. 事实上, 动力系统 (1) 含有丰富的非线性动力行为, 许多科学工作者对此做了研究^[15-17]. 本文研究的目的是设计线性时滞参数, 对系统的主共振分岔响应进行控制, 受控动

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472029)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: qiancz@163.com

力系统可以描述为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \alpha x^3 = \epsilon f \cos \Omega t + \epsilon [g_p x(t - \tau_1) + g_d \dot{x}(t - \tau_2)] \quad (2)$$

式中 τ_1 和 τ_2 为时滞量, g_p 和 g_d 为增益系数, 其中 g_p 和 g_d 大于零为正反馈, g_p 和 g_d 小于零为负反馈.

2. 主共振情况下的分岔响应方程

采用多尺度方法^[18], 设方程(2)的摄动解形式为

$$x = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (3)$$

其中 $T_0 = t$ 为时间的慢变尺度, $T_1 = \epsilon t$ 为时间的快变尺度, 在主共振情况下, 设

$$\omega_0 = \Omega + \epsilon \sigma, \quad (4)$$

则 $\omega_0^2 = \Omega^2 + 2\epsilon\Omega\sigma + \epsilon^2\sigma^2$, 其中 σ 为调谐参数. 将(3)(4)式代入(2)式, 比较方程两边的系数, 得下列摄动微分方程组

$$D_0^2 x_0 + \Omega^2 x_0 = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \Omega^2 x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - 2\Omega\sigma x_0 - (\mu - \beta x_0^2)D_0 x_0 \\ &\quad - \alpha x_0^3 + f \cos \Omega T_0 + g_p x_0(t - \tau_1) \\ &\quad + g_d D_0 x_0(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (6)$$

其中微分算子 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, $n = 0, 1, \dots$, 方程(5)的解可以写为

$$x_0 = A(T_1)e^{i\Omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\Omega T_0}, \quad (7)$$

其中 $A(T_1)$ 和 $\bar{A}(T_1)$ 为共轭函数, 且均为关于 T_1 的函数, 将(7)式代入到(6)式可得

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \Omega^2 x_1 &= [-2i\Omega D_1 A - 2\Omega\sigma A \\ &\quad - i\mu\Omega A + i\beta\Omega A^2 \bar{A} - 3\alpha A^2 \bar{A} + \frac{f}{2} \\ &\quad + g_p(\cos\Omega\tau_1 - i\sin\Omega\tau_1)A \\ &\quad + g_d\Omega(\sin\Omega\tau_2 + i\cos\Omega\tau_2)A]e^{i\Omega T_0} \\ &\quad + (i\Omega\beta A^3 - \alpha A^3)e^{3i\Omega T_0} + cc, \end{aligned} \quad (8)$$

消除 x_1 中的永年项, 须令

$$\begin{aligned} -2i\Omega D_1 A - 2\Omega\sigma A - i\mu\Omega A + i\beta\Omega A^2 \bar{A} - 3\alpha A^2 \bar{A} \\ + \frac{f}{2} + g_p(\cos\Omega\tau_1 - i\sin\Omega\tau_1)A \\ + g_d\Omega(\sin\Omega\tau_2 + i\cos\Omega\tau_2)A = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

令 $A = ae^{i\phi}$, 其中 a 和 ϕ 为关于 T_1 的实函数, 将其代入(9)式, 分离实部和虚部得极坐标下的平均方程

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} &= -\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{g_p}{\Omega}\sin\Omega\tau_1 - g_d\cos\Omega\tau_2\right)a \\ &\quad + \frac{1}{2}\beta a^3 - \frac{1}{4\Omega}f\sin\phi, \\ a\frac{d\phi}{dT_1} &= \left[\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{g_p}{\Omega}\cos\Omega\tau_1 + g_d\sin\Omega\tau_2\right)\right]a \\ &\quad + \frac{3}{2\Omega}\alpha a^3 - \frac{1}{4\Omega}f\cos\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

在稳态情况下, $\frac{da}{dT_1} = \frac{d\phi}{dT_1} = 0$, 即

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{g_p}{\Omega}\sin\Omega\tau_1 - g_d\cos\Omega\tau_2\right)a \\ &+ \frac{1}{2}\beta a^3 - \frac{1}{4\Omega}f\sin\phi = 0, \\ &\left[\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{g_p}{\Omega}\cos\Omega\tau_1 + g_d\sin\Omega\tau_2\right)\right]a \\ &+ \frac{3}{2\Omega}\alpha a^3 - \frac{1}{4\Omega}f\cos\phi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

从(11)式中消去 ϕ , 得分岔响应方程

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\mu_e - \beta a^2)a^2 + \left(\sigma_e + \frac{3}{2\Omega}\alpha a^2\right)a^2 \\ &= \frac{1}{16\Omega^2}f^2, \end{aligned} \quad (12)$$

这里

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu + \frac{g_p}{\Omega}\sin\Omega\tau_1 - g_d\cos\Omega\tau_2, \\ \sigma_e &= \sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{g_p}{\Omega}\cos\Omega\tau_1 + g_d\sin\Omega\tau_2\right). \end{aligned} \quad (13)$$

3. Hopf 分岔

在方程(9)中令 $A = u + iv$, A 为关于 T_1 的复函数, u, v 为关于 T_1 的实函数, 则可得平均方程的直角坐标形式

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT_1} &= -\frac{1}{2}\mu_e u - \sigma_e v + \frac{1}{2}(\beta(u^2 + v^2)u \\ &\quad - \frac{3}{2\Omega}\alpha(u^2 + v^2)v), \\ \frac{dv}{dT_1} &= \sigma_e u - \frac{1}{2}\mu_e v + \frac{1}{2}(\beta(u^2 + v^2)v \\ &\quad + \frac{3}{2\Omega}\alpha(u^2 + v^2)u - \frac{f}{4\Omega}). \end{aligned} \quad (14)$$

显然(14)式中常数项 $\frac{f}{4\Omega}$ 只影响平衡点的位置, 而不改变平衡点的分岔性质, 为此我们可以取 $f = 0$ 时对其分岔性质进行分析.

当 $f = 0$ 时, 平衡点在原点 $(u, v) = (0, 0)$, 平均

方程 (14) 的 Jacobi 矩阵为

$$D_w F|_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu_e & -\sigma_e \\ \sigma_e & -\frac{1}{2}\mu_e \end{bmatrix}, \quad (15)$$

这里 $D_w = (u, v)^T$ 对应于零解的特征方程

$$\lambda^2 + \mu_e \lambda + \sigma_e^2 + \frac{1}{4}\mu_e^2 = 0, \quad (16)$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\mu_e \pm i\sigma_e$, 当 $\mu_e = 0, \sigma_e \neq 0$ 时, 方程 (16) 存在一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma_e$, 根据 Hopf 分岔定理, 该情况系统发生 Hopf 分岔. 由于 μ_e 是时滞参数 τ_1, τ_2 的函数, 因此, 调节时滞参数可以控制 Hopf 分岔的发生, 即可以消除或改变其发生条件.

4. 分岔及控制的数值模拟

引入参数时滞量 τ 和时滞差 ϕ , 令 (13) 式中时滞参数 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = \tau + \phi$, 则 (13) 式可写为

$$\mu_e = \mu + \frac{g_p}{\Omega} \sin \Omega \tau - g_d \cos \Omega(\tau + \phi), \quad (17)$$

$$\sigma_e = \sigma - \frac{1}{2} \left[\frac{g_p}{\Omega} \cos \Omega \tau + g_d \sin \Omega(\tau + \phi) \right] \quad (18)$$

消去方程 (17) (18) 中的 τ , 则 μ_e, σ_e 的变化满足

$$\begin{aligned} & (\mu_e - \mu)^2 + 4(\sigma_e - \sigma)^2 \\ &= \left(\frac{g_p}{\Omega} \right)^2 + g_d^2 + 2 \frac{g_p}{\Omega} g_d \sin \Omega \phi. \end{aligned} \quad (19)$$

在方程 (19) 中引入参数代换 $2\sigma_e = \bar{\sigma}_e$, 则显然方程 (19) 表示在平面 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 上的圆, 圆的圆心在 (μ, σ) , 圆半径是 ϕ 的函数, 且最大半径为 $\frac{g_p}{\Omega} + g_d$, 最小

半径为 $\min \left(0, \left| \frac{g_p}{\Omega} - g_d \right| \right)$. 将方程 (13) 展开可写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4\Omega^2} \alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2 \right) a^6 + \left(\frac{3}{\Omega} \alpha \sigma_e - \frac{1}{2} \beta \mu_e \right) a^4 \\ &+ \left(\sigma_e^2 + \frac{1}{4} \mu_e^2 \right) a_2 - \frac{1}{16\Omega^2} f^2 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

引入参数代换

$$\begin{aligned} r &= a^2, \\ h_2 &= \frac{\frac{3}{\Omega} \alpha \sigma_e - \frac{1}{2} \beta \mu_e}{\frac{3}{4\Omega^2} \alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2}, \\ h_3 &= \frac{\sigma_e^2 + \frac{1}{4} \mu_e^2}{\frac{3}{4\Omega^2} \alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2}, \end{aligned}$$

$$h_4 = \frac{-\frac{1}{16\Omega^2} f^2}{\frac{3}{4\Omega^2} \alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2},$$

则 (20) 式可以写为

$$r^3 + h_2 r^2 + h_3 r + h_4 = 0, \quad (21)$$

由奇异性理论可知, 当 $h_2 = 0$, 即 $\frac{3}{\Omega} \alpha \sigma_e - \frac{1}{2} \beta \mu_e = 0$ 时, 系统退化为余维一分岔 (21) 式可以看作是范式 $h(r, h_4) = r^3 + h_4$ 普适开折, h_3 为开折参数, 奇点类型为滞后点. 而 $\frac{3}{\Omega} \alpha \sigma_e - \frac{1}{2} \beta \mu_e = 0$ 在 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 平面表示一条直线, 因此可以用几何方法在 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 平面判断余维一分岔的存在性, 如果存在, 则可求出系统退化余维一分岔点. 当 h_3 保持不变, 将 h_2, h_4 看作是开折参数, 则 (21) 式可以看作是范式 $h(r, h_3) = r^3 + h_3 r$ 的普适开折, 系统发生退化余维二分岔, 且由奇异性理论可得非持久集 $B = \{h_4 = 0\}, H = \{h_4 = \frac{h_2^3}{27}, h_4 < 0\}$, $D = \emptyset$, 当 $\frac{3}{\Omega} \alpha \sigma_e - \frac{1}{2} \beta \mu_e = 0$ 时, 系统退化为余维一分岔, 余维二分岔条件为 h_3 不变, 即 $\sigma_e^2 + \frac{1}{4} \mu_e^2 = \text{const}$, 显然在平面 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 表示圆心在原点的圆. 通过在平面 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 上观察两个圆是否相交即可知系统是否满足余维二分岔条件. 为此可得 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 平面上的局部分岔集如图 1 所示, 其中在 A, B, C 点发生余维一分岔, 在 D, E, F 点发生余维二分岔.

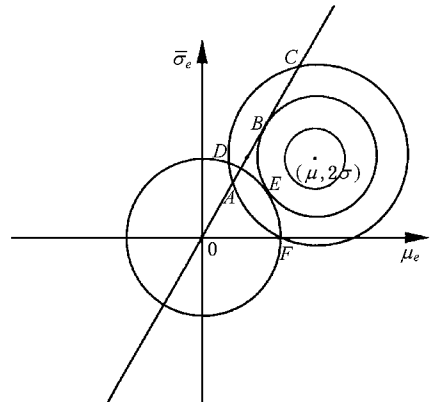


图 1 参数平面 $(\mu_e, \bar{\sigma}_e)$ 上的局部分岔集

为了便于分析, 而又不脱离一般性, 对两种极限状态进行分析, 即取 $\phi = \frac{\pi}{2\Omega}$ 和 $\phi = \frac{3\pi}{2\Omega}$, 则当 $\phi = \frac{\pi}{2\Omega}$ 时, 方程 (17) (18) 可以写为

$$\mu_e = \mu + \left(\frac{g_p}{\Omega} + g_d \right) \sin \Omega \tau, \quad (22)$$

$$\sigma_e = \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{g_p}{\Omega} + g_d \right) \cos \Omega \tau, \quad (23)$$

当 $\phi = \frac{3\pi}{2\Omega}$ 时, 方程 (17) (18) 可以写为

$$\mu_e = \mu + \left(\frac{g_p}{\Omega} - g_d \right) \sin \Omega \tau, \quad (24)$$

$$\sigma_e = \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{g_p}{\Omega} - g_d \right) \cos \Omega \tau, \quad (25)$$

作为算例, 取系统参数 $\alpha = \beta = 1$, $\mu = -0.2$, $g_p = 0.9$, $g_d = 0.1$, $\Omega = 1$, $f = 1$ 画出原系统和受控系统的频响曲线如图 2 所示.

由图 2 可以看出, 时滞参数影响着分岔响应曲线中幅值的大小及分岔点的位置, 甚至影响着分岔

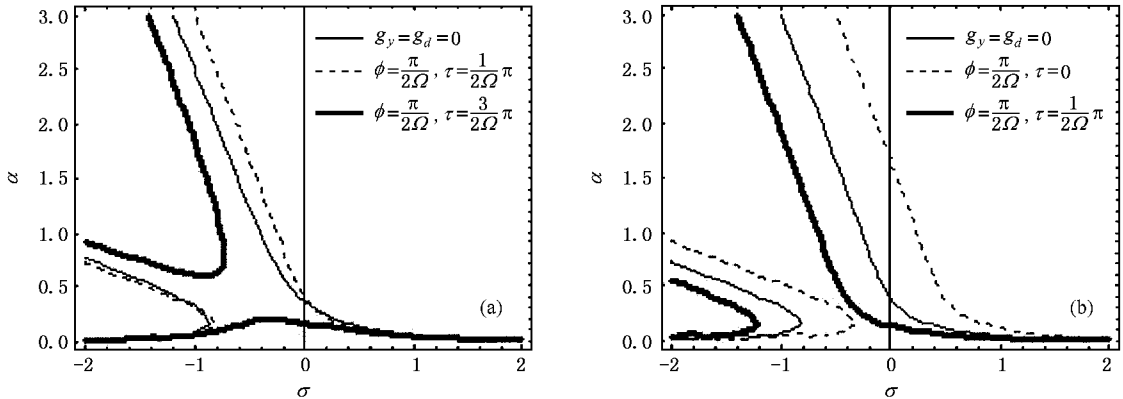


图 2 原系统及受控系统的分岔响应曲线

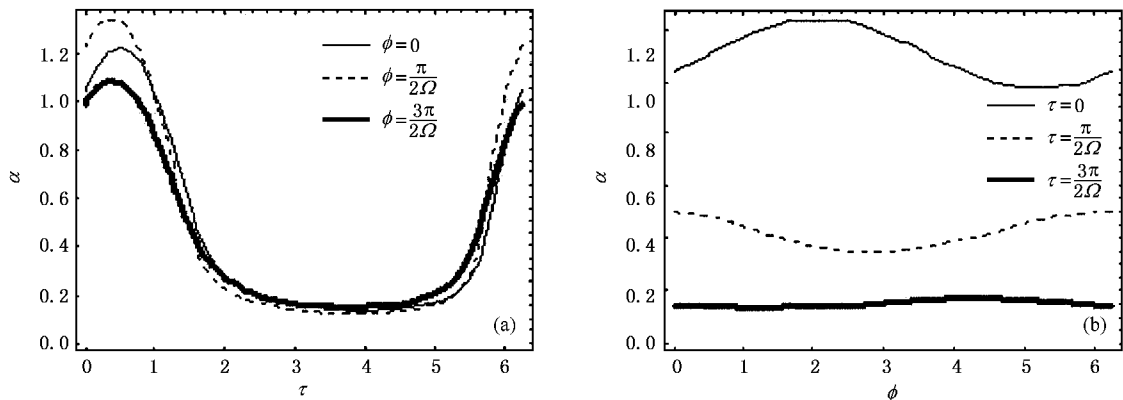


图 3 响应幅值与时滞参数 τ, ϕ 的关系曲线

曲线的拓扑结构. 而图 3 表明, 时滞参数 τ 在一段范围内对响应幅值的影响, 比较明显, 而在另一段范围内可控制使得响应幅值的大小比较稳定. 在 τ 值一定时, ϕ 对响应幅值起到微调控制的作用. 显然, 时滞对系统的影响可以归结为方程 (17) (18) 中时滞对 μ_e, σ_e 的影响, 因此对系统的影响参数不仅仅是 τ 和 ϕ , 时滞项系数 g_p 和 g_d 对系统也有着影响, 所以本文只做了固定时滞项系数 g_p 和 g_d 变化 τ, ϕ 的数值模拟, 得到参数 τ 和 ϕ 对系统的控制作用, 其他情况有待于进一步讨论.

5. 结 论

用摄动法可以从理论上推导出受简谐激励作用下的 van der Pol-Duffing 时滞动力系统的分岔响应方程, 得到退化余维一分岔和余维二分岔的条件, Hopf 分岔的存在性及发生该分岔的条件. 本文用数值模拟的方法研究了两个时滞参数对系统分岔响应的影响. 研究表明, 适当选取时滞参数, 不仅可以改变分岔响应曲线的拓扑形态, 还可以改变分岔点的位置. 本文首次采用含有两个时滞参数的线性控制器研究时滞系统的主共振分岔响应控制, 得到

了满意的结果,说明时滞系统在分岔控制领域有广泛的应用前景.

-
- [1] Just W , Bernard T , Ostheimer M , Reibold E , Benner H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 203
- [2] Hu H Y , Wang Z H 1999 *Adv. Mech.* **29** 501 (in Chinese) [胡海岩、王在华 1999 力学进展 **29** 501]
- [3] Xu W , He Q , Rong H W , Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [4] Zhang G J , Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese) [张广军、徐健学 2005 物理学报 **54** 557]
- [5] Fu W B , Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2899 (in Chinese) [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2899]
- [6] Chen G , Moiola J L , Wang H O 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 511
- [7] Moiola J L , Colantonio M C , Donate P D 1997 *Dyn. Stab. Syst* **12** 293
- [8] Alvarez J , Curiel L E 1997 *Int. J. Bifur. Chaos* **7** 1811
- [9] Hu H Y , Wang Z H 1998 *Int. J. Sound Vib.* **214** 213
- [10] Attilio M 2003 *Int. J. Non-linear Mech.* **38** 123
- [11] Ji C J , Leung A Y T 2002 *Int. J. Sound Vib.* **253** 985
- [12] Xu J , Lu Q S 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 443 (in Chinese) [徐鉴、陆启韶 2003 力学学报 **35** 443]
- [13] Xu J , Chung K W 2003 *Physica D* **180** 17
- [14] Xu J , Lu Q S 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 939
- [15] Tang J S , Qian C Z 2003 *Int. J. Sound Vib.* **268** 1036
- [16] Tang J S , Fu W B , Li K A 2002 *Chin. Phy.* **11** 1004
- [17] Tang J S 2000 *Int. J. Sound Vib.* **232** 993
- [18] Nayfeh A H , Mook D T 1978 *Nonlinear Oscillations* (New York : Wiley) p61

Bifurcation control for a non-autonomous system with two time delays^{*}

Qian Chang-Zhao^{1,2†} Tang Jia-Shi¹

¹ *Department of Mechanics , Hunan University , Changsha 410082 , China*)

² *College of Bridge and Structure EGINEERING , Chongsha University of Science and Technology , Changsha 410076 , China*)

(Received 31 March 2005 ; revised manuscript received 1 June 2005)

Abstract

A forced system with two time-delays , including van der Pol-Duffing types , is studied. The aim is to study the primary parametrical resonance bifurcation of this system. Perturbation method is used to obtain the bifurcation equation with time-delays. Based on the bifurcation equation , co-dimension one , co-dimension two and Hopf bifurcation are discussed , and the effect of time-delays on the steady state response is analyzed by numerical methods. It is indicated that the primary resonance bifurcation can be well controlled by time-delays feedback.

Keywords : perturbation method , bifurcation control , dynamics of nonlinear systems involving time delays

PACC : 0547 , 0520D , 1120D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472029)

[†] Corresponding author. E-mail : qiancz@163.com