

一维准周期结构声子晶体透射性质的研究^{*}

曹永军 董纯红 周培勤

(内蒙古师范大学物理与电子信息学院, 呼和浩特 010022)

(2006 年 4 月 6 日收到, 2006 年 6 月 20 日收到修改稿)

提出了一维准周期结构的声子晶体模型, 对弹性波通过该一维准周期结构声子晶体的透射系数进行了数值计算, 并与周期结构的透射系数进行了比较. 计算结果表明, 弹性波通过一维准周期结构声子晶体时, 同样会有带隙的出现, 且带隙所在频率范围与周期结构的情形完全一样, 不同的是在准周期结构声子晶体中, 带隙内有很强的局域共振模. 对此局域模性质的研究有助于声波或弹性波滤波器的制作.

关键词: 准周期结构, 声子晶体, 局域化

PACC: 4320, 8160H, 4335, 0260

1. 引言

经典波在复合结构材料中传播特性的研究越来越引起人们的兴趣, 光子晶体的研究就是其中的一例^[1,2]. 弹性材料平行而周期地排列形成所谓的声子晶体, 当弹性波在这种人工复合材料中传播时, 某些频率范围内的弹性波会被抑制, 形成声子带隙^[3-12]. 类似于晶体材料中引入杂质时会有杂质能级的形成一样, 在声子晶体中引入缺陷体后禁带中也会形成缺陷模^[13-18], 与缺陷模频率共振的弹性波可以通过整个声子晶体, 并且具有很高的品质因子. 由于声子晶体有望被用于声滤波器以及声波导的制作和应用, 因而这些性质的研究具有重要的意义. 考虑到无序可引入局域化的现象^[19], 准周期系统又是介于周期与完全无序系统之间的一种典型结构^[20], 它的电子性质以及光学性质已被广泛研究^[21-24]. 本文首先构造了一维准周期结构的声子晶体模型, 接着研究了弹性波在其中的传播与局域化等性质, 以期拓展声子晶体的应用价值, 取得新的进展.

2. 模型与计算方法

Fibonacci 序列是典型的一维准周期系统^[25], 通过替代规则 $A \rightarrow AB, B \rightarrow A$ 生成一个 Fibonacci 序列 $ABAABABA \dots$. 现有两种各向同性的弹性材料薄层 A 和薄层 B , 弹性波在其中传播的横波和纵波速度分

别为 c_{At}, c_{Al} 和 c_{Bt}, c_{Bl} , 密度分别为 ρ_A, ρ_B , 厚度为 d_A, d_B . 当它们按 Fibonacci 序列交替排列时, 就形成了所谓的一维准周期结构的声子晶体, 如图 1 所示. 为使计算结果更具有普遍性, 我们考虑固体/固体系统的情形, 并且沿系统有限厚度的方向把其划分为多层薄片, 系统沿 y 方向是有限厚度, 沿 x 和 z 方向为无限大, 其界面如图 1 中的虚线所示.

弹性波在各介质层中的传播行为可表示为

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = T_{ij,j}, \quad (1)$$
$$T_{ij} = c_{ijkl} U_{k,l}.$$

这里采用了爱因斯坦规则(重复下标表示求和, 逗号后的下标表示对该下标变量求导), $i, j, k, l = 1, 2, 3$, ρ 和 c_{ijkl} 分别为材料的密度和弹性系数, U_i 和 T_{ij} 表示位移分量和应力张量分量. 若弹性波只在 xy 平面内入射, 可只考虑平面内的 xy 模, 此时(1)式写为如下形式:

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 U_1 &= (c_{11} U_{1,1} + c_{12} U_{2,2})_{,1} + T_{21,2}, \\ -\rho\omega^2 U_2 &= (c_{44} U_{1,2} + c_{44} U_{2,1})_{,1} + T_{21,2}, \\ T_{21} &= c_{44} U_{1,2} + c_{44} U_{2,1}, \\ T_{22} &= c_{12} U_{1,1} + c_{11} U_{2,2}. \end{aligned} \quad (2)$$

对各向同性材料有

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{12} + 2c_{14}, \\ c_{12} &= \lambda, \\ c_{44} &= \mu. \end{aligned}$$

^{*} 内蒙古自治区自然科学基金(批准号: 200607010107)资助的课题.

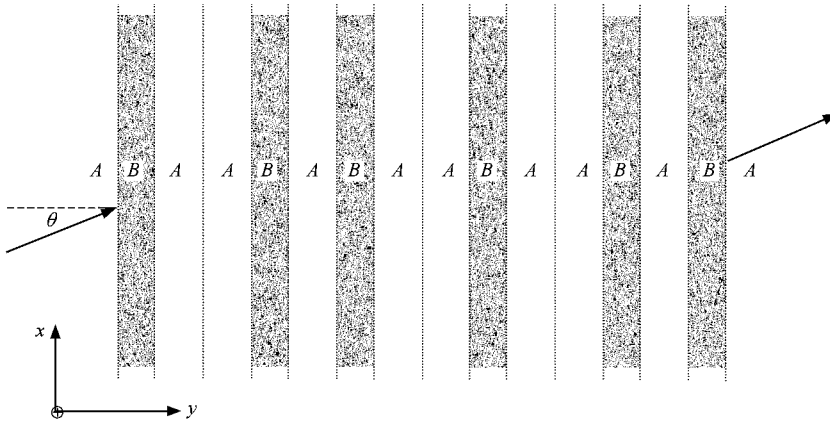


图1 一维准周期结构声子晶体示意图 白色和灰色分别代表材料 A 和材料 B

对于系统中的任意一层介质,在 x 方向可视为具有任意晶格常数 a 的周期结构,在 y 方向则具有均匀性,所以可将其中的波解作傅里叶展开后得

$$\begin{pmatrix} U_i \\ T_i \end{pmatrix} = \exp(i k_y y) \sum_n \exp[i(k_x + G_n)x] \begin{pmatrix} u_{iG} \\ t_{iG} \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中

$$G_n = \frac{2\pi}{a}n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

为沿 x 方向的倒格矢, k_x 为布洛赫波矢, u_{iG}, t_{iG} 为对应项的傅里叶展开系数.将(3)式代入(2)式,整理后可得如下方程:

$$\begin{aligned} & [c_{11}(k_x + G)^2 - \rho\omega^2]u_{1G} \\ & + c_{12}k_x k_y u_{2G} - i k_y t_{21G} = 0, \\ & c_{44}(k_x + G)k_y u_{1G} \\ & + [c_{44}(k_x + G)^2 - \rho\omega^2]u_{2G} - i k_y t_{22G} = 0, \\ & c_{44}k_y u_{1G} + c_{44}(k_x + G)k_y u_{2G} + i t_{21G} = 0, \\ & c_{12}(k_x + G)u_{1G} + c_{11}k_y u_{2G} + i t_{22G} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

对于任意给定的倒格矢 G 和布洛赫波矢 k_x ,解方程(4)可得

$$k_{y12} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - (k_x + G)^2}, \quad (5)$$

$$k_{y3A} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - (k_x + G)^2}. \quad (6)$$

对应的傅里叶展开分量为

$$\begin{aligned} u_{2G} &= 1, \\ u_{1G} &= \frac{k_x + G}{k_{y12}}, \\ -i t_{22G} &= c_{12} \frac{(k_x + G)}{k_{y12}}, \\ -i t_{21G} &= 2c_{44}(k_x + G); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_{2G} &= -\frac{k_x + G}{k_{y3A}}, \\ u_{1G} &= 1, \\ -i t_{22G} &= -2c_{44}(k_x + G), \\ -i t_{21G} &= c_{44} \frac{k_{y3A}^2 - (k_x + G)^2}{k_{y3A}}. \end{aligned} \quad (8)$$

在(5)(6)式中,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

为纵弹性波速度,

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

为横弹性波速度.

将(5)–(8)式代入方程(3),可得弹性波在各层中的波解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ -iT \end{bmatrix} &= \sum_{n=-M}^M \exp[i(k_x + G_n)x] \\ &\times \left[\sum_{m=1}^{2N} A_{mR} \exp[i\beta_{mR}y] \begin{pmatrix} u_{nR}^m \\ -i t_{nR}^m \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{2N} A_{mL} \exp[i\beta_{mL}y] \begin{pmatrix} u_{nL}^m \\ -i t_{nL}^m \end{pmatrix} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

式中

$$N = 2M + 1,$$

下标 R, L 分别表示右行波和左行波.根据波在界面处的连续性边界条件可得

$$\begin{pmatrix} u_R^s \\ t_R^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R^{s+1} + u_L^{s+1} + R_-^{s+1} & -u_L^s \\ t_R^{s+1} + t_L^{s+1} + R_-^{s+1} & -t_L^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_+^s \\ R_+^s \end{pmatrix}. \quad (10)$$

这里的上标 s 意为第 s 层.第 s 层的反射矩阵 R_+^s 、透射矩阵 T^s 和广义反射矩阵 R_-^s 分别定义如下:

$$\begin{aligned} A_{L+}^{s+} &= R_+^s A_{R+}^{s+}, \\ A_{R-}^{s+1-} &= T^s A_{R+}^{s+}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$R_-^s = \exp[-ik_{yL}d_s]R_+^s \exp[ik_{yR}d_s],$$

式中 d_s 为第 s 层的厚度,上标的 $s_{-(+)}$ 表示第 s 层的左右边界.值得注意的是,出射层的广义反射矩阵为零,因此根据(10)式可由出射层开始算起,进而求出每一层中的反射矩阵和透射矩阵.入射波、透射波可分别表示为

$$\begin{pmatrix} U^{\text{in}} \\ T^{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R^1 \\ t_R^1 \end{pmatrix} A_R^1, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} U^{\text{tr}} \\ T^{\text{tr}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R^s \\ t_R^s \end{pmatrix} T^{\text{total}} A_R^1. \quad (13)$$

这里,

$$T^{\text{total}} = T^N \exp(ik_{yR}^N d_N) T^{N-1} \dots T^1$$

为总的透射矩阵, N 为系统的总层数.这样,入射弹性波在出射层的透射系数为

$$T = \sum_{i=-M}^M \left[\frac{\text{Re}\{(U_{1i}^{\text{tr}})^* T_{21i}^{\text{tr}} + (U_{2i}^{\text{tr}})^* T_{22i}^{\text{tr}}\}}{\text{Re}\{(U_{1i}^{\text{in}})^* T_{21i}^{\text{in}} + (U_{2i}^{\text{in}})^* T_{22i}^{\text{in}}\}} \right], \quad (14)$$

式中 $(U_i)^*$ 为位移分量第 i 阶变量的共轭, $\text{Re}[\cdot]$ 为取出一个复变量的实部.

以上计算方法的核心思想为模式匹配法^[26-27],可计算弹性波通过一维有限厚的周期结构、准周期结构以及完全无序结构的透射系数.

3. 计算结果及讨论

在计算中,材料 A 和材料 B 分别选取为环氧树脂(epoxy)和铅(Pb),波在 A 介质中的横波和纵波速度分别为 1157、2535 m/s,密度为 1180 kg/m³;波在 B 介质中的横波和纵波速度分别为 860、2160 m/s,密度为 11400 kg/m³.为简单起见,总使入射层和出射层为环氧树脂材料.

首先计算了弹性波通过上述对应材料形成的一维周期结构的透射系数,系统共包含 21 个周期排列的介质层,且 $d_A = d_B = 0.5a$.不同频率的纵弹性波入射到该系统时,其透射谱如图 2 所示.在图 2 中有两个带隙出现,其中第一个禁带具有较宽的带隙,通带范围内有整齐的一类周期振荡.利用带隙的性质,可有效地隔掉该频率范围内的弹性波.所以,对弹性波而言声子晶体本身就是一个有效的带阻滤波器.当横弹性波入射时情况也类似,只不过横波入射时出

现多个禁带,但其带隙所在频率位置有所下降,带隙的宽度都没有纵波情形时的带隙 I 宽,其透射谱如图 3 所示.下面选取纵弹性波为入射波,计算表明这不会影响所得结论的正确性.禁带的出现能够提供一个良好的局域环境,如在周期结构声子晶体中引入缺陷体,带隙中可产生很强的局域模.与局域模频率共振的入射弹性波可以通过整个声子晶体,并且具有很高的品质因子.在声子晶体中通过引入各种缺陷体,使其产生各种局域态的研究已有大量报道^[13-15].

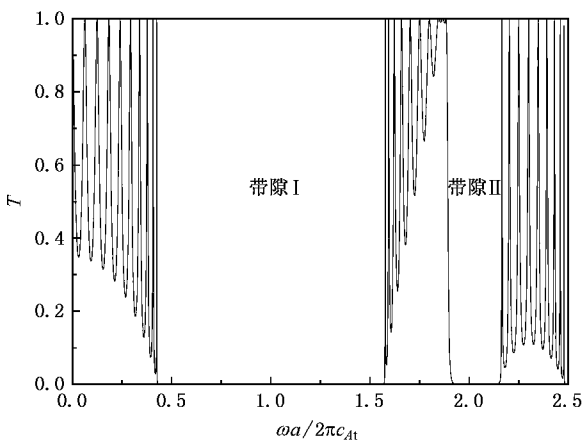


图 2 纵弹性波通过一维周期结构声子晶体的透射谱 $N = 21$

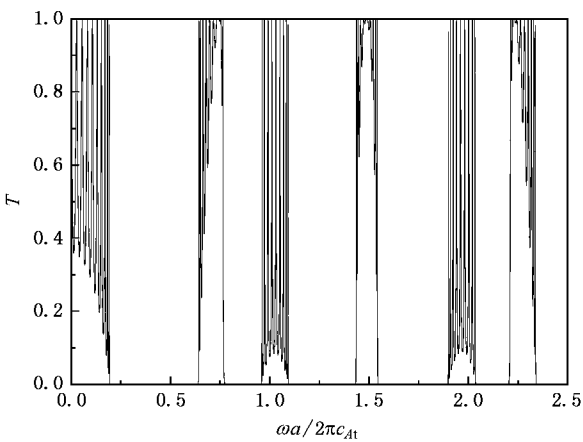


图 3 横弹性波通过一维周期结构声子晶体的透射谱 $N = 21$

准周期结构是介于周期结构和无序结构之间的一种典型结构,如果弹性材料按准周期结构排列形成复合材料系统,弹性波在其中的传播行为又如何呢?为此,我们以上述一维准周期结构声子晶体为例,研究了弹性波通过准周期复合材料系统的透射性质,即一维 Fibonacci 结构声子晶体的透射性质.图 4 为纵弹性波入射到含有 21 层($d_A = d_B = 0.5a$)

准周期介质的系统时,其透射系数随入射频率的变化关系.比较图 2 和图 4 可以发现,在准周期排列的声子晶体系统中同样会有禁带的出现,并且其带隙的宽度和所在频率范围与周期系统相同,不同的是准周期排列的结构中第一个带隙范围内引入了局域模,其中有一个局域共振模的透射峰非常陡峭,如图 4 所示.当然,由于局域态的存在打乱了通带范围内的类周期振荡.由此可见,通过引入缺陷体使其在声子晶体中产生局域态的方式并不是唯一的选择,利用准周期排列各组元材料同样可以在系统中产生局域态.这是因为准周期系统较之周期系统而言,其对称性有所下降,无序度有所增加,其效果就相当于引入缺陷体的作用.

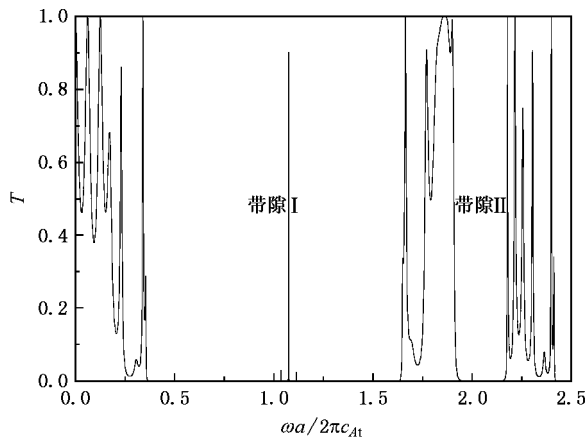


图 4 纵弹性波通过一维 Fibonacci 结构的声子晶体的透射谱 $N = 21$

由图 4 可以看出,有两支共振峰的透射率并不是很高,即品质因子不是很大.计算表明,这是因为所选的系统不够大的缘故,或者是 $N = 21$ 层的准周期系统还不足以把部分模式局域得很好.我们也研究了透射系数随介质层数 N 不断增加的变化情况.图 5 是介质层数 $N = 33$ 和 $N = 43$ 的情形.图 5(a)是 $N = 33$ 的情形,带隙中共振峰的透射率都有较大的提高,图 5(b)是 $N = 43$ 时的情形,三支共振峰中的中间一支共振峰透射系数竟达到 0.96,不过此时左右两支的透射率又几乎变为零,这是因为系统太大的缘故.虽然系统存在这样的本征态,但由于系统太厚,入射波能量不能够与系统中的部分局域本征模发生有效的共振耦合作用,表现在透射谱上则是其透射率就非常低.在研究含缺陷体的声子晶体时,我们也发现了类似的现象^[28].通过仔细比较图 4 与图 5 的结果还可发现,随着介质层数 N 的不断增大,除

了禁带内局域模的变化情况以外,通带内的透射峰也有不断发生分立变化的趋势.这一点与准晶体内的电子波函数随着系统不断变大而发生的现象非常类似^[22-25].

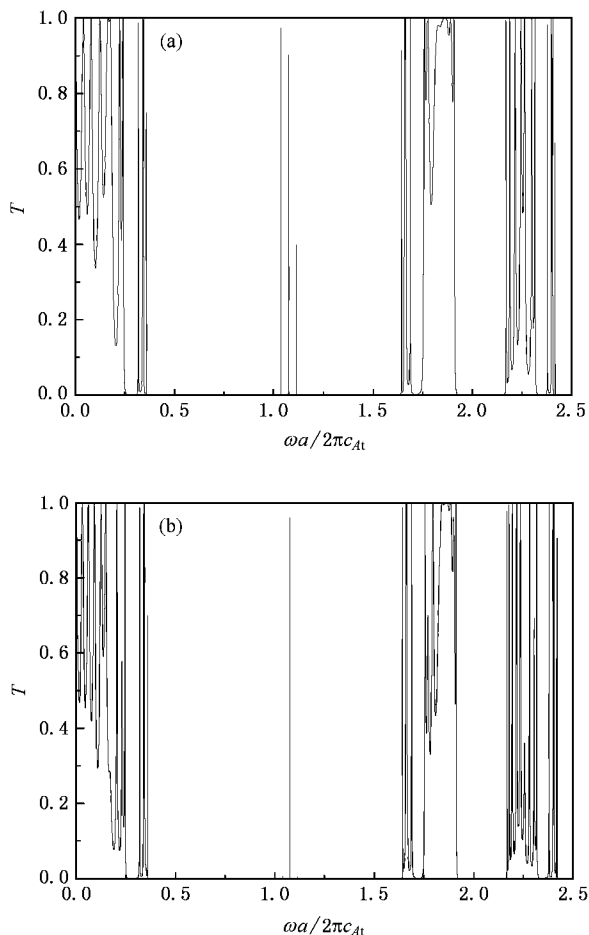


图 5 纵弹性波通过一维 Fibonacci 结构声子晶体的透射谱
(a) $N = 33$ (b) $N = 43$

4. 结 论

本文提出了准周期结构声子晶体的模型,研究了弹性波通过一维准周期结构声子晶体的透射性质,并与周期结构的情形进行了比较.研究表明,弹性波通过一维准周期声子晶体时同样会有禁带的出现.利用准周期排列的特殊结构可在系统中产生局域共振态,表现在透射谱上就是带隙内会出现很强的共振峰.利用准周期排列的结构可产生局域态的性质,准周期声子晶体有望被用于制作声波或弹性波滤波器.此外,随着准周期排列的介质层数的增加,透射峰也有不断分立变化的趋势.在后续的工作

中 ,我们将系统地研究弹性波在一维周期、各类准周期以及完全无序结构中的传播性质 ,希望对经典弹性波在各类复合结构中的传播性质有较全面的理解 .

[1] Johnson S G , Joannopoulos J D 2002 *Photonic Crystals——The Road from Theory to Practice* (Dordrecht : Kluwer Academic)

[2] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059

[3] Sigalas M M ,Economou E N 1992 *J. Sound Vib.* **158** 377

[4] Sigalas M M ,Economou E N 1993 *Solid State Commun.* **86** 141

[4] Kushwaha M S , Halevi P , Dobrzynski L *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022

[5] Martinez-Sala R , Sancho J , Scanchez J V *et al* 1996 *Nature* **378** 241

[6] Liu Z Y , Zhang X , Mao Y *et al* 2000 *Science* **289** 1734

[7] Wang G , Wen X S , Wen J H *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 154302

[8] Wang G , Wen J H , Han X Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese)[王 刚、温激鸿、韩小云等 2003 物理学报 **52** 1943]

[9] Wang G , Wen J H , Liu Y Z *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1247 (in Chinese)[王 刚、温激鸿、刘耀宗等 2005 物理学报 **54** 1247]

[10] Zhong H L , Wu F G , Yao L N 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 275 (in Chinese)[钟会林、吴福根、姚立宁 2006 物理学报 **55** 275]

[11] Goffaux C ,Sánchez-Dehesa J 2003 *Phys. Rev. B* **67** 144301

[12] Chen Y Y ,Ye Z 2001 *Phys. Rev. E* **64** 36616

[13] Khelif A , Djafari-Rouhani B , Vasseur J O *et al* 2002 *Phys. Rev. B* **65** 174308

[14] Kafesaki M , Sigalas M M ,García 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4044

[15] Torres M , Montero De Espinosa F R , García-Pablos D *et al* 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3054

[16] Wu F G ,Liu Y Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 66609

[17] Wu F G ,Liu Y Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1434 (in Chinese)[吴福根、刘有延 2002 物理学报 **51** 1434]

[18] Psarobas I E , Stefanou N ,Modinos A 2000 *Phys. Rev. B* **62** 5536

[19] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492

[20] Shechtman D , Blech I , Gratias D *et al* 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1951

[21] Kohmoto M , Sutherland B ,Iguchi K 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2436

[22] Liu Y Y ,Riklund R 1987 *Phys. Rev. B* **35** 6034

[23] Huang X Q , Liu Y Y ,Mo D 1993 *Solid State Commun.* **87** 601

[24] Yang X B , Liu Y Y ,Fu X J 1999 *Phys. Rev. B* **59** 4545

[25] Merlin R ,Bajema K 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1768

[26] Hou Z L , Fu X J ,Liu Y Y 2004 *Phys. Rev. B* **70** 14304

[27] Li L F 1998 *J. Mod. Opt.* **45** 1313

[28] Cao Y J 2005 *Ph. D. Thesis* (Guangzhou : South China University of Technology)(in Chinese)[曹永军 2005 博士学位论文(广州 :华南理工大学)]

Transmission properties of one-dimensional quasi-periodical phononic crystal^{*}

Cao Yong-Jun Dong Chun-Hong Zhou Pei-Qin

(College of Physics and Electronics Information , Inner Mongolia Normal University , Huhhot 010022 , China)

(Received 6 April 2006 ; revised manuscript received 20 June 2006)

Abstract

In this paper , the model of a one-dimensional (1D) phononic crystal with quasi-periodical structure is proposed . The transmission coefficients of elastic waves through the 1D quasi-periodical phononic crystal are numerically calculated , and the obtained transmission coefficients are compared with those of the phononic crystal with periodical structure . The results show that the band gap can also be found in the phononic crystal with quasi-periodical structure , and the frequency range of the gap is the same as that of the periodical structure . However , the only difference is that strongly localized resonant modes appear in the gap of the quasi-periodical phononic crystal . This study to the properties of the localized modes is useful to the fabrication of the acoustic or elastic wave filters .

Keywords : quasi-periodical structure , phononic crystal , localization

PACC : 4320 , 8160H , 4335 , 0260

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region ,China (Grant No. 200607010107).