

复宗量厄米-高斯光束的相干模表示^{*}

但有全^{1)†} 张 彬¹⁾

1) 四川大学电子信息学院, 成都 610064)

2) 中国民航飞行学院物理教研室, 广汉 618307)

(2005 年 4 月 20 日收到, 2005 年 6 月 24 日收到修改稿)

基于激光的相干模分解理论, 讨论了复宗量厄米-高斯(EHG)光束的模相关和相干模表示, 推导出 EHG 光束的模相关系数的解析表达式, 并给出了一种只包含有限个模式的相干模表示. 在此基础上, 根据 EHG 光束的模结构, 分析了 EHG 光束和常规厄米-高斯(SHG)光束 M^2 因子的差异.

关键词: 复宗量厄米-高斯(EHG)光束, 相干模分解, M^2 因子, 模相关系数(MCCs)

PACC: 4255, 4200

1. 引 言

复宗量厄米-高斯模(EHG 模)与常规厄米-高斯(SHG)模一样都是近轴波动方程的本征解. 由于描述 EHG 光束场分布的厄米函数部分和高斯函数部分的宗量都有相同的复数标度因子^[1,2], 因此, 表现出与 SHG 光束不同的光束特性. 目前, 已发展了多种方法来获得 EHG 光束^[3,4]. 已有的研究结果表明, 当阶数 $N > 1$ 时, EHG 光束与 SHG 光束传输特性明显不同^[2], 且比同阶 SHG 光束的光束质量更好, 因而 EHG 光束受到广泛关注.

在实际工作中, 由于高功率激光器输出的激光通常具有复杂的多模结构, 且模式间或多或少存在相关性^[5,6], 因此, 在对光束特性研究中, 感兴趣的一个问题则是如何由给定的光束传输因子来确定激光的模结构、模相关系数和相应的权重因子, 即激光的相干模分解理论. 对此进行研究可加深对激光束特性和光束传输因子概念的理解.

本文将 EHG 光束视为有模式间相关的多模激光组成, 并选取 SHG 模为基底, 在准单色近似下, 基于激光的相干模分解方法^[7-9], 推导出相应的模相关系数(MCCs)解析表达式, 并对 EHG 光束的模相关和模结构模式进行了分析, 还获得了一种仅含有

有限个模式的相干模表示. 在此基础上, 从 EHG 光束的模结构, 进一步讨论分析了 EHG 光束和 SHG 光束在 M^2 因子上的差异.

2. EHG 光束的模相关系数

在准单色近似下, 部分相干光可用空间-时间域中的互强度来描述^[5], 即

$$J(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{mn} \phi_m(x_1) \phi_n^*(x_2), \quad (1)$$

式中, λ_{mn} 为模相关系数, m 和 n 为模的阶数, $\phi_m(x)$ 为归一化的 m 阶 SHG 模, 即

$$\phi_j(x_j) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2^i i!} \exp(-\alpha^2 x_j^2 / 2) H_i(\alpha x_j), \quad (i = m, n; j = 1, 2) \quad (2)$$

式中

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{w_{0h}}, \quad (3)$$

w_{0h} 为基底的零阶 SHG 光束的束腰宽度.

根据 SHG 模的正交性, 由(1)式可得模相关系数为

$$\lambda_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m^*(x_1) J(x_1, x_2) \phi_n(x_2) dx_1 dx_2, \quad (4)$$

对于 EHG 光束来说, 假设其束腰位于 $z = 0$ 处,

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60108004)和中国民航飞行学院科研基金(批准号: G2004-71)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: dandin12x@163.com

于是,在直角坐标系中,EHG 光束在 $z=0$ 处的光场分布可表示为^[1,2]

$$E(x, 0) = H_N\left(\frac{x}{w_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right), \quad (5)$$

式中, H_N 表示 N 阶厄米函数, w_0 为零阶 EHG 光束的束腰宽度, w_0 与 (3) 式中的 w_{0h} 不一定相同,二者之比为

$$\gamma = w_0/w_{0h}. \quad (6)$$

进一步根据 (5) 式可得到 EHG 光束在 $z=0$ 平面上的互强度为

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= E(x_1)E^*(x_2) \\ &= H_N\left(\frac{x_1}{w_0}\right)H_N\left(\frac{x_2}{w_0}\right)\exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{w_0^2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $\bar{}$ 表示系综平均.

将 (2) 式和 (7) 式代入 (4) 式,并应用积分公式^[10,11]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}v}\right)H_n\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}\mu}\right)e^{-t^2}dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{v^m\mu^n p^{\frac{m+n+1}{2}}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \left[\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (2v^2p-1)^{\frac{m-k}{2}} (2\mu^2p-1)^{\frac{n-k}{2}} 2^{-\frac{m-k}{2}-\frac{n-k}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times H_{m-k}\left(\frac{x}{\sqrt{2v^2-1/p}}\right)H_{n-k}\left(\frac{y}{\sqrt{2\mu^2-1/p}}\right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

以及厄米函数的基本性质,经计算得到 N 阶 EHG 光束的模相关系数为

1) 当 N 为偶数时

$$\begin{cases} \lambda_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{\pi} w_0^2 \alpha \frac{\sqrt{m!n!} \{N!\} \gamma^{2N}}{2^{\frac{m+n}{2}} (1+\gamma^2)^{\frac{2N+m+n+2}{2}}} \\ \quad \times \sum_{k=0}^{\min(\frac{N}{2}, \frac{m}{2})} \sum_{j=0}^{\min(\frac{N}{2}, \frac{n}{2})} \frac{2^{\chi_{k+j}} (1-\gamma^2)^{\frac{m+n-2k-2j}{2}}}{(2k)! \left(\frac{N}{2}-k\right)! \left(\frac{m}{2}-k\right)! (2j)! \left(\frac{N}{2}-j\right)! \left(\frac{n}{2}-j\right)!} \quad (m, n \text{ 均为偶数}) \\ \lambda_{m,n} = 0 \quad (m \text{ 或 } n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (9)$$

2) 当 N 为奇数时

$$\begin{cases} \lambda_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \sqrt{\pi} w_0^2 \alpha \frac{\sqrt{m!n!} \{N!\} \gamma^{2N}}{2^{\frac{m+n-6}{2}} (1+\gamma^2)^{\frac{2N+m+n+2}{2}}} \\ \quad \times \sum_{k=0}^{\min(\frac{N-1}{2}, \frac{m-1}{2})} \sum_{j=0}^{\min(\frac{N-1}{2}, \frac{n-1}{2})} \frac{2^{\chi_{k+j}} (1-\gamma^2)^{\frac{m+n-2k-2j-2}{2}}}{(2k+1)! \left(\frac{N-1}{2}-k\right)! \left(\frac{m-1}{2}-k\right)! (2j+1)! \left(\frac{N-1}{2}-j\right)! \left(\frac{n-1}{2}-j\right)!} \\ \quad (m, n \text{ 均为奇数}) \\ \lambda_{m,n} = 0 \quad (m \text{ 或 } n \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (10)$$

分析 (9) 式和 (10) 式可知,偶数阶的 EHG 只含有偶数阶的 SHG 模,而奇数阶的 EHG 光束则只含有奇数阶的 SHG 模. 一般来说, EHG 光束的模相关系数与阶数 N 以及零阶 EHG 光束的束腰宽度与基底的零阶 SHG 光束的束腰宽度之比 γ 参数有关.

3. EHG 光束的模相关和模结构分析

利用强度二阶矩理论,可获得 N 阶 EHG 光束

的 M^2 因子^[12]

$$M^2 = \left\{ \frac{(2N+1)(4N-1)}{(2N-1)} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

另一方面,可将 EHG 光束看作是由一组空间相干的 SHG 模叠加而成,由此获得的 M^2 因子应与模相关系数有关^[5],即

$$M^2 = \sqrt{\left[\sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1) C_{mm} \right]^2 - 4 \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \sqrt{(m+1)(m+2)} \operatorname{Re} C_{m,m+2} \right]^2}, \quad (12)$$

式中

$$C_{mm} = \lambda_{mm} / \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{mm}, \quad (13)$$

$$C_{m,m+2} = \lambda_{m,m+2} / \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{mm} \quad (14)$$

为相应的模权重因子, λ_{mm} 和 $\lambda_{m,m+2}$ 由 (9) 式或 (10) 式给出.

对于同一束 EHG 光束来说, 无论是将其作为整体还是相干模叠加的结果, 其 M^2 因子应保持不变, 因此, 可在给定 M^2 因子 (可由实验直接测量) 和截断参数值 (如 $C_{mm} \geq 1\%$) 条件下, 联立 (11)–(14) 式以及 (9) 或 (10) 式解出 γ , 模式 m , 模相关系数 λ_{mm} , $\lambda_{m,m+2}$ 和权重因子 C_{mm} , $C_{m,m+2}$. 从数学上讲, 由此获得的解不是唯一的, 然而, 从物理的角度而言, 对

于特定的实验条件, 模分解方式应当是唯一的, 因此, 可以根据具体的实验条件, 辅以其他参数的测量来予以解决. 例如, 如果 EHG 光束是由实际的稳定球形谐振腔产生, 则 SHG 的基模束腰宽度 w_{0h} 只由该稳定球形腔的结构参数确定^[7,8], 从而可确定参数 $\gamma = w_0/w_{0h}$, 并进一步根据上述模分解方法确定出对应的一组模式 m 、模相关系数 λ_{mm} , $\lambda_{m,m+2}$ 和权重因子 C_{mm} , $C_{m,m+2}$. 表 1 给出了具有不同 M^2 因子的 EHG 光束的模式 m 和权重因子 C_{mm} , $C_{m,m+2}$ 的典型计算结果, 计算中选取 $C_{mm} \geq 1\%$.

从表 1 可以看出, 对于相同的 γ 参数值, M^2 因子越大 (阶数 N 也越大), 组成 EHG 光束的 SHG 模式就越多. 对于相同的 M^2 因子, γ 参数取值不同,

表 1 由给定的 EHG 光束的 M^2 因子值计算模式 m 和权重因子 C_{mm} , $C_{m,m+2}$ 的数值计算

N	M^2	γ	m	C_{00} /%	C_{11} /%	C_{02} C_{20} /%	C_{13} C_{31} /%	C_{22} /%	C_{33} /%	C_{24} C_{42} /%	C_{35} C_{53} /%	C_{44} /%	C_{55} /%	C_{46} C_{64} /%	C_{66} /%
2	3.42	1.05	0 2	36.6		48.0		62.9							
		1.20	0 2 4	45.7		-47.1		48.6		-16.1					
3	3.92	1.05	1 3		65.8		-47.1		33.8						
		1.20	1 3 5		79.5		-35.7		16.0		8.0		4.0		
4	4.39	1.05	0 2 4	10.3		-27.5		73.1		-34.4		16.2			
		1.20	0 2 4 6	16.4		-35.9		78.5		-14.1		2.5		2.4	2.2

EHG 光束的模式结构也不同, γ 参数越大, 组成 EHG 光束的 SHG 模式就越多.

4. 一种只包含有限个 SHG 模式的相干模表示

以偶数阶的 EHG 光束为例, 在 (9) 式中, 应注意

到总是有 $m+n-2k-2j \geq 0$, 且等号仅当 $k=m/2$ 与 $j=n/2$ 同时成立时才成立. 于是, 当 (9) 式中取 $\gamma=1$ 时, 1) 若 $m>N$ 或 $n>N$, 则式中求和号内的各项由于都含有因子 $(1-\gamma^2)$, 故相应的模相关系数均为零; 2) 若 $m \leq N$, 且 $n \leq N$, 则式中求和号内只有一项不为零, 即 $k=m/2$ 和 $j=n/2$. 由此可见, 当参数 $\gamma=1$ 时, 相应的模相关系数可表示成

$$\begin{cases} \lambda_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n}{2}+N} \sqrt{\pi} w_0^2 \alpha \frac{(N!)^2 2^{m+n-2N-2} \gamma^2}{\sqrt{m!n!} \left(\frac{N-m}{2}\right)! \left(\frac{N-n}{2}\right)!} & (m, n = 0, 2, 4, 6, \dots, N) \\ \lambda_{m,n} = 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

因此, 根据 (13)–(15) 式可得相应的权重因子为

$$\begin{cases} C_{mm} = \frac{\sqrt{\pi} (N!)^2 2^{m-2N}}{m! \left[\left(\frac{N-m}{2}\right)!\right]^2 \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right)}, & C_{m,m+2} = -\frac{\sqrt{\pi} (N!)^2 2^{m-2N+1} \left(\frac{N-m}{2}\right)}{\sqrt{(m+2)!m!} \left[\left(\frac{N-m}{2}\right)!\right]^2 \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right)}, \\ & (m = 0, 2, 4, 6, \dots, N) \\ C_{mm} = 0, & C_{m,m+2} = 0, (m > N) \end{cases} \quad (16)$$

式中, Γ 为伽马函数.

将(16)式代入(12)式计算得到的 M^2 因子与由(11)式得到的是完全相同的. 由此表明, 对于任一给定阶数 N (偶数) 和束腰宽度 w_0 的 EHG 光束, 总存在一种相干模分解方式, 其模式结构只包含有限个模式, 即 $m = 0, 2, 4, \dots, N$ 共 $N/2$ 个 SHG 模. 此时, 要求参数 $\gamma = 1$, 即作为基底的基模高斯光束束腰宽度 w_{0h} 等于 EHG 光束的束腰 w_0 .

类似可以证明, 奇数 N 阶的 EHG 光束同样存在一种只包含有限个模式的相干模表示, 这组模的模相关系数和权重因子表达式形式仍分别与(15)式和(16)式相同, 只是相应的模式不同, 即 $m = 1, 3, 5, \dots, N$, 共 $(N-1)/2$ 个模式.

此外, 由(15)式很容易得出, 仅有两种模式间不相关情况, 即 1) $N = 0$ 相应 $\lambda_{00} = (\sqrt{\pi/2})w_0$, 其余的 $\lambda_{m,n} = 0$ 2) $N = 1$ 相应 $\lambda_{11} = (\sqrt{\pi/2})w_0$, 其余的 $\lambda_{m,n} = 0$. 这与已知的结果一致, 即 $N = 0, 1$ 的 EHG 光束分别与 $N = 0, 1$ 的 SHG 光束是完全相同的.

利用本文给出的只包含有限个 SHG 模式的 EHG 光束的相干模表示可以很好地从物理上解释为什么大于一阶的 EHG 光束比同阶的 SHG 光束的 M^2 因子要小, 即光束质量要好. 具体来说, 对于 N 阶 EHG 光束, 根据(16)式, 最多含有 N 阶 SHG 模, 且只部分含有 N 阶 SHG 模, 其余全是低阶模, 并且, 此时, $C_{m,m+2} < 0$ 结合(12)式容易得出

$$M_E^2 < \sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1)C_{mm} < (2N+1) \sum_{m=0}^N C_{mm}$$

$$= (2N+1), \tag{17}$$

即小于 N 阶 SHG 光束的 M^2 因子.

此外, 进一步由(16)式可得到

$$\frac{C_{N+2,N+2}}{C_{NN}} = 1/\left[\left(2 - \frac{1}{N+2}\right)\left(2 - \frac{1}{N+1}\right)\right], \tag{18}$$

即当 $N > 1$ 时, 有

$$\frac{C_{N+2,N+2}}{C_{N,N}} < \frac{C_{44}}{C_{22}} = \frac{12}{35}. \tag{19}$$

(19)式表明, 随着阶数 N 的增加, EHG 光束中同阶的 SHG 模的权重因子每增加两阶至少按 12/35 的因子减少, 从而说明了 EHG 光束的 M^2 因子随阶数 N 的增加比 SHG 光束要小得多^[2].

5. 结 论

本文应用相干模分解理论, 对给定的 M^2 因子 (或阶数 N) 情况下, 得到了 EHG 光束的模式、一般的模相关系数 (MCCs) 和权重因子的解析表达式. 对任一给定阶数 N 和束腰宽度 w_0 的 EHG 光束, 只要基底的高斯光束束腰宽度 w_{0h} 等于 w_0 , 总存在一种只包含有限个模式的相干模表示, 这种相干模表示可应用于理论分析中. 利用 EHG 的相干模, 从物理上, 很好地解释了高阶 EHG 光束与 SHG 光束的 M^2 因子的差异以及 M^2 因子随阶数 N 的变化规律. 本文研究结果可加深对复宗量厄米高斯光束的光束特性以及 M^2 因子的认识.

[1] Siegman A E 1986 *Lasers* (California : University Science Books , Mill Valley) p626—662

[2] Saghafi S , Sheppard C J R , Piper J A 2001 *Opt. Commun.* **191** 173

[3] Shin S Y , Felsen L B 1977 *J. Opt. Soc. Am.* **67** 699

[4] Zauderer E 1986 *J. Opt. Soc. Am.* **3** 465

[5] Du K M , Herziger G , Loosen P , Rühl F 1992 *Opt. Quant. Electron.* **24** 1081

[6] Du K M , Herziger G , Loosen P , Rühl F 1992 *Opt. Quant. Electron.* **24** 1119

[7] Zhang B , Wen Q , Chu X L 2003 *Chin. Phys.* **12** 981

[8] Zhang B , Li B D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 58 (in Chinese) [张彬、吕百达 1999 物理学报 **48** 58]

[9] Zeng Q G , Wen Q , Zhang B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1357 (in Chinese) [曾庆刚、文 乔、张 彬 2004 物理学报 **53** 1357]

[10] Erdelyi A , Magnus W , Oberhettinger F *et al* 1954 *Tables of Integral Transforms* (New York : McGraw-Hill)

[11] Gradshteyn I S , Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals , Series , Products* (New York : Academic)

[12] Saghafi S , Sheppard C J R , Piper J A 1998 *Opt. Commun.* **153** 207

Coherent-mode representation of the elegant Hermite-Gaussian beams^{*}

Dan You-Quan^{1,2,†} Zhang Bin¹

¹ *College of Electronics Information, Sichuan University, Chengdu 610064, China*

² *Department of Physics, Civil Aviation Flight University of China, Guanghan 618307, China*

(Received 20 April 2005; revised manuscript received 24 June 2005)

Abstract

Based on the theory of coherent-mode decomposition of laser beams, the mode correlation and coherent-mode representation of the elegant Hermite-Gaussian (EHG) beams are discussed. The analytical expressions for the mode coherence coefficients (MCCs) of EHG beams, which include a coherent-mode representation that consists of finite coherent-modes, are derived. Furthermore, the difference of the M^2 -factor between the EHG beams and SHG beams is analyzed by means of the mode structure of the EHG beams.

Keywords: elegant Hermite-Gaussian (EHG) beams, coherent-mode decomposition, M^2 -factor; mode coherence coefficients (MCCs)

PACC: 4255, 4200

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60108004) and the Science Foundation of Civil Aviation Flight University of China (Grant No. G2004-71).

[†] Corresponding author. E-mail: dandin12x@163.com