

部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流 大气的光束扩展^{*}

季小玲¹⁾ 黄太星¹⁾ 吕百达²⁾

1) 四川师范大学物理系 成都 610066)

2) 四川大学激光物理与化学研究所 成都 610064)

(2005 年 4 月 13 日收到, 2005 年 6 月 27 日收到修改稿)

基于广义惠更斯-菲涅尔原理, 并采用将部分相干双曲余弦高斯光束用厄米-高斯光束的非相干叠加表示的方法, 研究了部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气的光束扩展问题, 推导出了部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气均方根束宽的解析表达式. 研究表明, 部分相干双曲余弦高斯光束的扩展随着湍流大气的折射率结构常数 C_n^2 和光束离心参数 δ 的增大而加剧. 但是, 随着 δ 的增大, 部分相干双曲余弦高斯光束受到湍流的影响减小.

关键词: 部分相干双曲余弦高斯光束, 湍流大气, 光束扩展

PACC: 9265, 4200

1. 引言

激光束的大气传输在遥感、跟踪和远距离光通讯等应用中有十分重要的意义^[1,2]. 然而, 由于大气湍流会引起完全相干光快速扩展而使得完全相干光在大多数实际应用中受到限制. 1990 年, Wu^[3]从理论上证明, 部分空间相干光较完全相干光受到湍流大气的影响要小. 2002 年, Gbur 和 Wolf^[4]给出了部分空间相干光受到大气湍流影响的条件. 之后, Dogariu 和 Amarande^[5]用实验证实了 Gbur 和 Wolf 的结论. 2003 年, Shirai, Dogariu 和 Wolf^[6]以高斯-谢尔模型光束为例, 用相干模式叠加法研究了部分空间相干光在湍流大气中的光束扩展问题. 此外, 2004 年, Ji, Xiao 和 Li^[7]还研究了大气湍流对多色部分空间相干光传输特性的影响. 另一方面, Gori 等人^[8]指出, 如果部分空间相干光被认为是由互不相干的横模叠加构成, 那么部分空间相干光的模式结构可以由它的横向光强分布确定. 本文以广义惠更斯-菲涅尔原理为基础, 并采用厄米-高斯光束非相干叠加的方法, 研究部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气光束扩展问题, 得到一些有意义的结果, 并给予了

合理的物理解释.

2. 理论模型

部分相干双曲余弦高斯光束在入射面 $z=0$ 处的光强分布为^[9]

$$I(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0 x) \times \exp\left(-\frac{y^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0 y), \quad (1)$$

式中 w_0 为对应高斯部分的束腰宽度, Ω_0 为与双曲余弦部分相关的参数.

(1) 式表征的部分相干双曲余弦高斯光束可以用厄米-高斯光束的非相干叠加表示^[8]

$$I(x, y, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m |\phi_m(x, 0)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\phi_n(y, 0)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n |\phi_{mn}(x, y, 0)|^2, \quad (2)$$

式中

$$\phi_{mn}(x, y, 0) = \phi_m(x, 0) \phi_n(y, 0) = \frac{1}{w'_0 \sqrt{\pi 2^{m+n-1} m! n!}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w'_0} x\right)$$

^{*} 国家高技术 863-802 项目(批准号: A823070)和四川省教育厅自然科学基金(批准号: 2005A093)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jixl100@163.com

$$\times H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w'_0}y\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0'^2}\right), \quad (3)$$

其中 $H_j(\bullet)$ ($j = m, n$, 下同) 为 j 阶厄米多项式, c_j 为展开系数, w'_0 表示基模高斯光束对应的束腰宽度, 并且

$$w'_0 = \sqrt{2}w_0. \quad (4)$$

对 (1) (2) 两式作傅里叶变换, 并利用函数系 $\Psi_n(t) = L_n(t)\exp(-t/2)$ 的正交归一性 ($L_n(\bullet)$ 为 n 阶拉盖尔多项式) 经过复杂的积分运算后得到^[10]

$$c_j = \sqrt{\pi}w_0\exp\left(\frac{\delta^2}{4}\right)\sum_{k=0}^j(-1)^k\binom{j}{k}_1 \times F_1\left[k+1; \frac{1}{2}; -\frac{\delta^2}{8}\right], \quad (5)$$

式中 $\delta = \Omega_0 w_0$ 为光束的离心参数 ($\delta \geq 0$), F_1 为合流超几何函数.

(3) 式描述的厄米-高斯光束通过湍流大气传输的光强分布可由广义惠更斯-菲涅尔原理确定^[2]

$$I_{mn}(\mathbf{r}, z) = |\phi_{mn}(\mathbf{r}, z)|^2 \\ = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \phi_{mn}(\mathbf{r}'_1, 0) \phi_{mn}^*(\mathbf{r}'_2, 0) \\ \times \exp\left\{-\left(\frac{ik}{2z}\right)[\mathbf{r}'_1{}^2 - \mathbf{r}'_2{}^2] - i(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r}\right\} \\ \times \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z\right. \\ \left.\times \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa r_0)] \kappa\right\}, \quad (6)$$

式中 $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ 分别为 $z=0$ 处空间不同点径向坐标矢量, $\mathbf{r}$ 为 z 处空间径向坐标矢量, 并且 $\mathbf{r} = xi + yj$, 波数 $k = 2\pi/\lambda$ (λ 为波长), $J_0(\bullet)$ 为零阶 Bessel 函数, $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数, 且

$$r_0 = |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|. \quad (7)$$

因此 (2) 式描述的部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气光强的传输公式为

$$I(\mathbf{r}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n I_{mn}(\mathbf{r}, z). \quad (8)$$

按文献 [4] 均方根束宽定义为

$$\bar{w}^2(z) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \left\{ \left(\frac{m+n+1}{2} \right) w_0'^2 \left[1 + \left(\frac{2}{kw_0'^2} \right)^2 z^2 \right] + Fz^3 \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n}. \quad (17)$$

那么, 部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气传输的相对束宽为

$$\bar{w}^2(z) = \frac{\int r^2 I(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}}{\int I(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}}. \quad (9)$$

将 (8) 式代入 (9) 式, 得到

$$\bar{w}^2(z) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \int r^2 I_{mn}(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \int I_{mn}(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r}}. \quad (10)$$

由文献 [6] 可知

$$\int r^2 I_{mn}(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r} = \left(\frac{m+n+1}{2} \right) w_0'^2 \\ \times \left[1 + \left(\frac{2}{kw_0'^2} \right)^2 z^2 \right] + Fz^3, \quad (11)$$

$$\int I_{mn}(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r} = 1, \quad (12)$$

式中

$$F = \frac{4\pi^2}{3} \int_0^\infty \kappa^2 \Phi_n(\kappa) d\kappa z^3. \quad (13)$$

若采用 Von Karman 谱^[21] 则

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (14)$$

式中 $\kappa_m = 5.92/l_0$, l_0 和 L_0 分别为湍流的内、外尺度, C_n^2 是折射率结构常数, 它表征湍流的强弱.

将 (14) 式代入 (13) 式, 并利用积分公式

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x) \Gamma(x + \gamma)^\rho dx = \alpha^{\rho-1} \exp(\alpha\gamma) \Gamma(1 - \rho, \alpha\gamma), \quad (15)$$

经过复杂的积分运算后得到

$$F = 0.022\pi^2 \kappa_m^{1/3} C_n^2 \exp\left(\frac{1}{\kappa_m^2 L_0^2}\right) \\ \times \left[\Gamma\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{\kappa_m^2 L_0^2}\right) - \frac{1}{\kappa_m^2 L_0^2} \Gamma\left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{\kappa_m^2 L_0^2}\right) \right], \quad (16)$$

式中 $\Gamma(\bullet, \bullet)$ 为伽玛函数. 显然, F 随着 C_n^2 的增大而增大.

将 (11) (12) 式代入 (10) 式, 得到

$$\frac{\bar{w}^2(z)}{\bar{w}^2(0)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \left\{ \left(\frac{m+n+1}{2} \right) w_0'^2 \left[1 + \left(\frac{2}{k w_0'^2} \right)^2 z^2 \right] + F z^3 \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \left(\frac{m+n+1}{2} \right) w_0'^2} \quad (18)$$

(17)(18) 式为本文所得到的主要解析公式。(17) 和 (18) 式表明, $\bar{w}^2(z)$ 和 $\bar{w}^2(z)/\bar{w}^2(0)$ 都由湍流参数 C_n^2 和光束离心参数 δ 共同决定, 并且随着 C_n^2 的增大而增大。

当 $C_n^2 = \alpha$ (自由空间) 时, 由 (17) 和 (18) 式得到部分相干双曲余弦高斯光束通过自由空间传输的均方根束宽和相对束宽分别为

$$\bar{w}^2(z)|_{\text{free}} = \frac{w_0'^2 \left[1 + \left(\frac{2}{k w_0'^2} \right)^2 z^2 \right] \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \left(\frac{m+n+1}{2} \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n} \quad (19)$$

$$\left. \frac{\bar{w}^2(z)}{\bar{w}^2(0)} \right|_{\text{free}} = \left[1 + \left(\frac{2}{k w_0'^2} \right)^2 z^2 \right] \quad (20)$$

(19)(20) 式表明, $\bar{w}^2(z)|_{\text{free}}$ 与光束离心参数 δ 有关, 而 $\bar{w}^2(z)/\bar{w}^2(0)|_{\text{free}}$ 与 δ 无关, 即不同离心参数 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间传输其光束的相对扩展相同。

3. 数值计算结果及物理解释

利用 (17)(18) 式就湍流对部分相干双曲余弦高斯光束扩展的影响作了数值计算和分析。数值计算参数为 $w_0 = 0.05\text{m}$, $\lambda = 1.06\mu\text{m}$ 。当湍流的内、外尺度取典型值, $\rho_0 = 0.01\text{m}$, $L_0 = 10\text{m}$ 时, 由 (16) 式得到

$$F = 9.423 C_n^2. \quad (21)$$

图 1 为不同湍流强度下部分相干双曲余弦高斯光束 ($\delta = 2.1$) 的相对束宽 $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 随光束传输距离的变化曲线。图 1 表明, $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 随着 C_n^2 的增大而增大, 即部分相干双曲余弦高斯光束随着大气湍流的增强而扩展。例如, 在 $z = 10\text{km}$ 处, 当 $C_n^2 = 0, 10^{-15} \text{m}^{-2/3}, 5 \times 10^{-15} \text{m}^{-2/3}$ 和 $10^{-14} \text{m}^{-2/3}$ 时, $\bar{w}(z)/\bar{w}(0) = 1.21, 1.62, 2.71$ 和 3.64 。图 2 是不同光束离心参数 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间和湍流大气中传输 $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 随光束传输距离的变化曲线, 其中虚线对应自由空间中的情况, 实线对应湍流大气中的情况。由图 2 可知, 在湍流大气中 $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 随着 δ 的增大而减小, 而在自由空间中不同离心参数 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束的 $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 均相同, 即 δ 越大的部分相干双曲余弦

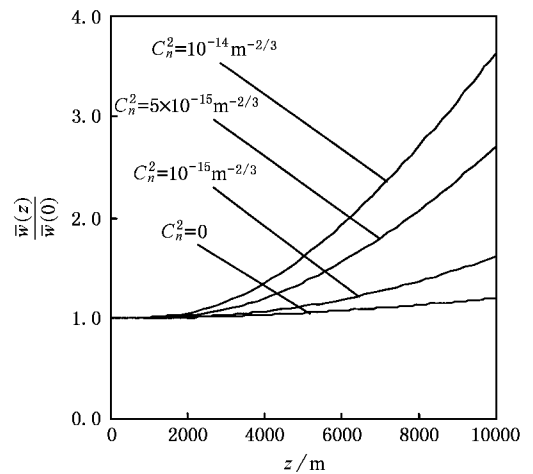


图 1 不同 C_n^2 情况下, $\bar{w}(z)/\bar{w}(0)$ 随 z 的变化 计算参数为 $\delta = 2.1$

高斯光束受到的湍流影响越小。图 3(a)(b) 分别为不同光束离心参数 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间和湍流大气中传输时均方根束宽 $\bar{w}(z)$ 随光束传输距离的变化曲线。图 3 表明, 不论在自由空间还是在湍流大气中 $\bar{w}(z)$ 均随着光束离心参数 δ 的增大而增大, 但是在湍流大气中不同 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束的 $\bar{w}(z)$ 随着传输距离的增加而相接近。例如, 湍流大气中 ($C_n^2 = 10^{-14} \text{m}^{-2/3}$) 在 $z = 0$ 和 $z = 10\text{km}$ 处 $\delta = 0.5$ 和 2.6 的 $\bar{w}(z)$ 的差之比为 2.89 倍。图 4 为不同光束离心参数 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束的 $\bar{w}(C_n^2)$ 随湍流参数

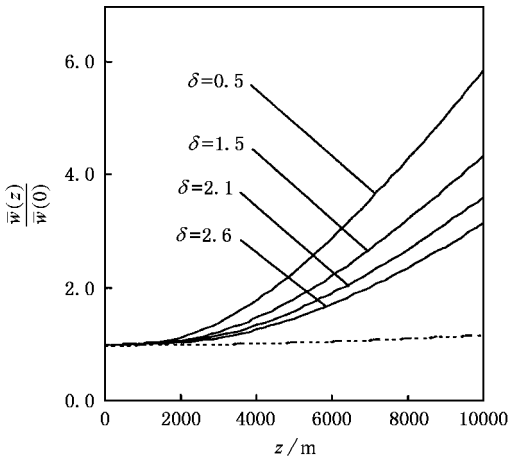


图2 不同 δ 情况下, $w(z)/w(0)$ 随 z 的变化 实线: $C_n^2 = 10^{-14} \text{m}^{-2/3}$, 虚线: $C_n^2 = 0$ ($\delta = 0.5, 1.5, 2.1, 2.6$)

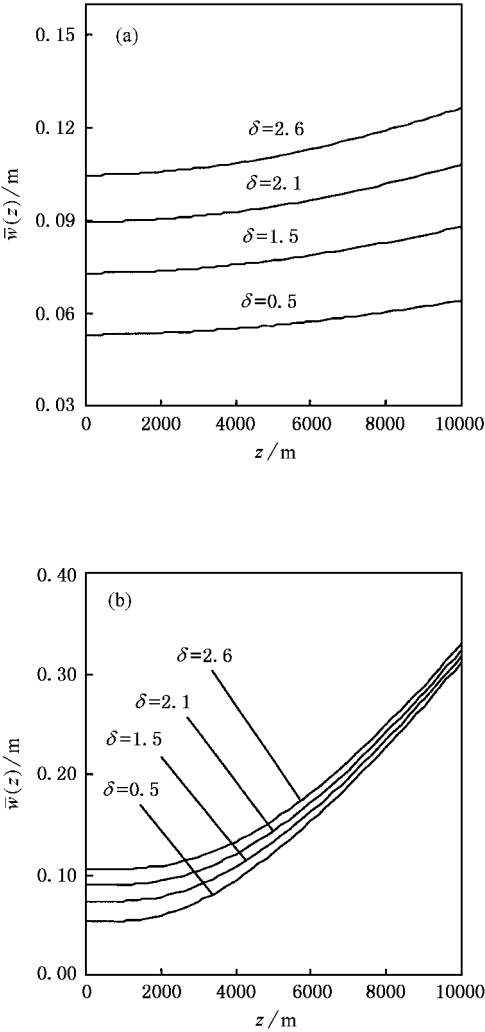


图3 不同 δ 情况下, $w(z)$ 随 z 的变化 (a) $C_n^2 = 0$, (b) $C_n^2 = 10^{-14} \text{m}^{-2/3}$

C_n^2 的变化曲线. 由图 4 可知, $w(C_n^2)$ 随 C_n^2 的增大而增大, 并且不同 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束的 $w(C_n^2)$ 随着 C_n^2 的增大而相接近. 例如, 在 $z = 10 \text{km}$ 处, 当 $C_n^2 = 0$ 和 $10^{-14} \text{m}^{-2/3}$ 时 $\delta = 0.5$ 和 2.6 的 $w(C_n^2)$ 的差之比为 3.4 倍.

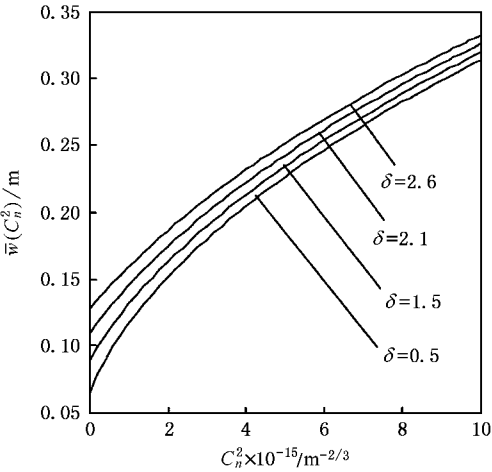


图4 不同 δ 情况下, $w(C_n^2)$ 随 C_n^2 的变化 计算参数 $z = 10 \text{km}$

离心参数 δ 取不同值时, 构成部分相干双曲余弦高斯光束的非相干叠加的各厄米-高斯光束的权重因子示于表 1. 由表 1 可知, 基模高斯光束的权重因子随着 δ 的增加而减小, 参与非相干叠加的厄米-高斯光束阶次 m (或 n) 随着 δ 的增加而增大. 当 δ 较小时, 例如 $\delta = 0.5$ 和 1.5 , c_0 (基模高斯光束的权重因子) 最大; 当 δ 较大时, 例如 $\delta = 2.1$ 和 2.6 , c_1 (高阶模厄米-高斯光束的权重因子) 最大. 另一方面, 文献 [6] 研究表明, 在湍流介质中, 高阶模厄米-高斯光束的相对扩展要小于低阶模厄米-高斯光束的相对扩展. 所以, 随着离心参数 δ 的增大, 部分相干双曲余弦高斯光束受到的湍流影响减小. 事实上, 随着 δ 的增大, 参与叠加的模式数增加, 部分相干双曲余弦高斯光束的空间相干性变差, 从而受到的湍流影响减小. 这一结论与文献 [3] 的相一致. 但是, 在自由空间中部分相干双曲余弦高斯光束的扩

表 1 δ 取不同值时, 非相干叠加的各阶厄米-高斯光束的权重因子

δ	$c_0/\%$	$c_1/\%$	$c_2/\%$	$c_3/\%$	$c_4/\%$	$c_5/\%$	$c_6/\%$
0.5	93.88	5.99	0.13				
1.5	53.20	38.36	7.50	0.86	0.07		
2.1	22.58	51.16	20.67	4.73	0.76	0.09	
2.6	0.53	50.18	33.52	12.07	3.01	0.58	0.09

展随着 δ 的增大而增大,因此在湍流大气中不同 δ 的部分相干双曲余弦高斯光束的 $\bar{w}(z)$ 会随着传输距离的增加而相接近.

4. 结 论

本文基于广义惠更斯-菲涅尔原理,并采用将部分相干双曲余弦高斯光束用有限个厄米-高斯光束的非相干叠加表示的方法,研究了部分相干双曲余

弦高斯光束通过湍流大气光束扩展问题,推导出了部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气均方根束宽的解析表达式.研究表明,部分相干双曲余弦高斯光束在湍流大气中的光束扩展由湍流大气的折射率结构常数 C_n^2 和部分相干双曲余弦高斯光束离心参数 δ 共同决定.部分相干双曲余弦高斯光束的扩展随着 C_n^2 和 δ 的增大而加剧.随着 δ 增大,参与叠加的模式数增加,光束的空间相干性变差,这使得部分相干双曲余弦高斯受到的湍流影响减小.

- [1] Fante R L 1985 *Progress in Optics XXII: Wave propagation in random media: a systems approach*, Chap. VI Wolf E ed. (Amsterdam: Elsevier Press)
- [2] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation through Random Media*, (Bellingham, Washington: SPIE Press)
- [3] Wu J 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 671
- [4] Gbur G, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592

- [5] Dogariu A, Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [6] Shirai T, Dogariu A, Wolf E 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1094
- [7] Ji X L, Xiao X, Lü B D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3996 (in Chinese) [季小玲、肖 希、吕百达 2004 *物理学报* **53** 3996]
- [8] Gori F, Santarsiero M, Borghi R, Guattari G 1998 *Opt. Lett.* **23** 989
- [9] Tovar A A, Casperson LW 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 2425
- [10] Luo S R, Lü B D 2003 *Optik* **114** 441

Spreading of partially coherent cosh-Gaussian beams propagating through turbulent atmosphere^{*}

Ji Xiao-Ling¹⁾ Huang Tai-Xing¹⁾ Lü Bai-Da²⁾

¹⁾ Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

²⁾ Institute of Physics and Chemistry, Sichuan University, Chendu 610064, China)

(Received 13 April 2005; revised manuscript received 27 June 2005)

Abstract

Based on the extended Huygens-Fresnel principle, the spreading of partially coherent cosh-Gaussian beams propagating through turbulent atmosphere is studied by using the incoherent superposition of higher-order Hermite-Gaussian beams. The analytic expression of the mean-squared width of partially coherent cosh-Gaussian beams in turbulence is derived. It is shown that the spreading increases with increasing turbulent parameter C_n^2 and decentered parameter δ of the beams. However, partially coherent cosh-Gaussian beams with larger δ are less sensitive to the effect of turbulence than those with smaller δ .

Keywords: partially coherent cosh-Gaussian beam, turbulence atmosphere, beam spreading

PACC: 9265, 4200

^{*} Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No. A823070), and the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Sichuan Province, China (Grant No. 2005A093).

[†] Corresponding author. E-mail: jixl100@163.com