

Lorenz 系统族采样同步研究

金辉宇 奚宏生

(中国科学技术大学自动化系 合肥 230026)

(2006 年 6 月 21 日收到 2006 年 9 月 16 日收到修改稿)

从对连续时间混沌系统进行数字测量的角度,提出了连续时间混沌系统的采样同步问题。利用控制理论的结果,设计了 Lorenz 系统族的采样同步系统。仅需测量一个状态分量,就可在采样时刻实现同步。数值模拟例证了同步的性能。

关键词:混沌同步, Lorenz 系统族, 采样同步

PACC: 0545

1. 引 言

混沌同步是非线性科学的重要课题之一。自从 Pecora 和 Carroll 的开创性工作^[1-3]以来,由于自身的理论价值和在保密通信、生命科学等领域的应用前景,混沌同步受到了研究人员的广泛关注,提出了一系列混沌同步问题,发展出各种同步方法,取得了丰富的成果^[4-16]。

连续时间混沌系统的同步研究中,通常假定可以对待测物理量进行连续时间测量,得到任意时刻的测量值^[17-27]。这一假定意味着采用模拟器件进行测量。模拟器件存在精度差、易受干扰、编程不便等问题,实践中逐渐被数字器件所代替。数字器件只能得到采样时刻的测量值,此时能否实现对连续时间混沌系统的某种同步,就成为一个必须研究的问题。

本文对上述问题进行了研究。从对连续时间混沌系统进行数字测量的角度,提出了连续时间混沌的采样同步问题,并进行了数学描述。其次借鉴控制理论的研究成果,采用观测器方法设计了 Lorenz 系统族^[28, 29]的采样同步系统。仅须测量 Lorenz 系统族的状态变量 x_1 ,就能在采样时刻实现同步。

2. 数字测量与采样同步

测量是混沌同步研究的重要环节。为实现混沌同步,需要测量驱动系统的若干物理量,并将测量结果作为反馈信号传送到响应系统。

测量同时又是混沌同步研究中被忽视的环节。一方面,文献中大量使用的微分方程模型意味着采用模拟器件进行测量;另一方面,目前测量越来越多地使用数字器件。相比模拟器件,数字测量器件存在精度高、不易被干扰、编程方便的优点。但数字测量无法得到待测物理量任意时刻的测量值。忽略量化误差,数字测量将图 1 中虚线所示的连续时间信号转化成实线所示的阶梯信号。在相邻两个采样时刻之间,数字测量输出的是上一采样时刻的测量值。

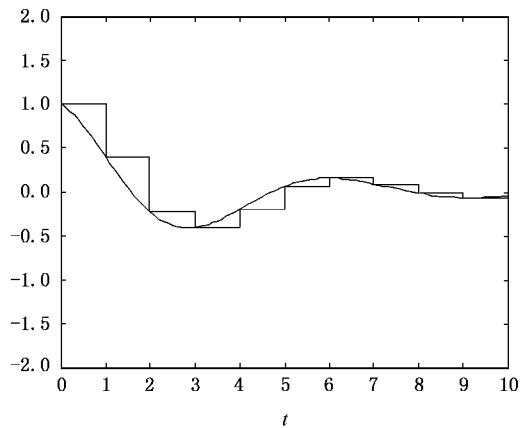


图 1 数字测量的工作原理

考虑对混沌系统的数字测量,测量结果送数字计算机处理。我们感兴趣的是能否仅使用采样时刻的测量值,设计计算机程序,使程序的输出在采样时刻和原混沌系统保持某种意义的同步?

记向量 x 的转置为 x' ,二阶范数为 $\|x\|$ 。上述问题可以描述为

对连续时间混沌系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

的某个或某些物理量

$$h = h(x) \quad (2)$$

进行数字测量,其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, m < n$. 数字测量的采样周期为 T . 记

$$x[k] = x(kT), y[k] = y(kT) \quad (3)$$

为采样时刻的状态值和输出值.

计算机可以依据采样时刻的信号值产生离散时间动力系统

$$x[k+1] = g(x[k], y[k], T) \quad (4a)$$

或

$$x[k+1] = g(x[k], y[k], T). \quad (4b)$$

定义 1 称离散时间动力系统(4a)或(4b)采样同步于连续时间混沌系统(1)如果对于某个 $D \leq R^n$ 有

$$x[0] - x[0] \in D \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x[k] - x[0]\| = 0. \quad (5)$$

如果 $D = R^n$ 则称为全局采样同步.

考虑到混沌系统无法解析求解

$$x[k+1] = x[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} f(x(\tau)) d\tau, \quad (6)$$

无法实现定义 1 的采样同步,于是引入

定义 2 称(4a)或(4b)实用采样同步于系统(1),如果对于某个 $D \leq R^n$ 和任意的 $d > 0$,存在 $T^* > 0$ 和 $k_0 \in N$,当 $T < T^*$,

$$x[0] - x[0] \in D \Rightarrow \|x[k] - x[0]\| \leq d, k \geq k_0. \quad (7)$$

如果 $D = R^n$ 则称为全局实用采样同步.

实用采样同步意味着 对于任意高的精度要求,都可以通过减小采样周期,将一段时间后的同步误差控制在精度要求以内 从而满足实际应用的需要.

采样同步隐含着对尽可能少的物理量进行测量. 如果对混沌所有的状态都进行测量,即

$$y[k] = x[k], \quad (8)$$

则(8)式显然是全局实用采样同步. 由于测量可能会引入扰动 而混沌对扰动敏感 对尽可能少的物理量进行测量是一个合理的要求.

采样同步与脉冲同步^[30,31]的区别在于,在采样同步中 驱动系统是一个连续时间系统 对应着真实的物理过程 而响应系统是一个离散时间动力系统,对应着计算机程序. 响应系统与驱动系统采样时刻的状态值保持同步,符合对混沌系统进行数字测量和计算机控制的实际. 而脉冲同步的驱动系统和响

应系统同是连续时间动力系统,响应系统在脉冲输入下与驱动系统在连续时间上同步.

3. 微分方程数值方法的误差

对于混沌系统(1)(6)式无法解析求解,只能用数值方法求近似解. 记

$$F_T^e(x) = x + \int_{kT}^{(k+1)T} f(x(\tau)) d\tau, \quad (9)$$

并设 $F_T^a(x)$ 是某种近似计算 $F_T^e(x)$ 的数值方法. 用 $F_T^a(x)$ 与 $F_T^e(x)$ 的差衡量数值方法 $F_T^a(x)$ 的精度. 例如 对于 Euler 法

$$F_T^E(x) = x + T f(x), \quad (10)$$

有 $\|F_T^e(x) - F_T^E(x)\| = O(T^2)$,而梯形法

$$F_T^{\text{tr}}(x) = x + \frac{T}{2}(f(x) + f(F_T^E(x))), \quad (11)$$

则有 $\|F_T^e(x) - F_T^{\text{tr}}(x)\| = O(T^3)$.

4. Lorenz 系统族的实用采样同步

混沌系统的采样同步问题可以作为控制理论中的非线性采样观测器设计问题. 下面的定理是这方面的最新成果.

定理 1^[32] 假定 $f(x)$ 二阶可导. 如果(H1)非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12)$$

的 Euler 近似离散时间模型

$$\begin{aligned} x[k+1] &= F_T^E(x[k]) = x[k] + T f(x[k]), \\ y[k] &= h(x[k]) \end{aligned} \quad (13)$$

的观测器

$$\hat{x}[k+1] = F_T^E(\hat{x}[k]) + K(\hat{x}[k], y[k], T) \quad (14)$$

存在关于观测器误差 $\tilde{x}[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ 的连续正定 Lyapunov 函数 $V(\tilde{x})$ 和正实数 $T_1^*, c_1, c_2, c_3, c_4$, 当 $T \in (0, T_1^*)$ 有

$$c_1 \|\tilde{x}[k]\|^2 \leq V(\tilde{x}[k]) \leq c_2 \|\tilde{x}[k]\|^2, \quad (15)$$

$$V(\tilde{x}[k+1]) - V(\tilde{x}[k]) \leq -c_3 \|\tilde{x}[k]\|^2 \quad (16)$$

$$|V(\tilde{x}_1) - V(\tilde{x}_2)| \leq c_4 \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \times (\|\tilde{x}_1\| + \|\tilde{x}_2\|). \quad (17)$$

(H2) 存在数值方法 F_T^a , 正数 $\delta_{\max}, T_2^* > 0$ 和整数 $m \geq 2$, 当 $T \in (0, T_2^*)$ 有

$$\|F_T^e(x[k]) - F_T^a(x[k])\| \leq T^m \delta_{\max}. \quad (18)$$

那么(C1)非线性系统(12)有实用采样观测器

$$\hat{x}[k+1] = F_T^a(\hat{x}[k]) + K(\hat{x}[k], y[k], T). \quad (19)$$

依据定理1,可以按照以下步骤设计 Lorenz 系统族的采样同步系统.

- 1)选择合适的物理量进行测量;
- 2)用 Euler 法近似离散化驱动系统的动力学方程,得到 Euler 近似模型;

3)为 Euler 近似模型设计一个满足(15)~(17)式的观测器;

4)选择一个合适精度的数值算法 F_T^a 替代观测器中的 F_T^E ,得到同步系统(19). F_T^a 精度越高,则同步精度越高.

Lorenz 系统族的动力学方程是

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) \\ (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 \\ x_1x_2 - \frac{\alpha + 8}{3}x_3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其中参数 $\alpha \in [0, 1]$. 当 α 取 0, 0.8, 1 时, 分别是

Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统. 选择系统(20)的状态 x_1 进行数字测量,并记 $C = (1 \ 0 \ 0)$, 则有

$$y[k] = Cx[k]. \quad (21)$$

记 $p = 25\alpha + 10$, $r = 28 - 35\alpha$, $b = (\alpha + 8)/3$, $s = 29\alpha - 1$, 用 Euler 法离散化(20)式得

$$\begin{aligned} & \dot{x}[k+1] \\ &= F_T^E(x[k]) \\ &= x[k] + Tf(x[k]) \\ &= \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} p(x_2[k] - x_1[k]) \\ rx_1[k] - x_1[k]x_3[k] + sx_2[k] \\ x_1[k]x_2[k] - bx_3[k] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_3 + T \begin{pmatrix} -p & p & 0 \\ r & s & -x_1[k] \\ 0 & x_1[k] & -b \end{pmatrix} \end{pmatrix} x[k]. \end{aligned} \quad (22)$$

取参数 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 则(22)式有观测器

$$\hat{x}[k+1] = (I_3 - KC)F_T^E(\hat{x}[k]) + Ky[k+1], \quad (23)$$

其中 I_3 是三阶单位矩阵, 而 $K = (1 \ k_1 \ k_2)$,

$$k_1 = \begin{cases} (\lambda_1 + s)p, & |x_1[k]| < 1, \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + s - b)p, & |x_1[k]| \geq 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$k_2 = \begin{cases} x_1[k]p, & |x_1[k]| < 1, \\ \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - b)b - \lambda_1\lambda_2 + (x_1[k])^2}{px_1[k]}, & |x_1[k]| \geq 1. \end{cases} \quad (25)$$

取 Lyapunov 函数

$$V(x[k], \hat{x}[k]) = \frac{1}{2}(\hat{x}[k] - x[k])(\hat{x}[k] - x[k]), \quad (26)$$

可以验证观测器(23)满足(15)~(17)式. (24)~(25)式是为了避免 k_1, k_2 绝对值过大.

最后,选择合适的数值方法 F_T^a 构成 Lorenz 系统族的实用采样同步系统

$$\hat{x}[k+1] = (I_3 - KC)F_T^a(\hat{x}[k]) + Ky[k+1]. \quad (27)$$

采样同步系统(27)中 $z[k] = x_1[k]$, 充分利用了测量得到的信息,只在 x_2 和 x_3 分量上存在同步误差.

5. 数值模拟

对于 $\alpha = 0$ 的 Lorenz 系统和 $\alpha = 1$ 的 Chen 系统进行数值模拟. 采样周期 $T = 0.01$, F_T^a 采用(11)式

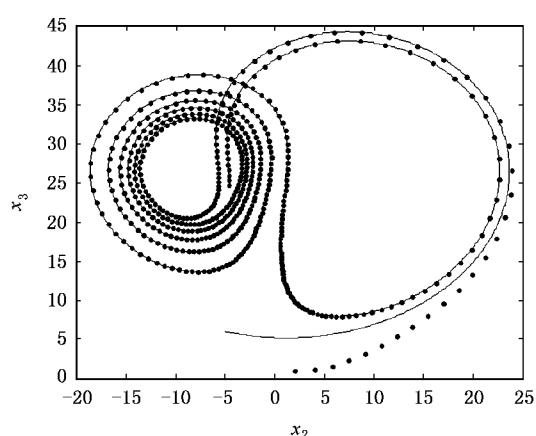


图 2 Lorenz 系统的采样同步

定义的梯形法,混沌系统初始状态(15 -5 6),同步系统初始状态(15 2 1). $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 20$. 数值模拟结果如图 2、图 3. 其中实线是混沌系统的状态,点是采样同步系统的输出. 从图中可以看出,

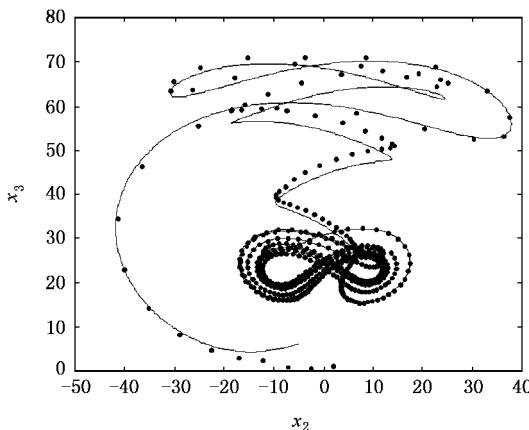


图3 Chen系统的采样同步

同步误差迅速衰减,同步系统的输出保持在连续时间混沌系统的附近。如果要改善同步系统(27)的性能,可以调整 λ_1, λ_2 的取值并选择更高精度的 F_T^a 。

6. 结论

本文提出了连续时间混沌系统的采样同步问题,并为Lorenz系统族设计了采样同步系统。通过选择合适的数值方法,可以将同步误差控制在指定的精度要求以内,从而满足实际应用的要求。数值模拟表明,该方法性能良好,可望应用于用计算机系统同步连续时间混沌的研究中。

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. A* **4** 2374
- [3] Pecora L M, Carroll T L 1990 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** 453
- [4] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [5] Lia T L, Huang N S 1997 *Phys. Lett. A* **234** 268
- [6] Alexander L F, Markov A Y 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 905
- [7] Wang C, Ge S S 2001 *Chaos, Solitons & Fractals* **12** 1199
- [8] Chen S H, Lü J H 1997 *Phys. Lett. A* **299** 353
- [9] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G et al 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
- [10] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [11] Wei R, Wang X Y 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 3298 (in Chinese) [魏荣、王行愚 2004 物理学报 **53** 3298]
- [12] Yu L H, Fang J C 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4012 (in Chinese) [于灵慧、房建成 2005 物理学报 **54** 4012]
- [13] Morgil Ö, Solak E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [14] Nijmeijer H, Mareels M Y 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 882
- [15] Grassi G, Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 1011
- [16] Guan XP, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276]
- [17] Yang X S 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 1919 (in Chinese) [杨晓松 2000 物理学报 **49** 1919]
- [18] Yang X S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 1159
- [19] Zhou P 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1108 (in Chinese) [周平 2003 物理学报 **52** 1108]
- [20] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Gu Q L 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 1305 (in Chinese) [高铁杠、陈增强、袁著祉、顾巧论 2004 物理学报 **53** 1305]
- [21] Chen Z S, Sun K H, Zhang T S 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese) [陈志盛、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
- [22] Min F H, Wang Z Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
- [23] Dong E Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4578 (in Chinese) [董恩增、陈增强、袁著祉 2005 物理学报 **54** 4578]
- [24] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 2421
- [25] Yao L N, Gao J F, Liao N H 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 35 (in Chinese) [姚利娜、高金峰、廖旋焕 2006 物理学报 **55** 35]
- [26] Yu D C, Xia L H, Wang D Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1454
- [27] Chen J, Zhang T P 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 3928 (in Chinese) [陈晶、张天平 2006 物理学报 **55** 3928]
- [28] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z et al 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [29] Lü J H, Chen G R, Zhang S C 2003 *J. Graduate School of the Chinese Academy Sciences* **20** 123 [吕金虎、陈关荣、张锁春 2003 中国科学院研究生院学报 **20** 123]
- [30] Liu F, Mu Z L, Qiu Z L 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 1198 (in Chinese) [刘锋、穆肇骊、邱祖廉 1999 物理学报 **48** 1198]
- [31] Yang L B, Yang T 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 33 (in Chinese) [杨林保、杨涛 2000 物理学报 **49** 33]
- [32] Jin H Y, Ji H B, Xi H S 2006 *The 25 th Chinese Control Conference* 205 (in Chinese) [金辉宇、季海波、奚宏生 2006 第 25 届中国控制会议论文集 205]



Research on sampled-data synchronization of Lorenz system families

Jin Hui-Yu Xi Hong-Sheng

(Department of Automation , University of Science and Technology of China , Hefei 200026 , China)

(Received 21 June 2006 ; revised manuscript received 16 September 2006)

Abstract

In this paper , sampled-data synchronization of continuous chaotic systems is proposed from the viewpoint of digital measurement of continuous chaotic systems. Based on the results of control theory , a sampled-data synchronization system of Lorenz system families is designed. The synchronization system can synchronize the driven system at sampling points by sampling only one state variable. Numerical simulations illustrated the effectiveness of the synchronization system.

Keywords : chaotic synchronization , Lorenz system families , sampled-data synchronization

PACC : 0545