

二维孔隙裂隙双重介质逾渗规律研究 *

冯增朝[†] 赵阳升 吕兆兴

(太原理工大学采矿工艺研究所, 太原 030024)
(2005 年 11 月 30 日收到 2006 年 4 月 26 日收到修改稿)

在孔隙介质逾渗理论的基础上, 将另外一个非常重要的渗透通道——裂隙引入到介质的逾渗研究中, 提出了更为普遍的孔隙裂隙双重介质的逾渗研究方法。通过对二维平面孔隙裂隙双重介质的数值计算, 得到了孔隙裂隙双重介质三个重要参数 孔隙率、裂隙分形维数、裂隙数量分布初值与逾渗概率的关系, 给出了孔隙裂隙双重介质逾渗阈值的数学表达式, 揭示了孔隙裂隙双重介质的逾渗规律。

关键词: 孔隙, 裂隙, 双重介质, 逾渗, 逾渗阈值

PACC: 4752, 0555, 6460A

1. 引言

孔隙裂隙双重介质是自然界中最为普遍的一类介质, 尤其是地质体。例如煤层、油气储层都属于孔隙裂隙双重介质。研究孔隙裂隙双重介质的渗透规律对于资源的开发具有重要的理论意义。

1957 年, Hammersley 研究流体在无序多孔介质中流动时提出了逾渗的概念^[1], 并建立了孔隙介质的逾渗理论。近年来, 逾渗理论及其应用研究比较活跃^[2-7]。但是, 目前逾渗理论的研究还仅局限于孔隙介质, 研究内容上忽略了一个主要的渗流通道——裂隙。因此, 孔隙介质的逾渗理论不能与地质体的渗流现象很好地符合。本文将裂隙引入到介质的逾渗研究中, 建立了孔隙裂隙双重介质的逾渗研究方法, 分析了孔隙裂隙双重介质二维的逾渗规律。

在孔隙介质的逾渗研究中, 孔隙被假设为各种形状, 例如三角形、正方形、六边形(蜂窝形)等等, 并建立了对应的网格。由于这些不同形状网格具有不同的邻近数, 因此, 它们的临界孔隙率也不尽相同^[8-11]。大量的计算表明, 正方形网格座逾渗的临界孔隙率为 $59.275 \pm 0.003\%$ 。本文仅研究二维平面模型正方形网格的逾渗规律, 对于其他形式的网格以及三维立体情况在以后的研究中再做讨论。

2. 孔隙裂隙双重介质的逾渗研究方法

在孔隙裂隙双重介质中, 裂隙是主要的渗流通道, 构成了介质中的空隙点, 裂隙的增加必然使正方形区域的空隙增多, 并和孔隙一起构成孔隙裂隙双重介质的渗流团。在无限尺度的网格中, 孔隙裂隙双重介质的临界逾渗概率定义为

$$P_c = \text{Sup}\{n, N_0, D : P_\infty(n, N_0, D) = 0\}. \quad (1)$$

(1) 式的数学意义在于 在无限尺度的网格中, 当孔隙与裂隙产生的等效孔隙率 n_e 小于临界孔隙率 n_c 时 双重介质的逾渗概率 $P_\infty(n, N_0, D) = 0$ 。 n 为孔隙裂隙双重介质的空隙率, 当等效孔隙率 n_e 等于临界孔隙率 n_c 时, 双重介质的逾渗概率 $P_\infty(n, N_0, D) = \infty$ 。

在孔隙裂隙双重介质中, 对于有限尺度的网格 ($L \times L$), 最大团包含空隙数的表达式

$$M(L) = f(n, N_0, D). \quad (2)$$

相应地, 孔隙裂隙双重介质的逾渗概率定义为

$$P_L(n, N_0, D) = M(n, N_0, D)/L^2, \quad (3)$$

该概率也等于空隙点属于最大连通团的概率。

在上述数学定义下, 给出孔隙裂隙双重介质临界渗透的研究方法:

1) 孔隙 在 $L \times L$ 的正方形网格中, 按照不同

* 国家自然科学基金(批准号 50404017)和国家自然科学基金重点项目(批准号 50534030)资助的课题。

† E-mail: zc-feng@163.com

的孔隙率,将孔隙随机分布在网格的格子上,凡被孔隙占据的格子,即设定为1,表示该格子为空隙。不含孔隙的格子,即认为是固体颗粒格子,即设定为0,表示该格子为实体。

2)裂隙 本文使用二维的裂隙迹线分形参数对裂隙进行描述^[12-14],采用二维裂隙迹线数量与方位随机分布的分形几何学研究方法,裂隙数量尺度服从分形关系式

$$M(\delta) = N_0 \cdot \delta^{-D}, \quad (4)$$

其中 $M(\delta)$ 为 δ 尺度对应的裂隙数量, N_0 为裂隙数量分布初值, D 为裂隙的分形维数。数值试验时按照给定的 N_0 与 D 数值,逐级增加 δ 的长度,生成各级尺度的裂隙,并按位置与方位随机地分布于上述网格中。当裂隙落入网格的某一格子中,其长度大于格子尺度的 $1/2$,即认为该格子为孔隙网格,记为 1。否则即为实体。与孔隙类似,按照裂隙分布分形规律,在网格中也生成了实的和空的网格分布。

3)将孔隙和裂隙在网格中的[0,1]分布按 $0+0=0, 0+1=1, 1+1=1$ 的准则叠加,则最后形成了孔隙裂隙双重介质,整个网格中的[0,1]分布,即空格与实体网格。图 1 为计算机模拟结果,空格 1 用黑色表示,实格 0 用白色表示。

编制计算机程序,寻找网格中各个连通团构成的格子号码及其数量,进而确定组成最大连通团的格子数量 $M(L)$,则各格子落入最大渗透团的概率为 $P(n, N_0, D) = M(L)/L^2$ 。改变介质中孔隙率 n 、裂隙分形维数 D 及初值 N_0 ,即可以获得对应的最大连通团出现时 $P(n, N_0, D)$ 的临界曲线,及其连通团的分布规律。

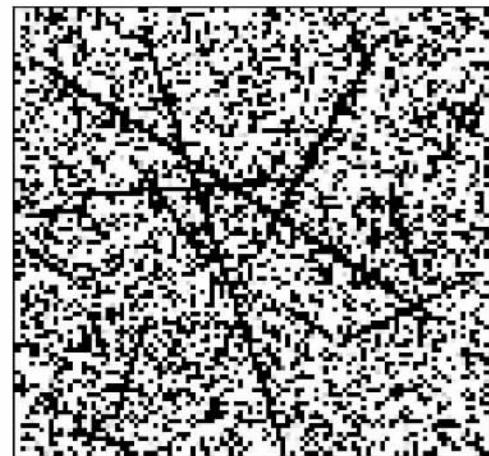


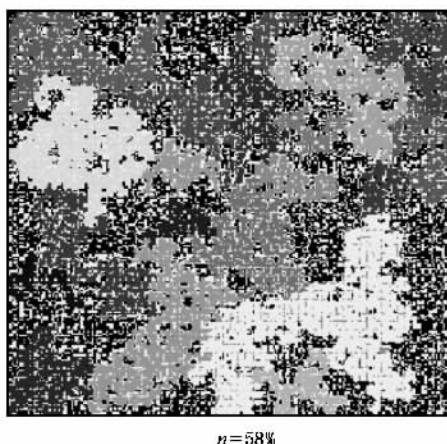
图 1 二维正方形网格的孔隙裂隙模型(空格 1 用黑色表示,实格 0 用白色表示)

3. 孔隙裂隙双重介质的逾渗现象

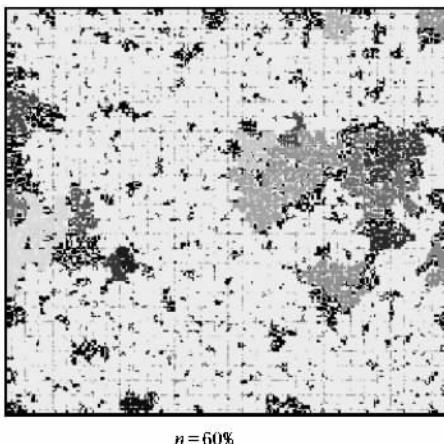
根据上述研究方法,在 $L \times L$ (本文中取 $L = 250$)的正方形网格上进行数值试验,分别研究孔隙介质(多孔介质)、裂隙介质、孔隙裂隙双重介质的逾渗现象及其规律。

3.1. 孔隙介质逾渗现象

若取裂隙分形初值 $N_0 = 0$,则孔隙裂隙双重介质中只有孔隙,没有裂隙,即该介质成为孔隙介质,分别计算孔隙率 $n = 58\%$ 以及 $n = 60\%$ 的逾渗模型,其连通团的分布如图 2 所示。可以看出,当孔隙率为 58% 时,正方形区域内没有连接边界的横跨团,最大连通团也仅限于区域的一部分,而当孔隙率达到 60% 时,最大团成为连接边界的跨越团,发生了逾渗。



$n = 58\%$



$n = 60\%$

图 2 孔隙介质的逾渗团分布($N_0 = 0$)

转变。大量的计算发现孔隙介质发生逾渗转变的临界孔隙率为 $n_c = 59.3\%$ 。

3.2. 裂隙介质逾渗现象

当介质中孔隙率 $n = 0$ 时, 对应的孔隙裂隙介质中没有孔隙, 只有裂隙, 则该介质成为裂隙介质, 取裂隙数量分布初值 $N_0 = e$ ($e = 2.71828$), 裂隙的分形维数分别为 1.6, 1.68 两种裂隙介质模型的逾

渗, 其连通团的分布如图 3 所示。可以看出, 由于 $N_0 = e$, 使得正方形区域内存在 3 条横跨边界的裂隙, 从而使得即使裂隙的分形维数较小时, 区域内也会出现跨越团。但是, 比较 $D = 1.6$ 与 $D = 1.68$ 两个逾渗图形可以看出, 当分形维数由 1.6 增加到 1.68 时, 最大连通团急剧增大, 并占据了区域的绝大部分面积。即对于 $N_0 = e$ 的裂隙介质, 发生逾渗转变的临界分形维数介于 1.6 到 1.68 之间。

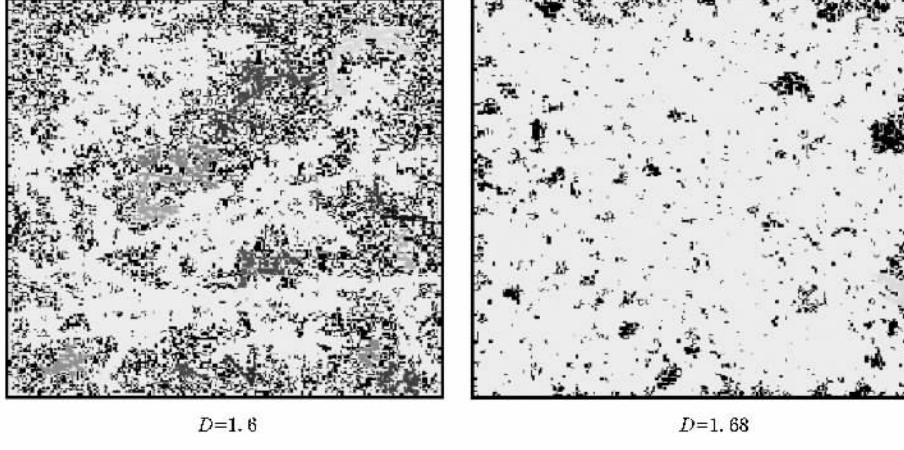


图 3 裂隙介质的逾渗团分布($n = 0, N_0 = e$)

3.3. 孔隙裂隙双重介质逾渗现象

若取孔隙率 $n = 30\%$, 裂隙分形规律的初值 $N_0 = e$, 裂隙分形维数 D 分别为 1.50, 1.60, 在该双重

介质内孔隙裂隙共存, 通过计算得到了它们的连通团分布图形(图 4)。由图可以看出, 当分形维数由 1.50 增大到 1.60 时, 最大连通团的大小发生跳跃性增长。

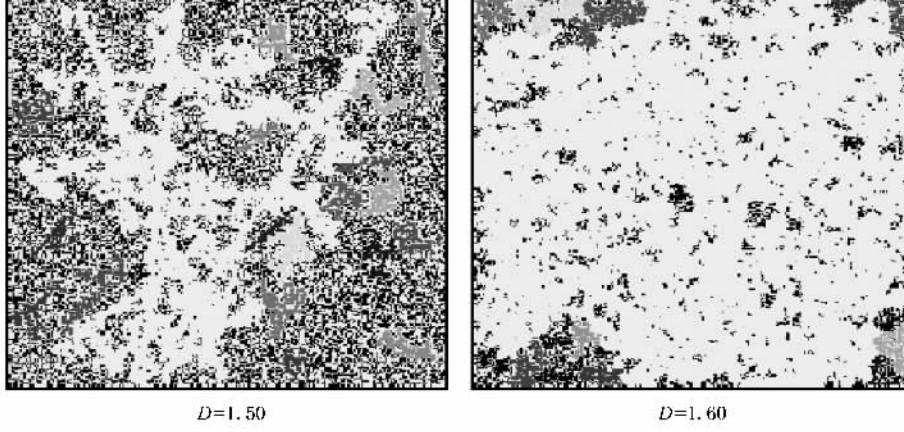


图 4 孔隙裂隙双重介质的逾渗团分布

因此, 对于孔隙裂隙双重介质, 当孔隙率等于 30%, 裂隙数量分布初值等于常数 e 时, 介质发生逾渗转变的裂隙临界分形维数介于 1.5 与 1.6 之间。

通过上述研究可以看出, 在逾渗现象中, 孔隙和裂隙是两个重要的影响因素, 当介质中包含裂隙时, 发生逾渗的临界孔隙率减小。反之, 当介质中孔隙率增加时, 又会降低发生逾渗的裂隙临界分形维数。

4. 孔隙裂隙双重介质逾渗规律

1) 在 250×250 的正方形网格中,令介质的孔隙率 $n = 0$,并令 N_0 分别等于 e^0, e^1, e^2, e^3, e^4 ($e = 2.71828$),计算双重介质的裂隙分形维数 D 所对应的逾渗概率,将计算结果绘制为图 5。从图 5 的曲线可以看出,在孔隙率等于零的条件下,对应不同的裂隙数量分布初值,双重介质的逾渗概率随裂隙分形维数的变化有临界分形维数存在。当裂隙分形维数 D 小于临界分形维数 D_c 时,逾渗概率趋于零;当裂隙分形维数 D 等于临界分形维数 D_c 时,逾渗概率发生跳跃;当裂隙分形维数 D 大于临界分形维数 D_c 时,逾渗概率迅速趋于 1。对 $N_0 = e^1—e^3$ 曲线发生跳跃的临界分形维数与裂隙数量分布初值进行拟合回归得到,当孔隙率 $n = 0$ 有

$$N_0 = 8194.4 \exp(-4.6493D_c), \quad (5)$$

相关系数 $r^2 = 0.995$ 。

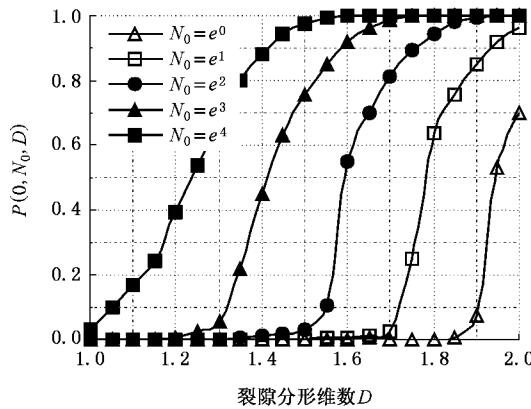


图 5 逾渗概率随裂隙分形维数 D 和初值 N_0 的变化曲线($n = 0$)

2) 如果视裂隙的分形维数 D 为常数,令裂隙分形维数 $D = 1$,并令 N_0 分别等于 $0.1, e^0, e^1, e^2, e^3, e^4$ ($e = 2.71828$),孔隙率 n 以 0.05 为步长,从 0.0 递增到 1.0,分别计算各自的逾渗概率,将计算结果绘制为图 6。从图中可以看出,当分形维数 $D = 1$ 时,逾渗概率随裂隙分形分布初值 N_0 的增加,其对应的临界孔隙率 n_c 逐渐减小,当 $N_0 \geq e^4$ 时,逾渗概率随孔隙率变化大致呈线性关系,不再存在临界点 n_c 。

将裂隙分形分布初值 N_0 与发生逾渗转变时的临界孔隙率进行回归分析,得到当裂隙分形维数 $D = 1$ 时的孔隙裂隙双重介质临界孔隙率 n_c 与裂隙

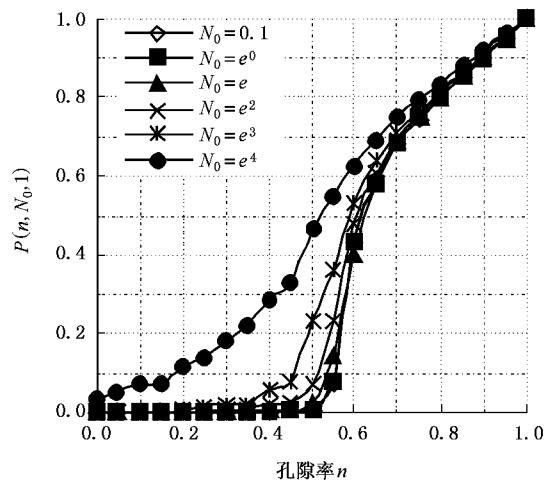


图 6 逾渗概率随孔隙率 n 及裂隙初值 N_0 的变化曲线($D = 1$)

分形分布初值 N_0 的关系为

$$\begin{aligned} n_c &= n_c^p - 0.0097N_0 \\ &= 0.59275 - 0.0097N_0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, n_c^p 为孔隙介质的临界孔隙率,取 0.59725, 相关系数 $r^2 = 0.9976$.

3) 若取裂隙分形规律的初值 $N_0 = e$, 对应于不同的孔隙率 n 及裂隙分形维数 D , 通过大量数值试验,可以给出逾渗概率分布曲线, 图 7(a)(b)。

由图 7(a)(b) 可知, 当孔隙率 n 小于 50% 时, 存在裂隙临界分形维数值 D_c , 且随着孔隙率的增加, 发生逾渗转变时的临界分形维数 D_c 逐渐减小。同样, 当裂隙分形维数 D 小于 1.6 时, 都存在临界孔隙率 n_c , 随着裂隙分形维数 D 增加, 临界孔隙率 n_c 由无裂隙存在时的 $n_c^p = 0.59725$ 降低到 $n_c = 0.001$ 。对数值试验数据回归分析可以得到

$$\begin{aligned} n_c &= n_c^p - 0.0002 \exp(4.6578D) \\ &= 0.59725 - 0.0002 \exp(4.6578D), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, n_c^p 为孔隙介质的临界孔隙率, 取 0.59725, 相关系数 $r^2 = 0.9916$.

5. 孔隙裂隙双重介质逾渗阈值

通过数值试验, 可以得到孔隙裂隙介质发生逾渗转变时的临界孔隙率 n_c 与临界分形维数 D_c 以及裂隙数量分布初值 N_0 组合, 构成了裂隙分形维数与孔隙率的 $D-n$ 平面上的临界曲线(图 8)。图 8 的物理意义为, 在给定裂隙数量分布初值 N_0 的条件下, 它所对应曲线以下的部分为不发生逾渗的孔隙

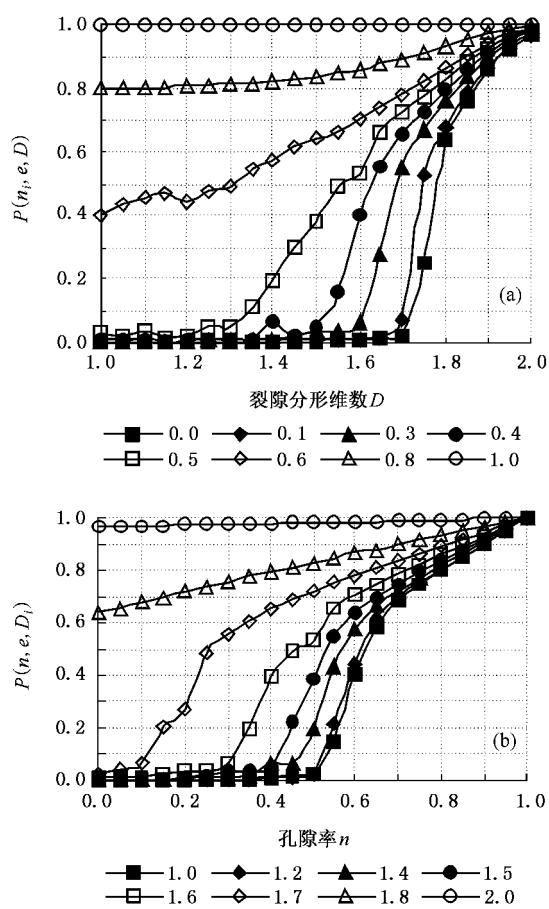


图 7 逾渗概率随裂隙分形维数 D 与孔隙率 n 的变化曲线 ($N_0 = e$)

率和裂隙分形维数区域, 曲线及其以上部分为发生逾渗的区域. 为了便于讨论任意给定裂隙数量分布初值 N_0 所对应的逾渗临界曲线, 构造等效孔隙率与裂隙数量分布初值的函数

$$\mathcal{J}(n, N_0) = \ln[(n_c^p - n)N_0]. \quad (8)$$

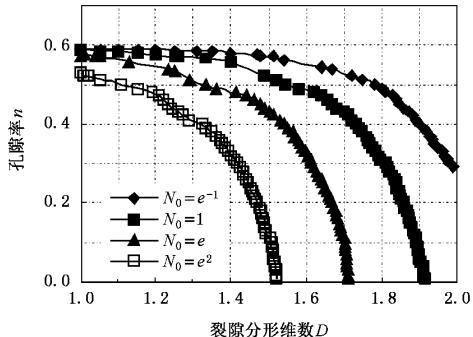


图 8 孔隙-裂隙双重介质在 $D-n$ 平面上的逾渗临界曲线

利用函数(8)式重新绘制图 8 曲线, 得到孔隙裂隙双重介质的逾渗临界曲线(图 9). 对图 9 中的曲线进

行拟合可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n, N_0, D) &= n_c^p - n_e \\ &= n_c^p - n - N_0 \exp(-9.8687) \\ &\quad \times \exp(4.7917D), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 n_c^p 为孔隙介质逾渗阈值, n_e 为孔隙裂隙介质的等效孔隙率, n 为孔隙裂隙介质的孔隙率, N_0 为孔隙裂隙介质的裂隙数量分布初值, D 为孔隙裂隙介质的裂隙分形维数.

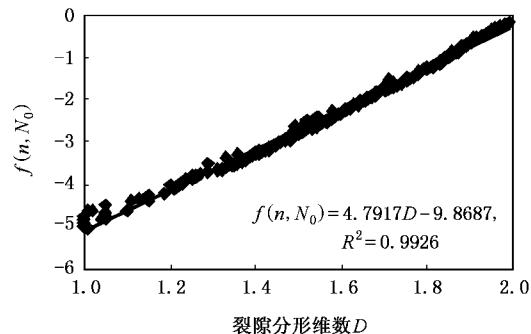


图 9 孔隙-裂隙双重介质的逾渗阈值曲线

(9)式为孔隙裂隙双重介质的逾渗阈值数学表达式. 由(9)式可以看出:

首先, 当 $\mathcal{J}(n, N_0, D) < 0$ 时孔隙裂隙双重介质内部没有跨越团, 介质不发生逾渗转变, 孔隙裂隙介质不可渗透; 反之, 当 $\mathcal{J}(n, N_0, D) \geq 0$ 时, 孔隙裂隙双重介质内部出现跨越团, 孔隙裂隙介质可以渗透.

其次, 在裂隙分形维数 D 与孔隙率 n 构成的 $D-n$ 平面内, 随着的 N_0 减小, 临界曲线逐渐变得平缓, 并趋向于 $n_c = 59.275 \pm 0.003\%$ 的直线; 当 $N_0 = 1, D = 1$ 时, 其对应的临界孔隙率 $n_c = 0.59$ 近似于孔隙介质的临界孔隙率. 说明, 当孔隙-裂隙介质中仅有一条裂隙时, 裂隙对介质的渗流概率没有根本性的影响.

6. 结 论

通过数值试验研究, 得出以下结论:

1. 孔隙裂隙双重介质是自然界中普遍的一类介质, 当其孔隙率、裂隙分形维数或裂隙数量分布初值逐渐由小到大增长时, 必然发生逾渗转变的自然现象.

2. 孔隙裂隙双重介质发生逾渗转变的逾渗阈值是孔隙率、裂隙分形维数与裂隙数量分布初值三因素的数学组合, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n, N_0, D) = & n_c^p - n - N_0 \exp(-9.8687) \\ & \times \exp(4.7917D). \end{aligned}$$

3. 当 $\mathcal{J}(n, N_0, D) < 0$ 时孔隙裂隙双重介质内

部没有跨越团, 介质不发生逾渗转变; 反之, 当 $\mathcal{J}(n, N_0, D) \geq 0$ 时, 孔隙裂隙双重介质内部出现跨越团, 孔隙裂隙双重介质发生逾渗转变.

- [1] Broadbent S R, Hammersley J M 1957 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** 629
- [2] Yang Z R 1996 *Fractal Physics* (Shanghai :Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House)(in Chinese) 杨展如 1996 分形物理学(上海 :上海科技教育出版社)
- [3] Golden K M, Ackley S F, Lytle V I 1998 *Science* **282** 2238
- [4] Vigolo B, Coulon C, Maugey M et al 2005 *Science* **309** 920
- [5] Yoshino T, Watter M J, Katsura T 2003 *Nature* **422** 154
- [6] Qi G J, Zhang C R, Cao Y B 2004 *Chinese Journal of Material Science and Engineering* **22** 123(in Chinese) 齐共金、张长瑞、曹英斌 2004 材料科学与工程学报 **22** 123]
- [7] Gong L, Tong P Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **54** 2757(in Chinese) 巩龙、董培庆 2003 物理学报 **54** 2757]
- [8] Stauffer, Aharong 1985 *Introduction to percolation theory* (London : Mid-County Press) 15

- [9] Jens Feder 1988 *Fractals* (New York :Plenum Press) 106
- [10] Grimmett G R 1999 *Percolation* (Berlin :Spring-Verlag)
- [11] Naeem Jan, Dietrich Stauffer, Amnon Aharony 1998 *Journal of Statistical Physics* **92** 325
- [12] Kang T H, Zhao Y S, Jin Z M 1995 *Journal of China Coal Society* **20** 393(in Chinese) 康天合、赵阳升、靳钟铭 1995 煤炭学报 **20** 393]
- [13] Feng Z C, Zhao Y S, Wen Z M 2005 *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* **24** 601(in Chinese) 冯增朝、赵阳升、文再明 2005 岩石力学与工程学报 **24** 601]
- [14] Feng Z C 2005 *Ph. D. Thesis* (Taiyuan :Taiyuan University of Technology)(in Chinese) 冯增朝 2005 博士学位论文(太原 太原理工大学)]

Study on percolation law of 2D porous and fractured double-medium^{*}

Feng Zeng-Chao Zhao Yang-Sheng Lü Zhao-Xing

(Mining Technology Institute , Taiyuan University of Technology , Taiyuan 030024 , China)

(Received 30 November 2005 ; revised manuscript received 26 April 2006)

Abstract

Based on percolation theory of porous medium, the fracture as a very important permeability channel is taken into account in the theoretical research on percolation of medium. The research method on percolation of more general porous and fractured double-medium is put forward. Through the numerical calculation on the pore and fracture in dome in 2D, the relation between percolation probability and important parameters such as porosity, fracture fractal dimension and initial value of fracture distribution are obtained. The mathematical formula on percolation threshold of porous and fractured double-medium is also obtained. The percolation law of pore and fracture is further shown.

Keywords : pore, fracture, double-medium, percolation, percolation threshold

PACC : 4752, 0555, 6460A

* Project supported by the Natural Science Foundation of China (Grant No. 50404017), and the State Key Program of National Natural Science of China (Grant No. 50534030).