第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3050-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.6,June,2007

微分方程的部分 Hamilton 化与积分*

张睿超† 王连海 岳成庆

(山东省计算中心,济南 250014)

(2006 年 6 月 16 日收到;2006 年 9 月 29 日收到修改稿)

将微分方程部分地表示为 Hamilton 系统的方程并写成逆变代数形式.用动力学代数建立方程的 Poisson 积分理论,并举例说明结果的应用.

关键词:微分方程,部分 Hamilton 化,逆变代数形式,Poisson 积分理论

PACC:0320

1. 引 言

力学是微分方程的起源之一,力学促进了微分方程的发展.在分析力学的发展过程中,为求解动力学方程形成了一整套独特的积分方法.有传统的方法,如 Hamilton 方程的正则变换、Poisson 方法、Hamilton-Jacobi 方法等;有近代的方法,如场方法[1,2]、对称性方法[3—10]等.这些分析力学的积分方法,在某种程度上可用来求解一般的微分方程.问题的关键在于首先要将微分方程力学化,即将微分方程表示为力学系统的方程,而后用分析力学的方法求积分.将微分方程在一定条件下化成 Lagrange 方程或 Hamilton 方程,已经有了一些重要结果[11].但是,能够 Lagrange 化或 Hamilton 化的方程毕竟很少.不过,大多数方程都可以部分 Lagrange 化或部分 Hamilton 化.能够部分 Hamilton 化的方程,借助动力学代数,可以建立 Poisson 方法而得到方程的积分[12—16].文献[16]研究了微分方程的部分 Hamilton 化,并用 Noether 理论研究了方程的积分.本文继续研究常微分方程的部分 Hamilton 化问题,即将微分方程表示为带非保守力的 Hamilton 系统;其次,将其表示为逆变代数形式;最后,建立其 Poisson 积分理论.

2. 微分方程的部分 Hamilton 化

研究 $2n$ 个一阶微分方程

$$\dot{x}_\mu = f_\mu(t,x_\nu),(\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{1}$$

将其两端乘以

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

并对 ν 求和,得

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu}\dot{x}_\nu = F_\mu(t,x), \tag{3}$$

其中

$$F_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu} f_\nu, \tag{4}$$

如果函数 F_μ 满足

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu} \tag{5}$$

则方程(3)是自伴随的.此时方程(3)可 Hamilton 化为[11]

$$\omega_{\mu\nu}\dot{x}_\nu = \frac{\partial H}{\partial x_\mu}, \tag{6}$$

其中 H 为 Hamilton 函数

$$H = \sum_{\mu}^{2n} x_\mu \int_0^1 \mathrm{d}\tau F_\mu(t,\tau x_\nu). \tag{7}$$

如果函数 F_μ 不满足(5)式,可令

$$q_s = x_s, p_s = x_{n+s},(s = 1,\cdots,n), \tag{8}$$

则方程(1)可表为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s},$$
$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s(t,q,p), \tag{9}$$

其中 Hamilton 函数为

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)资助的课题.

† E-mail:zhangrch@keylab.net

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s \int_0^1 f_s(t, q, \tau p) \mathrm{d}\tau, \tag{10}$$

而广义力 Q_s 为[16]

$$Q_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} + f_{n+s}(t, q, p). \tag{11}$$

方程(1)表示为力学系统的方程(9)之后，分析力学的方法就可用来求方程的积分. 文献[16]用 Noether 理论研究了方程(9)的积分. 下面通过动力学代数建立方程(9)的 Poisson 积分理论.

3. 方程的逆变代数形式

现将方程(9)表示为逆变代数形式，令

$$Q_s = -\Omega_{sk} \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

由此式可解出 Ω_{sk}.

$$(\Omega_{sk}) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Omega_{nn} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

并令

$$a^{\mu} = \begin{cases} q_{\mu}, & (\mu = 1, \cdots, n) \\ p_{\mu-n}, & (\mu = n+1, \cdots, 2n) \end{cases} \tag{13}$$

则方程(9)表示为逆变代数形式[11]

$$\dot{a}^{\mu} - S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = 0, \tag{14}$$

其中

$$S^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} + T^{\mu\nu},$$

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & (-\Omega_{kk})_{n\times n} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

定义积

$$\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \triangleq A \circ H, \tag{16}$$

则方程(14) 具有 Lie 容许代数结构[12].

4. Poisson 积分理论

对方程(14)，经典 Poisson 理论可做如下推广. 有

命题 1　$I(a^{\mu}, t) = \mathrm{const}$. 是方程(14)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H = 0. \tag{17}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H.$$

命题 1 得证，(17)式称为广义 Poisson 条件.

命题 2　Hamilton 函数 H 是方程(14)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial} + Q_s \dot{q}_s = 0. \tag{18}$$

证明：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + I \circ H = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} Q_s \dot{q}_s.$$

命题 2 得证.

命题 3　如果 I 是方程(14)包含时间 t 的第一积分，而 $S^{\mu\nu}$ 和 H 都不含 t，则 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是方程的积分.

证明：

因 $\frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H = 0$，对 t 求偏导数得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \\ &\quad + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} \frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial I}{\partial t} \circ H, \end{aligned}$$

故 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是方程的积分.

命题 4　如果 I 是方程(14)包含 a^{ζ} 的第一积分，而 $S^{\mu\nu}$ 和 H 都不含 a^{ζ}，则 $\frac{\partial I}{\partial a^{\zeta}}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\zeta 2}}, \cdots$ 都是方程的积分.

命题四的证明类似于命题三.

5. 算　例

为说明上述结果，研究著名 Hojman-Urrutia 方程

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \ddot{y} + y = 0, \tag{19}$$

文献[11]指出，它不能 Hamilton 化.

令

$$q_1 = x, q_2 = y, \tag{20}$$

则方程(19)可部分 Hamilton 化为

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} q_2^2,$$

$$p_1 = \dot{q}_1, p_2 = \dot{q}_2,$$

$$Q_1 = -p_2, Q_2 = 0, \tag{21}$$

以及 $a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = p_1, a^4 = p_2$，则

$$(S^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -a^4/a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

此时广义 Poisson 条件(17)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial I}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial I}{\partial a^3}(-a^4) + \frac{\partial I}{\partial a^4}(-a^2) = 0, \tag{23}$$

可由(23)式解出如下初积分：

$$I_1 = a^2\cos t - a^4\sin t = C_1, \tag{24}$$

$$I_2 = (a^2 + a^3)[a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t] = C_2, \tag{25}$$

由命题 3，利用积分 I_1 可生成积分

$$I_3 = \frac{\partial I_1}{\partial t} = -a^2\sin t - a^4\cos t = C_3, \tag{26}$$

由命题 4，利用积分 I_2 可生成积分

$$I_4 = \frac{\partial I_2}{\partial a^1} = a^2 + a^3 = C_4. \tag{27}$$

由积分(24)—(27)可求得方程(19)的通解为

$$a^1 = -C_1\sin t - C_3\cos t + C_4 t + C_2/C_4,$$
$$a^2 = C_1\cos t - C_3\sin t. \tag{28}$$

6. 结 论

对上述例子用微分方程理论不难求解.本文的基本思想是用力学方法解数学问题，将微分方程部分地化为 Hamilton 系统的方程并用分析力学的 Poisson 积分方法，来求方程的积分.本文的方法对一大类微分方程都适用，这种方法不仅赋予了方程的力学意义，而且可求积分.如能找到部分积分，则可降阶方程；如能找到全部积分，就找到了方程的解.

[1] Vujanović B 1984 *Int. J. Non-Linear Mech.* **19** 383

[2] Mei F X 1989 *Acta Mech. Sin.* **5** 200

[3] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[4] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[5] Qiao Y F 2002 *Chin. Phys.* **10** 988

[6] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 841

[7] Fu J L, Chen L Q, Xie F P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1611

[8] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[9] Wu H B 2005 *Chin Phys.* **14** 1999

[10] Mei F X, Xu X J 2005 *Chin. Phys.* **14** 449

[11] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅰ (New York: Springer-Verlag)

[12] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[13] Mei F X, Zhang Y F, Shi R C 1999 *Acta Mech.* **137**(3–4) 255

[14] Mei F X 2000 *Int. J. Non-linear Mech.* **35** 229

[15] Mei F X 2000 *ASME Appl Mech Rev* **53** 283

[16] Ge W K, Mei F X 2001 *Acta Armamentarii* **22** 241 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2001 兵工学报 22 241]

Partially Hamiltonization and integration of differential equations*

Zhang Rui-Chao† Wang Lian-Hai Yue Cheng-Qing

(*Shandong Computer Science Center*, *Jinan* 250014, *China*)

(Received 16 June 2006; revised manuscript received 29 September 2006)

Abstract

The differential equations are expressed partially by the equations of Hamilton system and then they can be written in the contravariant algebraic form. The Poisson integration theory of the equations is presented and an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: differential equation, partially Hamiltonization, contravariant algebraic form, Poisson integration theory

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021).

† E-mail: zhangrch@keylab.net