

量子力学中的时间^{*}

王智勇[†] 熊彩东

(电子科技大学物理电子学院, 成都 610054)
(2006 年 9 月 18 日收到, 2006 年 10 月 1 日收到修改稿)

研究量子力学中的时间问题, 既存在理论价值也有实用价值. 由于时间在传统量子力学理论中扮演一个参数而不是力学量算符的角色, 这使得人们在研究某个物理过程的时间问题时, 总要面临如何构造时间算符和计算平均时间的问题. 在本文中, 我们将系统地给出构造时间算符和求时间的量子力学平均的一般方法.

关键词: 时间算符, 平均时间, 自共轭性, 能量平移

PACC: 0365B, 0365C

1. 引言

传统量子力学要求代表可观察量的力学量算符是自共轭的, 而按照 W. Pauli 的论证^[1-4], 只要哈密顿量的谱存在下限, 与哈密顿量正则共轭的时间算符就不可能是自共轭的, 于是他得出结论说不存在与可观察量相对应的时间算符. 因此, 在传统的量子力学理论框架下, 不存在与时间相对应的力学量算符, 也无法定义平均时间. 然而, 有足够多的事实表明时间是一个可观察量, 例如某个事件的发生时刻, 粒子的衰变周期, 物体的运行时间等等, 是可以利用钟表进行测量的. 因此在量子力学中应该存在与时间相对应的力学量算符. 摆脱这种两难困境的一个方法是求助于“正算子取值测度理论”(简记 POVM)^[3-8], 代表量子力学中的可观察量算符推广到极大对称算符, 而自共轭算符只是其中的特例. 以这种方式, 保留了时间算符与哈密顿算符构成共轭对的要求, 但放弃了时间算符的自共轭要求.

研究量子力学中的时间问题, 既具有理论意义也存在实用价值. 例如隧道结器件的高频特性, 激光照射下隧道结中各种与时间有关的现象, 电子借助隧穿从金属表面发射的动力学过程, 以及在超晶格结构中的共振隧穿等, 都涉及时间问题^[9-13]. 特别是近年来, 随着纳米电子学这一高新科技的兴起, 使得实验上更精确地测量量子力学时间的可能性大大增

加. 与之相应地, 理论上对时间的研究也十分活跃. 这些年来, 人们在隧穿时间(tunneling time)到达时间(arrival time)和穿越时间(traversal time)等方面展开了大量的研究^[14-26].

由于时间在传统量子力学理论中扮演一个参数而不是力学量算符的角色, 这使得人们不能在一个现成的理论框架中展开对时间的研究, 而是每次需要考虑如何构造时间算符计算平均时间的问题. 在本文中, 我们将系统地给出构造时间算符和求时间的量子力学平均的一般方法. 本文采用自然单位制(即设 Planck 常数和光速等于 1: $\hbar = c = 1$).

2. 依附于动力学变量的时间算符

我们知道, 由于时间的特殊性, 如何理解时能不确定关系是一个争议颇多的话题. 然而, 时能不确定关系的 Mandelstam-Tamm 描述^[27]如今却被广泛接受. 具体地讲, 设 $\hat{M}$ 是一个不显含时间 t 的非稳定变量, 在 Heisenberg 表象中它满足 Heisenberg 运动方程

$$i d\hat{M}/dt = [\hat{M}, \hat{H}], \quad (1)$$

假定 $d\hat{M}/dt \neq 0$, 于是有逆 $(d\hat{M}/dt)^{-1} = i([\hat{M}, \hat{H}])^{-1}$. 令 $\hat{M}$ 表示算符 $\hat{M}$ 的量子力学平均(依此类推), 则 $\hat{M}$ 的偏差由以下定义给出(依此类推):

$$\Delta M = \sqrt{(\hat{M} - \hat{M})^2}, \quad (2)$$

在自然单位制 $\hbar = c = 1$ 下, Mandelstam-Tamm 的时能不确定关系为 $\Delta T \Delta H \geq 1/2$, 其中

* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050614022)资助的课题.

[†] E-mail: zywang@uestc.edu.cn

$$\Delta T = \Delta \hat{M} / |d\hat{M}/dt| . \tag{3}$$

因此,在这种描述中,时间的偏差 ΔT 对应动力学变量的某个特征时间.在这种思路下,如果 $[(d\hat{M}/dt)^{-1}, \hat{H}] = 0$, 即 $[(\hat{M}, \hat{H})]^{-1}, \hat{H}] = 0$, 那么我们可以引入以下依附于动力学变量 $\hat{M}$ 的时间算符

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -[\hat{M}(d\hat{M}/dt)^{-1} + (d\hat{M}/dt)^{-1}\hat{M}]/2 \\ &= -\{[\hat{M}(\hat{M}, \hat{H})]^{-1} + [(\hat{M}, \hat{H})]^{-1}\hat{M}\}/2. \end{aligned} \tag{4}$$

此时不难验证 $[\hat{H}, \hat{T}] = i$, 即 $\hat{T}$ 和 $\hat{H}$ 构成正则共轭对.当所考虑问题的哈密顿量 $\hat{H}$ 的谱存在下限时, 满足(4)式的时间算符 $\hat{T}$ 不是自共轭的.然而,按照 POVM^[3-8], 它可以描述可观察量.

考虑一个物理实例:假定在 $(1+1)$ 维时空 (t, x) 中,一个质量为 m 动量为 $\hat{p} = -i\partial/\partial x$ 的自由运动粒子,其非相对论的哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$. 假定粒子所处空间位置坐标为 x , 考察它到达坐标原点 $x_0 = 0$ 时的时间.此时,我们取力学量算符 $\hat{M}$ 为位置算符,即令 $\hat{M} = \hat{x}$, 则利用方程(4)和 $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ 可以得到非自共轭的时间算符

$$\hat{T} = -m(\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1})/2, \tag{5}$$

它正是已经被人们广泛研究过的自由运动到达时间算符^[3-8, 19, 26].

此外,还可以直接利用 Mandelstam-Tamm 对时能不确定关系的描述,来引入自共轭的时间算符.即假定由方程(3)给出的时间偏差 ΔT 满足量子力学中力学量偏差的定义(2),于是就可以利用下式

$$\Delta T = \sqrt{(\hat{T} - \langle \hat{T} \rangle)^2} \tag{6}$$

来引入时间算符

$$\hat{T} = -\hat{M}/d\hat{M}/dt. \tag{7}$$

由于 $\hat{M}$ 和 $\hat{H}$ 都是自共轭算符,而量子力学平均 $d\hat{M}/dt = -i[\hat{M}, \hat{H}]$ 是一个实的 c 数,因此由方程(7)给出的时间算符是自共轭的.然而作为代价,可以证明此时的 $\hat{T}$ 和 $\hat{H}$ 之间的正则对易关系一般地只在量子力学平均的意义上成立:

$$[\hat{H}, \hat{T}] = i, \tag{8}$$

这类似于在 Lorentz 规范下对电磁场进行量子化时的 Gupta-Bleuler 描述^[28],在那里假定 Lorentz 规范条件在量子力学平均的意义上成立: $\partial_\mu A^\mu = \alpha(A^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3)$ 是电磁四势).

考虑一个物理实例:考虑粒子在恒定势场中的运动时间(自由落体运动时间)^[3, 29],此时的哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + mg\hat{q}$, 其中 $\hat{q}$ 表示不显含时间的位置算符,即它满足 $\partial\hat{q}/\partial t = 0$ 和 $[\hat{q}, \hat{p}] = i$, 于是有

$$d\hat{p}/dt = -i[\hat{P}, \hat{H}] = -i - img = -mg. \tag{9}$$

选择 $\hat{M} = \hat{p}$ 作为动力学变量,根据方程(7)和(9)可以得到以下时间算符

$$\hat{T} = -\hat{M}/d\hat{M}/dt = \hat{p}/mg, \tag{10}$$

它描述粒子从动量为 p 运动到动量为零时的运动时间^[3, 29].不难验证

$$[\hat{H}, \hat{T}] = [\hat{H}, \hat{T}] = i, \tag{11}$$

即 $\hat{T}$ 和 $\hat{H}$ 之间的正则对易关系不但在量子力学平均的意义上成立,而且还在通常的意义上成立.因此该例子中的时间算符既是自共轭算符,又跟哈密顿量构成共轭对.但这里并不与 Pauli 关于时间算符的存在定理相矛盾,因为此时哈密顿量的谱没有下限^[3, 29].

3. 通过量子化时间的经典表达式获得时间算符

引入时间算符的一个自然方法是利用通常的量子化手续.为方便起见,我们直接用实例来说明.考虑 $(1+1)$ 维时空中自由运动粒子的到达时间.具有空间位置 x 、运动速度为 v 的匀速运动粒子,到达位置 $x_0 = 0$ 时的时间,其经典表达式为 $t = -x/v$.在非相对论理论中,粒子静止质量为 m 时则动量为 $p = mv \neq 0$, 因此 $t = -mx/p$.对时间的经典表达式 $t = -mx/p$ 进行量子化,要求我们把表达式中的力学量换成算符,并且把算符的排序对称化,由此得到非相对论自由运动到达时间算符为 $(\hat{p} = -i\partial/\partial x)$

$$\hat{T}_{\text{non}} = -m(\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1})/2. \tag{12}$$

它即是前面的已经提到过的(5)式.

下面进一步地引入相对论自由运动到达时间算符.在自然单位制下($\hbar = c = 1$),上述自由运动过程的相对论性到达时间的经典表达式 $t = -x/v = -x(E/p)$ 其中 E 是满足关系 $E^2 = p^2 + m^2$ 的粒子能量.量子化经典表达式 $t = -x/v = -x(E/p)$ 可以得到相对论到达时间算符为(由于能量算符与动量算符对易,完全的对称化不必要)

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -(1/4)[\hat{H}(\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1}) \\ &\quad + (\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1})\hat{H}]. \end{aligned} \tag{13}$$

在动量表象下哈密顿量记为 H , 上式变成

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -\frac{i}{4}\left[H\left(\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p}\right)H\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

这里假定 $p \neq 0$, 即 $E^2 \neq m^2$. 作为例子, 考虑自旋为 $1/2$ 的自由运动粒子, 此时将哈密顿量算符为 $\hat{H} = \alpha_1 \hat{p} + \beta m$ (其中 α_1 和 β 是 Dirac 矩阵, 满足 $\alpha_1^2 = \beta^2 = 1$ 和 $\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1 = 0$) 代入方程 (13), 可以得到

$$\hat{T}_{\text{Dirac}}(x, \hat{p}) = -\alpha_1 \hat{x} - \beta \hat{\tau}, \quad (15)$$

其中

$$-\hat{\tau} = \hat{T}_{\text{non}} = -m(\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1})/2 \quad (16)$$

是固有到达时间算符. 事实上, 根据相对论到达时间的经典力学表达式 $t = -x E/p$ 可以得到 $t^2 - x^2 = (\pm x m/p)^2 = \tau^2$, 其中非相对论到达时间 $\pm x m/p$, 即是固有到达时间. 将它量子化之后, 即得到非相对论到达时间算符, 也即是固有到达时间算符. 不难检验对易关系 $[\hat{T}_{\text{Dirac}}, \hat{H}] = -i$.

4. 时间算符作为能量平移生成元的限制

进入可观察量的是能量的差值而不是能量的绝对值, 从而物理系统的描述规律不依赖于零能参考点的选择. 考虑以下哈密顿算符的本征方程:

$$\hat{H}(0)|E\rangle = E|E\rangle \quad (E \in [0, +\infty)), \quad (17)$$

令 $\mathcal{R}$ 表示实数集合, 又称为“整个实线”(full line). 引入 c 数的能量参数 $e \in \mathcal{R}$, 它有着能量的量纲且不显含时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$. $\partial e / \partial x^\mu = \alpha_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). 利用能量平移算符 $\hat{V}(e, 0) = \exp(i e \hat{S})$ 作以下酉变换:

$$|E\rangle = |E, 0\rangle \rightarrow |E, e\rangle \equiv \exp(i e \hat{S})|E, 0\rangle \quad (e \in \mathcal{R}). \quad (18)$$

其中 $\hat{S}$ 是 $\hat{V}(e, 0)$ 的生成元且满足对易关系 $[\hat{H}(0), \hat{S}] = -i$, 由此可以得到由对易关系 $[\hat{H}(0), \exp(i e \hat{S})] = e \exp(i e \hat{S})$, 于是有

$$\hat{H}(0)|E, e\rangle = (E + e)|E, e\rangle \quad (E \in [0, +\infty)). \quad (19)$$

即新的态 $|E, e\rangle$ 仍然是哈密顿量 $\hat{H}(0)$ 的本征态, 且本征值为 $(E + e)$. 对比方程 (19) 和 (17) 有 $|E, e\rangle = |E + e, 0\rangle$, 于是方程 (19) 可以重新写成

$$\hat{H}(0)|E + e, 0\rangle = (E + e)|E + e, 0\rangle, \quad ((E + e) \in [e, +\infty)). \quad (20)$$

另一方面, 变换方程 (18) 的一个等价描述是, 态矢 $|E, 0\rangle$ 保持不变, 而哈密顿算符按以下方式变换:

$$\begin{aligned} \hat{H}(0) &\rightarrow \hat{H}(e) = \exp(-i e \hat{S}) \hat{H}(0) \exp(i e \hat{S}) \\ &= \hat{H}(0) + e \quad (e \in \mathcal{R}). \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $[\hat{S}, \hat{S}] = 0$, 生成元 $\hat{S}$ 保持不变: $\hat{S}(0) \rightarrow \hat{S}(e) = \hat{S}(0)$, 于是

$$[\hat{H}(0), \hat{S}] = [\hat{H}(e), \hat{S}] = -i. \quad (22)$$

此时方程 (19) 或 (20) 变成

$$[\hat{H}(0) + e]|E, 0\rangle = (E + e)|E, 0\rangle, \quad (E \in [0, +\infty)). \quad (23)$$

对比方程 (23) 和 (17), 可以看到, 变换 (18) 或 (21) 式等效于把哈密顿量为 $\hat{H}(0)$ 的系统放进一个势能为 e 的均匀恒定势场中, 使得系统新的哈密顿量为 $\hat{H}(e) = \hat{H}(0) + e$. 换句话说, 从方程 (17) 到 (23) 的变换, 相当于把系统的零能参考点从 0 变换到 e , 显然方程 (17) 和 (23) 是完全等价的, 这是零能参考点的选择无关性的一个体现.

一方面, 正如方程 (19) 或 (20) 所体现的, 对于所有可能的 $e \in \mathcal{R}$, $\hat{H}(0)$ 的所有可能的本征态 $|E, e\rangle = |E + e, 0\rangle$ 张成整个 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \bigcup_{e \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_e$; 另一方面, 一旦零能参考点 e 被给定, 体系的 Hilbert 空间为 $\mathcal{H}_e = \{|E, e\rangle\}$, 此时哈密顿量 $\hat{H}(e) = \hat{H}(0) + e$ 的谱存在下限 (即 $(E + e) \in [e, +\infty)$). 因此, 按照变换 (18) 式产生的, $\hat{H}(0)$ 的所有可能的本征态中, 仅仅只有一部分代表系统的物理态. 例如当零能参考点取为 e 时, 这些物理态张成 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_e = \{|E, e\rangle\}$ 而 $\hat{H}(0)$ 的其余本征态属于非物理态, 它们属于 Hilbert 空间 $(\mathcal{H} - \mathcal{H}_e)$, 并且仅仅在数学的意义上成立 (数学上, 哈密顿量中包含的动量和空间坐标可以是任意复数, 使得它的谱在数学上没有下限). 非物理态的存在不会带来任何问题: 后面我们将会证明, 物理态和非物理态之间的跃迁概率恒为零.

由于能量平移算符 $\hat{V}(e, 0) = \exp(i e \hat{S})$ 代表一种对称变换, 必须是酉算符, 于是能量平移算符的生成元 $\hat{S}$ 是自共轭的, 这意味着 $\hat{S}$ 的定义域 (记做 $\mathcal{D}(\hat{S})$) 必须是 $\mathcal{H}$ 上的稠密域. 为方便计, 记做 $\mathcal{D}(\hat{S}) = \mathcal{H} = \bigcup_{e \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_e$. 假定系统的零能参考点已经选择为 $e \in \mathcal{R}$, 从而在物理上系统的 Hilbert 空间是 $\mathcal{H}_e = \{|E, e\rangle\}$. 现在考虑 $\hat{S}$ 在 $\mathcal{H}_e = \{|E, e\rangle\}$ 上的限制 (记做 $\hat{T}$). 首先, 由方程 (22) 可得

$$[\hat{H}(0), \hat{T}] = [\hat{H}(e), \hat{T}] = -i. \quad (24)$$

此时 $\mathcal{D}(\hat{H}(0)) = \mathcal{D}(\hat{T}) = \mathcal{H}_e$. 上式意味着 $\hat{T}$ 代表系统的时间算符. 因此, 时间算符 $\hat{T}$ 对应能量平移生成元 $\hat{S}$ 在系统的 Hilbert 空间上的限制. 由 $\hat{S}(e) = \hat{S}(0)$ 可以得到 $\hat{T}(e) = \hat{T}(0)$, 即它们跟零能参考点的选择无关. 如果在每个给定的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_e$ 上,

哈密顿量的谱总是存在下限,那么时间算符 $\hat{T}$ 不是自共轲的(当然 $\hat{T}$ 在 $\mathcal{H} = \bigcup_{e \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_e$ 上的 Naimark 膨胀 $\hat{S}$ 总是自共轲的). 能量平移算符 $\hat{V}(e, 0) = \exp(i e \hat{S})$ 在 $\mathcal{H}_e$ 上的限制,即 $\exp(i e \hat{T})$,不再是一个酉算符,不能描述一个物理变换,从而 Pauli 关于时间算符的存在性定理在这里不再适用. 另一方面,尽管时间算符 $\hat{T}$ 不是自共轲的,利用 POVM 理论可以表明这样的时间算符仍然描述可观察量(例如可以参考文献 [19]).

最后,让我们证明物理态和非物理态之间的跃迁概率恒为零. 为方便计,令 $\mathcal{H}_0 = \{ |E, 0\rangle \}$ 代表系统的 Hilbert 空间(即零能参考点取作 $e = 0$). 假定系统哈密顿算符的物理本征态满足以下正交归一和完备性关系

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} dE |E, 0\rangle \langle E, 0| = 1, & E, E' \in [0, +\infty). \\ \langle E, 0 | E', 0 \rangle = \delta(E - E') \end{cases} \quad (25)$$

令 $C(E', E, e) \equiv \langle E', 0 | E, e \rangle$, 其中 $|E, e\rangle$ 可由变换 $|E, 0\rangle \rightarrow |E, e\rangle = \exp(i e \hat{T}) |E, 0\rangle$ 得到($e \in \mathcal{R}$). 由于 $\exp(i e \hat{T})$ 不是一个酉算符,方程(25)对 $|E, e\rangle$ 不一定适用. 利用方程(25)可以证明

$$(E + e) C(E', E, e) = E' C(E', E, e) \quad (e \in \mathcal{R}). \quad (26)$$

由方程(17)–(20)和(26)可得

1) 若 $(E + e) \in [0, +\infty)$, 则 $|E, e\rangle = |E + e, 0\rangle \in \mathcal{H}_0 = \{ |E, 0\rangle \}$, 即 $|E, e\rangle$ 也是系统的一个物理态矢. 由(25)和(26)我们有 $C(E', E, e) = \langle E', 0 | E, e \rangle = \delta(E' - E - e)$.

2) 若 $(E + e) \notin [0, +\infty)$, 则 $E + e \neq E'$, 此时 $|E, e\rangle$ 不再是系统的一个物理态: $|E, e\rangle = |E + e, 0\rangle \notin \mathcal{H}_0 = \{ |E, 0\rangle \}$, 此时由(26)式得 $C(E', E, e) = \langle E', 0 | E, e \rangle \equiv 0$, 这意味着物理态 $|E, 0\rangle$ 和非物理态 $|E, e\rangle$ ($e < -E$) 之间的跃迁概率 $(\propto |C(E', E, e)|^2)$ 恒为零. 进一步地,按照量子力学的时间相关微扰理论,所有微扰态都可以用系统的物理态按照线性组合进行展开,因此微扰态和非物理态之间的跃迁概率也为零. 因此,把时间算符取作能量平移算符生成元在系统的 Hilbert 空间上的限制,不会产生任何问题.

5. 量子力学中的平均时间

前面主要讨论时间算符的构造问题,现在考虑

如何求量子力学中的平均时间问题. 无论按照哪种物理原理来计算统计平均,它们所遵从的数学原理(即概率与统计原理)是一致的. 同理,我们必须按照概率与统计原理来定义量子力学中的平均值. 由概率的定义可知,所有的平均本质上都是算术平均. 首先,假如某随机变量只能取离散值,并且取值为 y 的概率为 $\mathcal{Q}(y)$,那么该随机变量的平均值为 $\bar{y} = \sum_y \mathcal{Q}(y) y$. 更一般地,如果某随机变量 y 的概率密度 $\mathcal{J}(y)$,则该随机变量的函数 $F(y)$ 的平均值定义为

$$\bar{F}(y) = \int F(y) \mathcal{J}(y) dy. \quad (27)$$

同样地,当试图定义时间算符的平均值的时候,首先要找到有关时间分布的概率密度(设为 $\mathcal{J}(t)$). 然而,在量子力学中,对于能够解释成概率幅的波函数(用 $\varphi(t, \mathbf{x})$ 表示),其模的平方 $|\varphi(t, \mathbf{x})|^2$ 只表示三维空间概率密度,而不代表时间上的概率密度. 同时,按照概率与统计原理,在统计样本空间中,所有的基本事件必须是互斥的. 例如,某一个微观粒子在三维空间中某处以一定的概率出现,在全空间出现的总概率为 1,此时“粒子在空间中某处被发现”对应一个基本事件,这些基本事件的全体构成样本空间. 由于在任一个给定的时刻,该粒子不能同时在两个不同的空间位置上被发现,所以这些基本事件是互斥的,不能同时发生. 根据这些,可以计算该粒子的平均位置. 但是,当我们试图定义或者计算某种“平均时间”(包括“平均时间间隔”)时,却很难定义一个对应的统计样本空间,例如在不同时刻发生的各个事件之间不一定互斥,就不能把这些事件当作基本事件来构造样本空间. 因此,三维空间坐标对应量子统计样本空间中的元素或随机变量,但时间坐标不一定能够作为量子统计样本空间中的元素或随机变量. 从数学术语上讲,波函数 $\varphi(t, \mathbf{x})$ 作为随机变量 $\mathbf{x}$ 和时间 t 的函数,对应一个随机过程(stochastic process). 其中,对于任一给定的时间 t , $\varphi(t, \mathbf{x})$ 是一个随机变量,而对于任一给定的空间位置 $\mathbf{x}$, $\varphi(t, \mathbf{x})$ 是一个样本函数(仅仅作为时间 t 的普通函数).

总之,在正统量子力学中, $\int_{\Omega} |\varphi(t, \mathbf{x})|^2 d^3x$ 描述在给定时刻 t 在三维空间区域 Ω 内发现粒子的概率,但还不存在类似的量来描述粒子在某个时间间隔内在某个空间位置上出现的概率. 例如,设 t 代表量子力学平均时间, ΔT 是所考察的时间间隔,一

般地,不用下式

$$t = \int_{\Delta T} t |\varphi(t, \mathbf{x})|^2 dt / \int_{\Delta T} |\varphi(t, \mathbf{x})|^2 dt \quad (28)$$

计算平均时间,这是因为 $|\varphi(t, \mathbf{x})|^2$ 只代表三维空间坐标轴上的概率密度,而不代表时间轴上的概率密度.因此,量子力学中的平均时间问题还有待解决.

然而,当时间算符可以作为量子力学中的某些随机变量的函数时,它就对应一个量子力学中的随机变量,称此时的时间算符为时间函数,用 T 来表示.此时可以严格地定义量子力学中的平均时间.按照概率与统计学原理,利用微积分学中的积分变量替换原理,给出量子力学中求平均时间的一般公式.

$$f_T(t) = \begin{cases} |J(t, \mathbf{x}(t))| = |\varphi[t(\mathbf{x}), \mathbf{x}]|^2 |d\mathbf{x}(t)/dt|, & t \in (\alpha, \beta) \\ 0, & t \notin (\alpha, \beta) \end{cases}, \quad (30)$$

其中 $\alpha = \min[t(-\infty), t(+\infty)]$, $\beta = \max[t(-\infty), t(+\infty)]$. 显然, $J = |\varphi|^2(dx/dt)$ 是概率流密度.此时,量子力学平均时间可以定义为

$$t = \int_{\alpha}^{\beta} t f_T(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} t |J(t, \mathbf{x}(t))| dt. \quad (31)$$

在传统量子力学框架内,定理 1 和定理 2 给出了可以严格地定义平均时间的两种情形.

6. 讨论与结论

量子力学中的时间问题是一个既具有理论价值也存在实用价值的问题,人们为此展开过大量研究.然而要研究量子力学中的时间,必然面临着如何构造时间算符和定义平均时间的问题.在本文中我们系统地讨论了引入时间算符的三种方法,以及可以严格地定义平均时间的两个定理.

沿用 Mandelstam-Tamm 对时能测不准关系的描述精神,可以通过关联于动力学变量的方法引入时间算符,其中如果保持时间算符与哈密顿量形成共轭对,则时间算符的自共轭性就不能保证,反之如果保持时间算符的自共轭性,则时间算符与哈密顿量之间的正则对易关系通常只能在量子力学平均的意

这些公式在所给定的条件下是严格地成立的(假定概率幅 $\varphi(t, \mathbf{x})$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi[t(\mathbf{x}), \mathbf{x}]|^2 d^3x = 1$, 此时的 $\mathbf{x}$ 代表量子力学中的任意三维随机变量,包括位置变量和动量变量).

定理 1 假定时间函数 $T(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x})$ 是随机变量 $\mathbf{x}$ 的连续函数,则可以定义量子力学平均时间

$$t = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\mathbf{x}) |\varphi[t(\mathbf{x}), \mathbf{x}]|^2 d^3x. \quad (29)$$

假定上式右端积分绝对收敛.

定理 2 假定时间函数 $T(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x})$ 是随机变量 $\mathbf{x}$ 的单调可微函数,则存在时间函数的逆函数 $\mathbf{x}(t)$, 并且存在时间轴上的概率密度函数(记为 $f_T(t)$)

义上成立.通过对时间的经典力学表达式进行量子化的方法来引入时间算符,是引入时间算符的标准量子力学方法.然而,这种方法不适用于无法写出经典力学表达式的情形,例如量子隧穿时间,它是当今量子力学中的一个重要时间问题.把时间算符取作能量平移生成元在物理系统的 Hilbert 空间上的限制,是引入时间算符的又一个方案.按照以上这些方法引入的时间算符,一般都不是自共轭的,这是由于系统的能量谱存在下限.但根据 POVM 理论,它仍然可以代表可观察量.

在正统的量子力学中,不存在时间轴上的量子统计样本空间,时间不是一个随机变量,但是当时间算符可以表达成坐标或动量等随机变量的函数时(此时时间算符又可以称作时间函数),它就对应一个量子力学中的随机变量,此时可以通过时间函数来给出计算平均时间的一般公式,并且按照这种方法给出的平均时间定义,没有引入任何附加假设,在数学上和物理上都是严格成立的.

本文第一作者感谢 Colombia 大学的物理博士卢昌海先生和 de La Laguna 大学 J. G. Muga 教授的有益讨论.

- [1] Pauli W 1958 *Encyclopaedia of physics* In : Flugge S ed. (Berlin : Springer) p60
- [2] Muga J G , Leavens C R , Palao J P 1998 *Phys. Rev. A* **58** 4336
- [3] Egusquiza I L , Muga J G 1999 *Phys. Rev. A* **61** 012104
- [4] Galapon E A , Caballar R , Bahague R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 180406
- [5] Skulimowski M 2002 *Phys. Lett. A* **297** 129
- [7] Skulimowski M 2002 *Phys. Lett. A* **301** 361
- [8] Giannitrapani R 1997 *Int. J. Theor. Phys.* **36** 1575
- [9] Yuan Z Q , Ma Z S , Li H Z 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1885 (in Chinese) [袁焯权、马中水、李华钟 1996 物理学报 **47** 1885]
- [10] Jin Y F , Xu W , Ma S J , Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、马少娟、李 伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [11] Xiang Y J , Wen S C , Tang K S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2714 (in Chinese) [项元江、文双春、唐康淞 2006 物理学报 **55** 2714]
- [12] Du C G , Li S Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 375
- [13] Bai E J , Shu Q Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 208
- [14] Landauer R , Martin Th 1994 *Rev. Mod. Phys.* **66** 217
- [15] Steinberg A M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 2405
- [16] Balcou Ph , Dutriaux L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 851
- [17] Xavier A L Jr , de Aguiar M A M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3323
- [18] Niu Q , Raizen M G 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3491
- [19] Muga J G , Leavens C R 2000 *Phys. Rep.* **338** 353
- [20] Winful H G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 260401
- [21] Wang Z Y , Chen B , Xiong C D 2003 *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** 5135
- [22] Yamada N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 170401
- [23] Olkhovsky V S , Recami E , Jakiel J 2004 *Phys. Reports* **398** 133
- [24] Winful H G , Ngom M , Litchinitser N M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 052112
- [25] Ranfagni A , Cacciari I , Sandri P *et al* 2005 *Phys. Lett. A* **343** 469
- [26] Muga J G , Sala R , Egusquiza I L 2002 *Time in Quantum Mechanics* (New York : Springer-Verlag Berlin Heidelberg)
- [27] Mandelstam L , Tamm I 1945 *J. Phys. (SSSR)* **9** 249
- [28] Ryder L H 2003 *Quantum Field Theory* (2nd ed) (England : Cambridge University Press) p146—150
- [29] Busch P 1995 *Operational Quantum Physics* (Berlin : Springer-Verlag) p 81
- [30] Jauch J M 1968 *Foundations of Quantum Mechanics* (Philippines : Addison-Wesley Publishing Company , Inc) p26

Time operator in quantum mechanics^{*}

Wang Zhi-Yong[†] Xiong Cai-Dong

(School of Physical Electronics , University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 , China)

(Received 18 September 2006 ; revised manuscript received 1 October 2006)

Abstract

There have been great theoretical and practical interests in investigating time problem in quantum mechanics. Because time enters quantum mechanics as a parameter rather than a dynamical operator, people have to consider how to construct a time operator and calculate average time whenever they are faced with a time problem related to a physical process. In this paper we present a general investigation on time operator and average time.

Keywords : time operator , average time , self-adjointness , energy shift

PACC : 0365B , 0365C

^{*} Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20050614022).

[†] E-mail : zywang@uestc.edu.cn