第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3719-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.7,July,2007

正则黑洞熵*

赵 仁[1)2)†] 张丽春[1)] 张胜利[2)]

1)(山西大同大学物理系,大同 037009)

2)(西安交通大学理学院应用物理系,西安 710049)

(2006 年 10 月 11 日收到;2006 年 10 月 29 日收到修改稿)

应用隧道效应所得到的能量谱计算配分函数,进而计算黑洞熵.当本结论取一级近似时,熵修正的对数项与考虑广义不确定关系对黑洞熵修正的对数项一致,然而在计算中没有不确定因子.虽然对数修正项前的因子与考虑热波动对黑洞熵修正中对数项前的因子相同,但所给结论中当黑洞的热容量为负时也不存在发散项.所以本结论具有普遍性.

关键词:广义不确定关系,热波动,正则系综,量子修正

PACC:0420,9760L

1.引 言

引力理论近几十年的最惊人成就之一就是意识到黑洞具有温度和熵[1—3],使人们感兴趣的是黑洞熵,因为熵在普通热力系统中具有统计的物理意义,它与系统的微观状态数有关.然而,在爱因斯坦广义相对论中,黑洞熵是一个纯几何量.如果把黑洞和普通的热力学系统进行比较,就很容易发现一个重要区别:黑洞是一个具有强引力的虚空,而普通热力学系统则由原子分子组成.普通热力学系统的微观结构,人们可以用其微观成分的统计力学解释热力学性质.但是黑洞是否具有和黑洞熵对应的内部自由度[4].如果我们设想 Bekenstein-Hawking 熵具有统计意义.那么,人们如何定义微观态?更乐观地说,如何数微观态数[5]?这是人们研究黑洞熵的关键问题.近年来,弦理论和单圈量子引力理论,对黑洞熵-面积定律的统计解释都很成功[5].那么,哪一种理论更完美,人们希望通过对黑洞熵的量子修正项来做出选择.因此,对黑洞熵修正值的研究成为当前理论物理研究的热点之一,人们通过各种方法探讨黑洞熵的修正值[5—12].应用弦理论和单圈量子引力,得到黑洞熵-面积的关系是[13]

$$S = \frac{A}{4L_{\mathrm{p}}^2} + \rho\ln\frac{A}{4L_{\mathrm{p}}^2} + O\left(\frac{L_{\mathrm{p}}^2}{A}\right), \qquad (1)$$

式中 $A = 16\pi L_{\mathrm{p}}^2 M^2$ 是黑洞的视界面积,$L_{\mathrm{p}} = \sqrt{\hbar G}$ 是普朗克长度.就单圈量子引力来说,对数修正项的系数 ρ 仍然没有定论,但它表明修正项是 $\rho\ln(A/L_{\mathrm{p}}^2)$ 再恰当不过的了[14—16].最近,人们对黑洞的 Hawking 辐射过程提出了一种新的解释——隧道过程.并由此给出黑洞辐射谱.本文,利用此辐射谱计算正则系综的配分函数,得到黑洞熵的修正项.在计算中不涉及其他理论也没有任何假设.为探讨黑洞熵的修正值提供了一条新的途径.

2.分析计算

最近 Parikh 和 Wilczek[17] 用隧道效应来研究 Hawking 辐射,他们认为黑洞的粒子辐射,其过程中的隧道在辐射前并没有势垒,势垒是由辐射粒子自身造成的.即在隧道效应发生的过程中,黑洞的能量在减少,则黑洞的视界半径从原来的值变为一个新的较前小的值.半径的减小范围取决于辐射粒子能量的大小,原半径和辐射后的半径之间是一个经典的禁带范围——势垒.并用一种精巧的方法计算给出了 Schwarzschild 和 Reissner-Nordstrom 黑洞的辐射谱.文献[18—23]发展 Parikh 和 Wilczek 的方法,给出了轴对称时空黑洞和带质量四极矩静态黑洞的辐射谱.文献[24]对静质量不为零粒子的辐射进行了

* 山西省自然科学基金(批准号:2006011012)资助的课题.

† E-mail:zhao2969@sina.com

研究，文献[25—27]给出了考虑广义不确定关系后 Hawking 辐射的辐射谱.而 Angheben，Nadalini，Vanzo 和 Zerbini[28]计算了任意维黑洞的辐射谱.我们运用量子统计方法给出了普遍黑洞辐射粒子的能量谱为[29]

$$\rho_s \propto e^{\Delta S}, \tag{2}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_{MC}(E - E_s) - S_{MC}(E)\\ &= \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S_{MC}(E_b)}{\partial E_b^k}\right)_{E_s=0} (-E_s)^k\\ &= -\beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots,\end{aligned} \tag{3}$$

$E_b = E - E_s$，β 是 Hawking 辐射温度的倒数，

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k \ln\Omega}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}\\ &= \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S_{MC}}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}.\end{aligned} \tag{4}$$

由(2)式，对于半经典热平衡系综，正则配分函数

$$Z_C(\beta) = \int_0^\infty e^{\Delta S} dE \rho(E), \tag{5}$$

式中，$\rho(E)$ 是态密度.由文献[30]知 $\rho(E) \equiv e^{S_{MC}(E)}$，$S_{MC}(E)$ 是能量为 E 的微正则系综熵.由(3)式知，当黑洞辐射粒子的能量为 E_s 时，黑洞能量为 $E_b = E - E_s$，所以对黑洞来说，能量为 E_b 时，对应的态密度为 $\rho(E - E_s)$.由此

$$\rho(E - E_s) = \exp[S_{MC}(E - E_s)]. \tag{6}$$

将微正则熵在能量为 E 附近作泰勒展开，

$$S_{MC}(E - E_s) = S_{MC}(E) - \beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots, \tag{7}$$

忽略高阶项后，(5)式可写为

$$\begin{aligned}Z_C(\beta) &= \int_0^\infty e^{-\beta E_s + \beta_2 E_s^2} dE_s e^{S_{MC}(E - E_s)}\\ &= e^{S_{MC}(E)} \int_0^\infty dE_s e^{-2\beta E_s + 2\beta_2 E_s^2}\\ &= e^{S_{MC}(E)}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-2\beta_2}} \exp\left(\frac{\beta^2}{-2\beta_2}\right)\right.\\ &\quad \left.\times\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{-2\beta_2}}\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt$$

是误差积分.

用配分函数与熵的关系

$$S = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{9}$$

我们可得正则系统的熵为

$$S_C(E) = S_{MC}(E) + \Delta_S, \tag{10}$$

式中

$$\Delta_S = \ln f(\beta) - \beta \frac{\partial \ln f(\beta)}{\partial \beta}, \tag{11}$$

$$f(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-2\beta_2}} \exp\left(\frac{\beta^2}{-2\beta_2}\right)\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{-2\beta_2}}\right)\right]. \tag{12}$$

由误差函数的渐近表达式

$$\mathrm{erf}(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2z^2)^k}\right],\quad |z| \to \infty.$$

可得

$$f(\beta) = \frac{1}{2\beta}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k}\left(\frac{\sqrt{-2\beta_2}}{\beta}\right)^{2k}\right]. \tag{13}$$

将(13)式代入(11)式可得

$$\begin{aligned}\Delta_S &= \ln\left[\frac{1}{2\beta} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k 2\beta}\left(\frac{\sqrt{-2\beta_2}}{\beta}\right)^{2k}\right]\\ &\quad + \frac{1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k (2\sqrt{-2\beta_2})^{2k} \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^k (2\beta)^{2k}}}{1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k (2\sqrt{-2\beta_2})^{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k (2\beta)^{2k}}}.\end{aligned} \tag{14}$$

系统的热容量

$$C \equiv -\beta^2\left(\frac{\partial E}{\partial \beta}\right), \tag{15}$$

和

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{C}. \tag{16}$$

则(14)式可表为

$$\begin{aligned}\Delta_S &= \ln\left[T + T\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k C^k}\right]\\ &\quad + \frac{1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^k C^k}}{1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k C^k}}.\end{aligned} \tag{17}$$

式中 T 是系统的温度.

对于误差函数如果把级数前 n 项之和为作为 $\mathrm{erf}(z)$ 的近似值，则当 z 为实数时，基误差不超过级数中所略去的第一项的绝对值.由此，我们可知当 $C < -1$ 或 $C > 1$ 时，能够保证 Δ_S 不发散.

3. 结论与讨论

由以上讨论知，对于 Schwarzschild 时空，当只取一级近似时，熵的对数修正项为

$$\Delta_S = \ln T = -\frac{1}{2}\ln\frac{A}{4} + \text{const}. \tag{18}$$

文献[5]应用广义不确定关系研究黑洞熵修正所得结论为

$$S = \frac{A}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4}\ln\left(\frac{A}{4}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\frac{A}{4}\right)^{-n} + \text{const}. \tag{19}$$

由(19)式我们知，应用广义不确定关系得到黑洞熵修正的对数项中有一不确定因子 α^2，而我们的结论不存在不确定因子.

考虑热波动对黑洞热力学量修正后，熵的表达式为[31—34]

$$S = \ln\rho = S_{MC} - \frac{1}{2}\ln(CT^2) + \cdots, \tag{20}$$

以上所得结论有明显的缺陷，即由于 Schwarzschild 黑洞热容量是负的，这样就导致(20)式中对数修正项发散，所以此关系式对 Schwarzschild 黑洞不适用. 然而对普遍的四维弯曲时空，当取某种近似或极限时都可以回到 Schwarzschild 时空. 因此说明(20)式不具有一般性. 然而，我们所给出的结论，对热容量的要求是 $|C| > 1$，这样的条件是非常宽松的，一般黑洞都满足这样的条件. 所以我们给出的结论具有普适性.

另外，以前人们对黑洞熵的研究是建立在 Hawking 证明黑洞具有热辐射，且辐射谱为纯热谱的基础上的. 然而，Hawking 辐射是在时空背景不变的前提下得到的纯热谱，在讨论此辐射过程中有明显的争议之处是信息丢失，黑洞信息丢失意味着纯量子态将衰变成混合态，这就违背了量子力学的么正性原理. 而当应用隧道效应方法研究黑洞辐射时，考虑能量守恒和视界要发生改变，黑洞的辐射谱已不再是严格的纯热谱. 此种方法克服了 Hawking 辐射缺陷，指出正是由于引力作用提供了量子隧道的势垒.

我们的讨论是建立在黑洞辐射量子隧道效应基础上的，因此，本文的讨论更加合理，为进一步研究 Bekenstein-Hawking 熵的量子修正，检验弦理论和单圈量子引力理论哪一种理论更加完美，提供理论基础. 并且由我们所得结论知，当黑洞的热容量满足 $-1 \leqslant C \leqslant 1$ 时，黑洞的对数修正项可能发散，说明黑洞的能量取值存在下限. 此结论，与文献[35]所给结论一致.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Bekenstein J D 1974 *Phys. Rev.* D **9** 3292

[3] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[4] Wang Y J 2000 *Black Hole Physics* (Changsha: Hunan Normal University Press) p263 (in Chinese) [王永久 2000 黑洞物理学(长沙：湖南师范大学出版社)第 263 页]

[5] Medved A J M, Vagenas E C 2004 *Phys. Rev.* D **70** 124021

[6] Chatterjee A, Majumdar P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 141301

[7] Kaul R K, Majumdar P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5255

[8] Camellia G A, Arzano M, Procaccini A 2004 *Phys. Rev.* D **70** 107501

[9] Chatterjee A, Majumdar P 2005 *Phys. Rev.* D **71** 024003

[10] Myung Y S 2004 *Phys. Lett.* B **579** 205

[11] Akbar M M, Das S 2004 *Class. Quant. Grav.* **21** 1383

[12] Das S 2002 *Class. Quant. Grav.* **19** 2355

[13] Camelia G A, Arzano M, Procaccini A 2004 *Phys. Rev.* D **70** 107501

[14] Rovelli C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3288

[15] Ashtekar A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 904

[16] Kaul R K, Majumdar P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5255

[17] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[18] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14

[19] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Nucl. Phys.* B **725** 173

[20] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP **10** 055

[21] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese) [李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]

[22] Jiang Q Q, Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权、吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]

[23] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 物理学报 **54** 5018]

[24] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3795 (in Chinese) [张靖仪、赵　峥 2006 物理学报 **55** 3795]

[25] Arzan M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP **09** 037

[26] Medved A J M, Vagenas C 2005 *Mod. Phys. Lett.* A **20** 2449, 1723

[27] Arzano M 2006 *Mod. Phys. Lett.* A **21** 41

[28] Angheben M, Nadalini M, Vanzo L, Zerbini S 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP**05** 014

[29] Zhao R, Zhang L C, Hu S Q 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 3898 (in Chinese) [赵　仁、张丽春、胡双启 2006 物理学报 **55** 3898]

[30] Das S, Majumdar P, Bhaduri R K 2002 *Class. Quant. Grav.* **20** 2355
[31] Setare M R 2003 *Phys. Lett.* B **573** 173
[32] Cavaglia M, Fabbri A 2002 *Phys. Rev.* D **65** 044012
[33] Gour G, Medved A J M 2003 *Class. Quant. Grav.* **20** 3307
[34] Setare M R 2004 *Eur. Phys. J.* C **33** 555
[35] Liu L, Pei S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4980 (in Chinese) [刘辽、裴寿镛 2006 物理学报 **55** 4980]

Canonical entropy of black hole*

Zhao Ren[1)2)†] Zhang Li-Chun[1)] Zhang Sheng-Li[2)]
1)(*Department of Physics, Shanxi Datong University, Datong 037009, China*)
2)(*Department of Applied Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)
(Received 11 October 2006; revised manuscript received 29 October 2006)

Abstract

Recently, Hawking radiation of the black hole was studied by tunnel effect method. It was found that the radiation spectrum of the black hole is not a strictly pure thermal spectrum. How the deviation between the radiation spectrum from pure thermal spectrum affect the entropy is a very interesting problem. In this paper, we calculate the partition function using the energy spectrum derived by tunnel effect, then obtain the entropy of the black hole. When we take first order approximation, the logarithmic term of entropy correction is consistent with the one considering the generalized uncertainty relation. However, in our calculation, there is no uncertain factor. And the coefficient of logarithmic correction term is the same one after considering the correction to the black hole entropy due to the thermal fluctuation. There are no divergent terms in our result when the thermal capacity of the black hole is negative. So our discussion has universality.

Keywords: generalized uncertain relation, thermal fluctuation, canonical ensemble, quantum correction
PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011012).
† E-mail: zhao2969@sina.com