

弹性力学的复变量重构核粒子法^{*}

陈 丽^{1,2)} 程玉民^{1)†}

1) 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

2) 长安大学理学院工程力学系, 西安 710064)

(2007 年 4 月 7 日收到, 2007 年 4 月 23 日收到修改稿)

在重构核粒子法的基础上, 提出了复变量重构核粒子法. 复变量重构核粒子法的优点是采用一维基函数建立二维问题的修正函数. 然后, 将复变量重构核粒子法应用于弹性力学, 提出了弹性力学的复变量重构核粒子法, 并推导了相关公式. 与传统的重构核粒子法相比, 复变量重构核粒子法具有计算量小、效率高的优点. 最后给出了数值算例证明了该方法的有效性.

关键词: 重构核粒子法, 复变量重构核粒子法, 弹性力学, 无网格方法

PACC: 0200, 0260, 4630C

1. 引 言

无网格方法近年来得到了较大发展, 是目前科学和工程计算方法研究的热点之一, 也是科学和工程计算发展的趋势. 与以往的基于网格的方法, 如有限元法、边界元法等不同, 无网格方法采用基于点的近似, 不需要在求解域内划分用来确定插值函数的网格. 在处理诸如大变形、裂纹扩展等问题时可以完全抛开网格重构, 具有较为明显的优越性, 为科学和工程计算带来了很大的方便^[1, 2].

无网格方法形成形函数的方法与基于网格的方法, 如有限元法、边界元法方法不同. 在由试函数求得形函数后, 无网格方法建立求解方程的方法和有限元法一样.

无网格方法形成形函数的方法有光滑粒子法 (smooth particle hydrodynamic method, SPH)^[3], 移动最小二乘法 (moving least-square approximation method, MLS)^[4], 单位分解法 (the partition of unity method)^[5] 和重构核粒子法 (reproducing kernel particle method, RKPM)^[6] 等.

目前发展的无网格方法有扩散单元法 (diffuse element method, DEM)^[7], 无单元 Galerkin 法 (element-free Galerkin method, EFG)^[8], Hp-clouds 无网格方

法^[9]; 有限点法 (the finite point method, FPM)^[10]; 无网格局部 Petrov-Galerkin 方法 (meshless local Petrov-Galerkin method, MLPG)^[11]; 多尺度重构核粒子方法 (multi-scale reproducing kernel particle method, MRKP)^[12]; 无网格配点法 (meshless point collocation method, PCM)^[13]; 小波粒子方法 (wavelet particle method, WPM)^[14]; 径向基函数法 (radial basis functions, RBF)^[15]; 无网格有限元法 (meshless finite element method, MFEM)^[16]; 移动粒子有限元法 (moving particle finite element method, MPFEM)^[17] 以及边界积分方程的无网格方法^[18, 19] 等.

国内目前在无网格方法研究方面也有不少工作, 主要有张雄等人提出的移动最小二乘配点法和加权最小二乘无网格法等^[20, 21]; 蔡永昌等人利用 Voronoi 方法和 Petrov-Galerkin 方法相结合提出的无网格方法^[22]; Yao 等人提出的杂交边界点法^[23]; 龙述尧等对无网格局部边界积分方程方法进行了研究, 提出了弹性力学平面问题的局部 Petrov-Galerkin 方法^[24]; 程玉民等提出的弹性力学的边界无单元法^[25, 26]; 基于单位分解法的无网格数值流行方法^[27, 28]; 弹性力学的复变量无网格方法^[29] 和势问题的径向基函数-局部边界积分方程方法^[30] 等等.

虽然近年来无网格方法取得了很大发展, 但与目前已经得到广泛应用的有限元法相比, 还存在诸

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10571118) 和上海市重点学科建设项目 (批准号: Y0103) 资助的课题.

[†] 永久联系人. E-mail: ymcheng@shu.edu.cn; cc_ymcheng@sh163.net

如计算效率、边界条件处理、数值积分等问题。

重构核粒子法是在光滑粒子法的基础上发展起来的,是无网格方法中较为重要的逼近函数形成方法。光滑粒子法作为最早出现的无网格方法,主要是处理无限域问题,对于均匀布点的无限域问题,可以满足一致性条件,但对于有限域问题,误差相应加大,尤其是不均匀布点时,即使均匀布点在边界处也很难满足一致性条件。重构核粒子法对光滑粒子法的核函数乘以一个修正函数以满足边界上的一致性条件。重构核粒子法不仅完全消除了光滑粒子法所谓的不稳定性,而且具有其他无网格方法所不具备的优点,如变时-频特性、多分辨率特性,从而使RKPM在大变形问题、结构动力学、声学、计算流体力学、智能材料结构、超塑性橡胶材料非线性问题、高梯度剪切带问题等方面得到了广泛应用。

针对目前重构核粒子法形成的无网格法配点过多、计算量大等问题,本文提出了复变量重构核粒子法。复变量重构核粒子法的优点是采用一维基函数建立二维问题的逼近函数,然后将其应用于弹性力学问题,提出了弹性力学的复变量重构核粒子法,并推导了相关公式。与传统的重构核粒子法相比,复变量重构核粒子法具有配点少、计算量小的优点。

2. 重构核粒子法

在重构核粒子法^[6]中,近似函数构造过程中的关键步骤是,通过修正核函数 $\bar{u}(x - x')$ 来构造函数 $u(x)$ 的逼近函数 $u^h(x)$,即

$$u^h(x) = \int_{\Omega} u(x') \cdot \bar{u}(x - x') \cdot dx', \quad (1)$$

式中 $\bar{u}(x - x')$ 为修正核函数,

$$\bar{u}(x - x') = \alpha(x; x - x') \cdot u(x - x'), \quad (2)$$

其中 $\alpha(x; x - x')$ 为修正函数。修正函数一般可表

示为多项式基函数的线性组合。取修正函数

$$\alpha(x; x - x') = \sum_{i=1}^m p_i(x - x') \cdot b_i(x) = p^T(x - x') W(x) \quad (x \in \Omega), \quad (3)$$

其中 m 是基函数的个数, $p_i(x - x')$ 是基函数, $b_i(x)$ 是对应的未知系数。基函数的通常形式如下:

线性基

$$p^T = (1 \quad x_1 - x'_1) \quad (\text{对一维区域}), \quad (4)$$

$$p^T = (1 \quad x_1 - x'_1 \quad x_2 - x'_2) \quad (\text{对二维区域}). \quad (5)$$

二次基

$$p^T = (1 \quad x_1 - x'_1 \quad (x_1 - x'_1)^2) \quad (\text{对一维区域}), \quad (6)$$

$$p^T = (1 \quad x_1 - x'_1 \quad x_2 - x'_2 \quad (x_1 - x'_1)^2, \quad (x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) \quad (x_2 - x'_2)^2) \quad (\text{对二维区域}). \quad (7)$$

对应于(1)式的核近似,采用梯形积分法则得到(1)式的离散形式,可表示为

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{l=1}^n \bar{u}(x - x_l) \cdot u(x_l) \cdot \Delta V_l \\ &= \sum_{l=1}^n \alpha(x; x - x_l) \\ &\quad \times u(x - x_l) \cdot u_l \cdot \Delta V_l, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $u(x - x_l)$ 是具有紧支集特性的权函数, x_l 为点 x 的紧支域内的节点, ΔV_l 是与节点 x_l 有关的区域度量,

$$\sum_{l=1}^n \Delta V_l = V. \quad (9)$$

对二维问题, V 指的是整个问题域的面积。

(8)式可用矩阵形式表示为

$$u^h(x) = \alpha(x) W(x) V \cdot u, \quad (10)$$

其中

$$u^T = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n), \quad (11)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} u(x - x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u(x - x_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u(x - x_n) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$V = \begin{bmatrix} \Delta V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta V_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \Delta V_n \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$$c_l(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_l), \quad (14)$$

则

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x}), \dots, c_n(\mathbf{x})) = \mathbf{b}^\top(\mathbf{x})\mathbf{P}, \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & p_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & p_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \\ p_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & p_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{b}^\top(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}), \dots, b_m(\mathbf{x})). \quad (17)$$

这里系数 $b_i(\mathbf{x})$ 是根据逼近函数的重构条件来确定的, 它同时确保了逼近函数的相应精度. 为了使逼近达到 n 阶精度, 将 $u(\mathbf{x}')$ 在 $\mathbf{x}$ 处进行 n 阶 Taylor 级数展开, 得到相应的重构条件, 即

$$\overline{M}(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = H, \quad (18)$$

其中

$$M(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \cdot \mathbf{p}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \times u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \cdot \Delta V_l, \quad (19)$$

$$H = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top, \quad (20)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = M^{-1}(\mathbf{x}) \cdot H. \quad (21)$$

这样, 逼近函数 $u^h(\mathbf{x})$ 可重新表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{x}) \cdot u_l = \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \quad (22)$$

其中 $\Phi(\mathbf{x})$ 为形函数,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= (\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{V}. \end{aligned} \quad (23)$$

3. 复变量重构核粒子法

提出复变量重构核粒子法主要是针对目前重构

核粒子法形成的无网格方法配点过多、计算量大等问题. 重构核粒子法是对标量而言的, 而复变量重构核粒子法则是对向量函数的逼近.

取试函数

$$\begin{aligned} \bar{u}^h(z) &= u_1^h(z) + i u_2^h(z) \\ &= \int_{\Omega} \bar{u}(z') \bar{u}(z - z') \cdot dz' \\ &\quad (z = x_1 + i x_2 \in \Omega), \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式的离散形式为

$$\begin{aligned} \bar{u}^h(z) &= \sum_{l=1}^n \bar{u}(z - z_l) \cdot \bar{u}(z_l) \cdot \Delta V_l \\ &= \sum_{l=1}^n \alpha(z; z - z_l) \cdot u(z - z_l) \\ &\quad \times \Delta V_l \cdot \bar{u}(z_l), \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $u(z - z_l)$ 是具有紧支集特性的权函数, z_l 为点 z 的紧支域内的节点,

$$\bar{u}(z_l) = u_1(z_l) + i u_2(z_l). \quad (26)$$

(25) 式可用矩阵形式表示为

$$\bar{u}^h(z) = \mathbf{C}(z)\mathbf{W}(z)\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad (27)$$

其中

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(z_1), \bar{u}(z_2), \dots, \bar{u}(z_n))^\top = Q\mathbf{u}, \quad (28)$$

$$\mathbf{u} = (u_1(z_1), u_2(z_1), u_1(z_2), u_2(z_2), \dots, u_1(z_n), u_2(z_n))^\top, \quad (29)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \end{bmatrix}_{n \times 2n}, \quad (30)$$

$$W(z) = \begin{bmatrix} u(z - z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u(z - z_2) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & u(z - z_n) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

令

$$c_l(z) = c(z; z - z_l), \quad (32)$$

则

$$C(z) = (c_1(z), c_2(z), \dots, c_n(z)) = b^T(z)P, \quad (33)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} p_1(z - z_1) & p_1(z - z_2) & \cdots & p_1(z - z_n) \\ p_2(z - z_1) & p_2(z - z_2) & \cdots & p_2(z - z_n) \\ & & \ddots & \\ p_m(z - z_1) & p_m(z - z_2) & \cdots & p_m(z - z_n) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$b^T(z) = (b_1(z), b_2(z), \dots, b_m(z)), \quad (35)$$

这里系数 $b_i(z)$ 依然根据逼近函数的重构条件来确定,即

$$\bar{M}(z) = M(z) \cdot b(z) = H, \quad (36)$$

其中

$$M(z) = \sum_{l=1}^n p(z - z_l) \cdot p^T(z - z_l) \times u(z - z_l) \cdot \Delta V_l, \quad (37)$$

$$b(z) = M^{-1}(z) \cdot H. \quad (38)$$

这样,逼近函数 $\bar{u}^h(z)$ 的表达式为

$$\bar{u}^h(z) = \Phi(z)\bar{u} = \sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l), \quad (39)$$

其中 $\Phi(z)$ 为形函数,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z)) \\ &= C(z)W(z)V, \end{aligned} \quad (40)$$

则有

$$\begin{aligned} u_1^h(z) &= \operatorname{Re}[\Phi(z)\bar{u}] \\ &= \operatorname{Re}\left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l)\right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} u_2^h(z) &= \operatorname{Im}[\Phi(z)\bar{u}] \\ &= \operatorname{Im}\left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l)\right]. \end{aligned} \quad (42)$$

复变量重构核粒子法的优点是其形成的二维问题的无网格方法可取较少的节点,因为其试函数中所含的待定系数减少了.对线性基,原来的基函数为 $p^T = (1, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)$, 待定系数是 3 个,现在

的基函数为 $p^T = (1, z - z')$, 待定系数是 2 个;对二次基,原来的基函数为 $p^T = (1, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, (x_1 - x'_1)^2, (x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2), (x_2 - x'_2)^2)$, 待定系数是 6 个,现在的基函数为 $p^T = (1, z - z', (z - z')^2)$, 待定系数是 3 个.这样,对任一场点来说,其紧支域(影响域)中所含的最小节点数就大大减少了,进而在整个求解域中所需选取的节点数目也可以大大减少.

4. 弹性力学的复变量无网格方法

以下从最小势能原理出发推导弹性力学平面问题的复变量无网格方法.

由复变量重构核粒子法的试函数表达式(39),域内任意点 $z = x_1 + ix_2$ 的位移可表示为

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= u_1(z) + iu_2(z) \\ &= \Phi(z)\bar{u} = \sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \operatorname{Re}[\Phi(z)\bar{u}] \\ &= \operatorname{Re}\left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l)\right], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} u_2(z) &= \operatorname{Im}[\Phi(z)\bar{u}] \\ &= \operatorname{Im}\left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z)\bar{u}(z_l)\right]. \end{aligned} \quad (45)$$

域内任一点应变为

$$\epsilon(z) = \begin{bmatrix} (\operatorname{Re}[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z) \bar{u}(z_l)])_{,1} \\ (\operatorname{Im}[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z) \bar{u}(z_l)])_{,2} \\ (\operatorname{Re}[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z) \bar{u}(z_l)])_{,2} + (\operatorname{Im}[\sum_{l=1}^n \Phi_l(z) \bar{u}(z_l)])_{,1} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

可记为

$$\epsilon(z) = L \bar{u}(z), \quad (47)$$

其中

$$L(\cdot) = \begin{bmatrix} (\operatorname{Re}[\cdot])_{,1} \\ (\operatorname{Im}[\cdot])_{,2} \\ (\operatorname{Re}[\cdot])_{,2} + (\operatorname{Im}[\cdot])_{,1} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

由(28)式和(43)式,可得

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= L(\Phi(z) \bar{u}) \\ &= L(\Phi(z) Qu) = B(z) \cdot u, \end{aligned} \quad (49)$$

其中

$$B(z) = (B_1(z), B_2(z), \dots, B_n(z)), \quad (50)$$

$$B_i(z) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_{i,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{i,1}(z)] \\ \operatorname{Im}[\Phi_{i,2}(z)] & \operatorname{Re}[\Phi_{i,2}(z)] \\ \operatorname{Re}[\Phi_{i,2}(z)] + \operatorname{Im}[\Phi_{i,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{i,2}(z)] + \operatorname{Re}[\Phi_{i,1}(z)] \end{bmatrix}, \quad (51)$$

则任一点应力为

$$\sigma(z) = D \cdot \epsilon(z) = D \cdot B(z) \cdot u, \quad (52)$$

其中 D 为弹性矩阵,对平面应力问题

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

对于平面应变问题

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

其中 E, ν 分别为材料的弹性模量和泊松比.

系统总势能可表示为如下形式:

$$\Pi = \frac{1}{2} u^T K u - u^T f, \quad (55)$$

其中 K 为刚度矩阵, f 为荷载向量.

由最小势能原理可得

$$\delta \Pi = \delta u^T \cdot K \cdot u - \delta u^T \cdot f = 0, \quad (56)$$

可得最终的线性代数方程组

$$K u = f. \quad (57)$$

刚度矩阵 K 可表示为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \ddots & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad (58)$$

K_{ij} 为 2×2 阶矩阵.

荷载向量 f 为

$$f = (f_1^T, f_2^T, \dots, f_n^T)^T, \quad (59)$$

$$f_i = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)})^T, i = 1, 2, \dots, n. \quad (60)$$

以下对 Π 的各个部分分别讨论,将 $\delta \Pi_i$ 表示为

$$\delta \Pi_i = \delta u^T \cdot K^{(i)} \cdot u - \delta u^T \cdot f^{(i)} = 0, \quad (61)$$

则可得到各部分对 K 和 f 的贡献.

4.1. 应变能

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} [\epsilon_{11}(z) \sigma_{11}(z) + \epsilon_{22}(z) \sigma_{22}(z) \\ &\quad + \epsilon_{12}(z) \sigma_{12}(z)] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon^T(z) \sigma(z) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} u^T \cdot B^T(z) \cdot D \cdot B(z) \cdot u d\Omega \\ &= \frac{1}{2} u^T \cdot \left[\iint_{\Omega} B^T(z) \cdot D \cdot B(z) d\Omega \right] \cdot u, \end{aligned} \quad (62)$$

则

$$\delta\Pi_1 = \delta\mathbf{u}^T \times \left[\iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z}) \cdot d\Omega \right] \cdot \mathbf{u}. \quad (63)$$

那么

$$\mathbf{K}^{(1)} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z}) \cdot d\Omega, \quad (64)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T. \quad (65)$$

4.2. 初应力

设域内分布有初应力

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) = (\sigma_{11}^{(0)}(\mathbf{z}), \sigma_{22}^{(0)}(\mathbf{z}), \sigma_{12}^{(0)}(\mathbf{z}))^T, \quad (66)$$

则

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} [\epsilon_{11}(\mathbf{z}) \sigma_{11}^{(0)}(\mathbf{z}) + \epsilon_{22}(\mathbf{z}) \sigma_{22}^{(0)}(\mathbf{z}) \\ &\quad + \epsilon_{12}(\mathbf{z}) \sigma_{12}^{(0)}(\mathbf{z})] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \epsilon^T(\mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) \cdot d\Omega \\ &= \mathbf{u}^T \cdot \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) d\Omega, \end{aligned} \quad (67)$$

则

$$\delta\Pi_2 = \delta\mathbf{u}^T \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) \cdot d\Omega. \quad (68)$$

那么

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = - \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{z}) d\Omega. \quad (70)$$

4.3. 集中力

设域内一点 $\mathbf{z}$ 作用有集中力

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) = (\hat{T}_1(\mathbf{z}), \hat{T}_2(\mathbf{z}))^T, \quad (71)$$

则

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= -(\hat{T}_1(\mathbf{z})u_1(\mathbf{z}) + \hat{T}_2(\mathbf{z})u_2(\mathbf{z})) \\ &= -\left\{ \hat{T}_1(\mathbf{z}) \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{z}) \bar{u}(z_l) \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{T}_2(\mathbf{z}) \cdot \operatorname{Im} \left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{z}) \bar{u}(z_l) \right] \right\} \\ &= -\left\{ \hat{T}_1(\mathbf{z}) \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{z}) [u_1(z_l) + iu_2(z_l)] \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{T}_2(\mathbf{z}) \operatorname{Im} \left[\sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{z}) [u_1(z_l) + iu_2(z_l)] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\hat{T}_1(\mathbf{z}) \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} u_1(z_l) \\ u_2(z_l) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_l(\mathbf{z})] \\ -\operatorname{Im}[\Phi_l(\mathbf{z})] \end{bmatrix} \\ &\quad - \hat{T}_2(\mathbf{z}) \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} u_1(z_l) \\ u_2(z_l) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \operatorname{Im}[\Phi_l(\mathbf{z})] \\ \operatorname{Re}[\Phi_l(\mathbf{z})] \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{u}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (72)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{z}) = (\tilde{\Phi}_1(\mathbf{z}), \tilde{\Phi}_2(\mathbf{z}), \dots, \tilde{\Phi}_n(\mathbf{z})), \quad (73)$$

$$\tilde{\Phi}_i(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_i(\mathbf{z})] & -\operatorname{Im}[\Phi_i(\mathbf{z})] \\ \operatorname{Im}[\Phi_i(\mathbf{z})] & \operatorname{Re}[\Phi_i(\mathbf{z})] \end{bmatrix}, \quad (74)$$

则

$$\delta\Pi_3 = -\delta\mathbf{u}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}). \quad (75)$$

那么

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (76)$$

$$\mathbf{f}^{(3)} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}). \quad (77)$$

4.4. 面 力

设在边界 Γ_i 上作用有面力

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) = (\bar{T}_1(\mathbf{z}), \bar{T}_2(\mathbf{z}))^T, \quad (78)$$

则类似于集中力的推导过程,可得

$$\Pi_4 = -\mathbf{u}^T \int_{\Gamma_i} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) d\Gamma, \quad (79)$$

$$\delta\Pi_4 = -\delta\mathbf{u}^T \int_{\Gamma_i} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) d\Gamma, \quad (80)$$

则

$$\mathbf{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$\mathbf{f}^{(4)} = \int_{\Gamma_i} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (82)$$

4.5. 体 力

设域 Ω 内体力分布为

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = (\hat{f}_1(\mathbf{z}), \hat{f}_2(\mathbf{z}))^T, \quad (83)$$

则类似于集中力的推导过程可得

$$\Pi_5 = -\mathbf{u}^T \cdot \iint_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) d\Omega, \quad (84)$$

$$\delta\Pi_5 = -\delta\mathbf{u}^T \cdot \iint_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) d\Omega, \quad (85)$$

则

$$\mathbf{K}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$\mathbf{f}^{(5)} = \iint_{\Omega} \tilde{\Phi}^T(z) \hat{\mathbf{f}}(z) d\Omega. \quad (87)$$

4.6. 位移边界条件的处理

和重构核粒子法一样,由复变量重构核粒子法得到的形函数也不满足 Kronecker Delta 函数性质,即 $\Phi(z_j) \neq \delta_{ij}$. 因此不能像有限元法那样直接施加边界条件. 本文采用罚函数法引入位移边界条件.

假设在 Ω 域边界上的一点 z 处的位移为 $\hat{\mathbf{U}}(z)$ 为

$$\hat{\mathbf{U}}(z) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(z) \\ \hat{u}_2(z) \end{pmatrix}. \quad (88)$$

令

$$\mathbf{U}(z) = \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}, \quad (89)$$

将位移边界条件用罚函数法引入到(55)式中,得到

修正泛函为

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} = \Pi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^T \\ \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}) \cdot d\Gamma, \end{aligned} \quad (90)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是罚因子矩阵,可表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

其中 α_1, α_2 通常可取为相同的极大正常数,目前使用最多的是采用

$$\alpha = 1.0 \times 10^{5-8} \times E \quad (92)$$

来确定罚因子的值.

(90) 式对应的 Galerkin 弱形式为

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = \delta \Pi + \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^T \\ \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}) \cdot d\Gamma, \end{aligned} \quad (93)$$

式中 $\delta \Pi = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}$ 前面已经讨论过,现在讨论引入边界条件的最后一项积分

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}) \cdot d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_u} \delta (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}) \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{U}^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_u} \delta \left(\begin{bmatrix} \text{Re}[\Phi(z)Qu] \\ \text{Im}[\Phi(z)Qu] \end{bmatrix}^T \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\begin{bmatrix} \text{Re}[\Phi(z)Qu] \\ \text{Im}[\Phi(z)Qu] \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{U}} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_u} \delta \left(\begin{bmatrix} \text{Re}[\Phi(z)Qu] \\ \text{Im}[\Phi(z)Qu] \end{bmatrix}^T \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} \text{Re}[\Phi(z)Qu] \\ \text{Im}[\Phi(z)Qu] \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left(\begin{bmatrix} \text{Re}[\Phi(z)Qu] \\ \text{Im}[\Phi(z)Qu] \end{bmatrix}^T \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{U}} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_u} \delta (\tilde{\Phi}(z) \cdot \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot (\tilde{\Phi}(z) \cdot \mathbf{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta (\tilde{\Phi}(z) \cdot \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{U}} d\Gamma \\ &= \delta \mathbf{u}^T \cdot \left(\int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\Phi}(z) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \cdot \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{U}} d\Gamma \\ &= \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}^\alpha \cdot \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}^\alpha, \end{aligned} \quad (94)$$

则

$$\mathbf{K}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\Phi}(z) d\Gamma, \quad (95)$$

$$\mathbf{f}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{U}} d\Gamma. \quad (96)$$

将(56)式和(94)式代入(93)式最终得到离散系统方程为

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^\alpha. \quad (97)$$

以上即为利用最小势能原理建立的弹性力学的

复变量重构核粒子法.

复变量重构核粒子法的优点是配点少、计算速度快,有效地解决了以往重构核粒子法配点过多、计算速度慢的缺点.

5. 数值算例

下面采用复变量重构核粒子法对端部受剪切载荷作用的悬臂梁和受单向拉伸的中心圆孔板进行了

计算.

5.1. 端部受剪切载荷作用的悬臂梁

如图 1 所示,在末端受向下的抛物线分布的剪切载荷作用的悬臂梁,长 $l = 48\text{ m}$,高度 $h = 12\text{ m}$,厚度 $\delta = 1\text{ m}$,材料的弹性模量 $E = 3.0 \times 10^7\text{ Pa}$,泊松比 $\nu = 0.25$,载荷 $P = 1000\text{ N}$,不计自重,按平面应力计算.

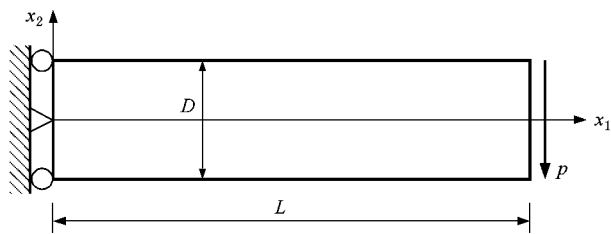


图 1 悬臂梁示意图

在求解域内规则布置了 16×5 个节点,节点布置如图 2 所示.

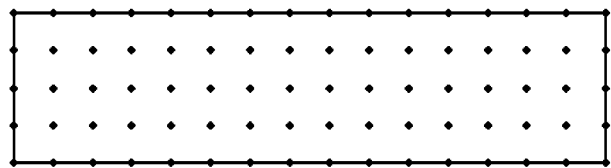


图 2 悬臂梁的节点分布示意图

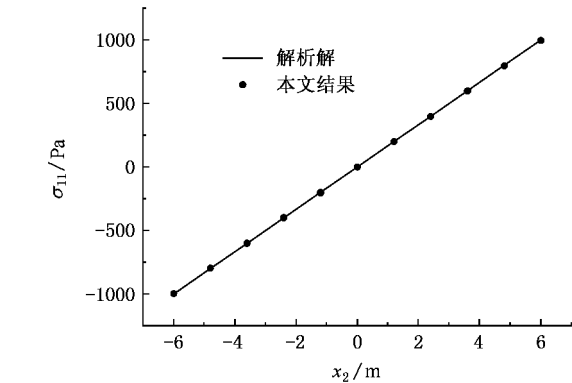


图 3 悬臂梁 $x_1 = l/2$ 横断面正应力

本文中逼近函数的构造采用线性基,计算结果如图 3 和图 4 所示.可以看出,本文提出的复变量重构核粒子法的计算结果和解析解符合很好,说明了本文方法的正确性.

表 1 给出了采用不同罚因子值的梁端挠度的计算值与解析解的相对误差.可以看出罚因子取值并

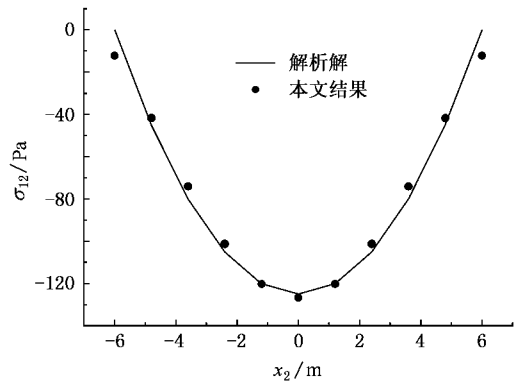


图 4 悬臂梁 $x_1 = l/2$ 横断面上的剪应力

不是越大越好,在 $(1.0 \times 10^1 - 1.0 \times 10^4) \times E$ 范围中取值时计算结果与解析解符合较好,具有较高的精度.

表 1 梁端计算所得位移与解析解的相对误差

罚因子值 ($\times E$)	解析解	数值解	位移相对误差/%
1.0×10^0	-0.0089	-0.0094326	5.98
1.0×10^1	-0.0089	-0.0089514	0.58
1.0×10^2	-0.0089	-0.0089019	0.02
1.0×10^3	-0.0089	-0.008893	0.079
1.0×10^4	-0.0089	-0.0088732	0.30
1.0×10^5	-0.0089	-0.0087165	2.06
1.0×10^6	-0.0089	-0.0081789	8.10
1.0×10^7	-0.0089	-0.007867	11.61
1.0×10^8	-0.0089	-0.00782	12.13
1.0×10^9	-0.0089	-0.007815	12.19
1.0×10^{10}	-0.0089	-0.0078145	12.20

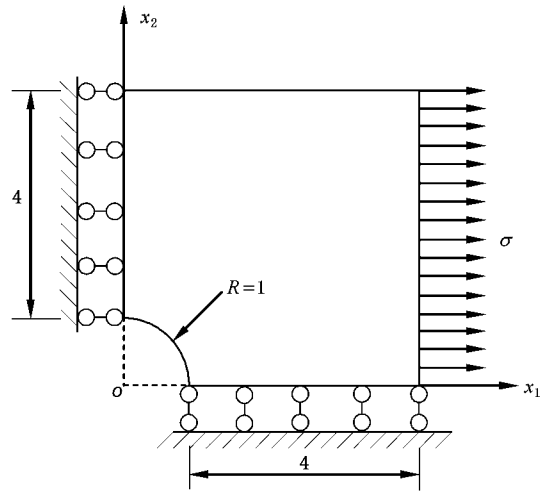


图 5 单向拉伸的中心圆孔板的计算模型

5.2. 受单向拉伸作用的中心圆孔板

受单向拉伸的中心圆孔板的尺寸为 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$, 中心圆孔半径 1 m .

材料参数为 $E = 2.0 \times 10^5\text{ MPa}$, $\nu = 0.25$. 单向拉伸均布荷载 $\sigma = 1.0\text{ kPa}$. 由于对称性, 在计算时取四分之一区域作为计算模型, 如图 5 所示.

中心圆孔板的节点配置如图 6 所示, 共布置了 99 个节点.

图 7 给出了 x_2 轴上点的正应力计算值与解析解的对比结果. 可以看出计算结果和解析解符合很好, 说明了本文方法的正确性和对于应力集中问题

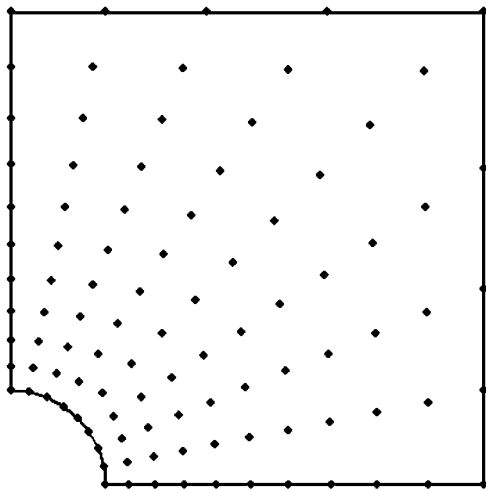


图 6 受单向拉伸的中心圆孔板的节点配置

的可行性.

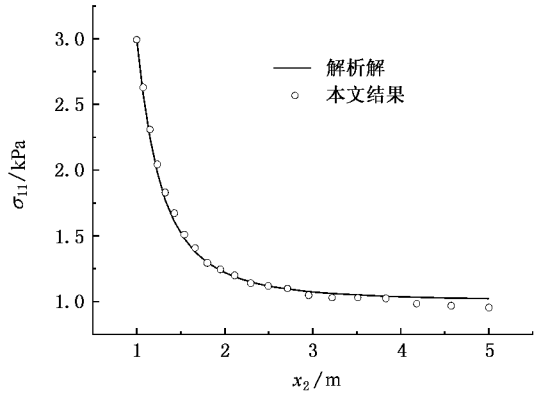


图 7 沿 x_2 轴各点 x_1 方向的正应力

6. 结论与讨论

本文在重构核粒子法的基础上建立了复变量重构核粒子法. 本方法的优点是采用一维基函数建立二维问题的修正函数, 进而得到二维问题的逼近函数, 所形成的无网格方法计算量小.

提出了弹性力学的复变量重构核粒子法, 并推导了相应的计算公式. 该方法的优点是配点少, 进而使整个问题的计算量减小, 提高了计算效率.

本文提出的复变量重构核粒子法也可用于其他二维问题的分析.

[1] Belytschko T ,Krongauz Y ,Organ D ,Fleming M ,Krysl P 1996 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139** 3

[2] Li S F ,Liu W K 2002 *Applied Mechanics Review* **55** 1

[3] Lucy L B 1977 *The Astron* **8** 1013

[4] Lancaster P ,Salkauskas K 1981 *Math . Comput* . **37** 141

[5] Babuska I ,Melenk J M 1997 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **40** 727

[6] Liu W K ,Jun S ,Zhang Y F 1995 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **20** 1081

[7] Nayroles B ,Touzot G ,Villon P 1992 *Computational Mechanics* **10** 307

[8] Belytschko T ,Lu Y Y ,Gu L 1994 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **37** 229

[9] Duarte C A ,Oden J T 1996 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139** 237

[10] Onarte E 1996 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **39** 3839

[11] Atluri S N ,Zhu T L 1998 *Computational Mechanics* **22** 117

[12] Liu W K ,Chen Y ,Uras R A ,Chang C T 1996 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139** 91

[13] Aluru N R 2000 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **47** 1083

[14] Liu W K ,Chen Y J 1995 *Int . J . Numer . Meth . Fluids* **21** 901

[15] Wendland H 1999 *Math . Comput* . **68** 1521

[16] Idelsohn S R ,Onate E ,Calvo N ,Del Pin F 2003 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **58** 893

[17] Hao S ,Park H S ,Liu W K 2002 *Int . J . Numer . Meth . Eng.* **53** 1937

[18] Zhu T ,Zhang J D ,Atluri S N 1998 *Computational Mechanics* **21** 223

[19] Kothnur V S ,Mukherjee S ,Mukherjee Y X 1999 *Int . J . Solids Struc.* **36** 1129

- [20] Zhang X ,Liu X H ,Song K Z *et al* 2001 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **51** 1089
- [21] Zhang X ,Hu W ,Pan X F ,Lu M W 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 425 (in Chinese) [张 雄、胡 炜、潘小飞、陆明万 2003 力学学报 **35** 425]
- [22] Cai Y C ,Zhu H H ,Wang J H 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 187 (in Chinese) [蔡永昌、朱合华、王建华 2003 力学学报 **35** 187]
- [23] Zhang J ,Yao Z ,Li H 2002 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **53** 751
- [24] Xu J X ,Long S Y 2000 *Acta Mech. Sin.* **32** 566 (in Chinese) [许敬晓、龙述尧 2000 力学学报 **32** 566]
- [25] Cheng Y M ,Chen M J 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 181 (in Chinese)
- [程玉民、陈美娟 2003 力学学报 **35** 181]
- [26] Qin Y X ,Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese)
- [秦义校、程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [27] Li S C ,Cheng Y M 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 496 (in Chinese) [李树忱、程玉民 2004 力学学报 **36** 496]
- [28] Li S C ,Cheng Y M ,Li S C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4760 (in Chinese) [李树忱、程玉民、李术才 2006 物理学报 **55** 4760]
- [29] Cheng Y M ,Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese)
- [程玉民、李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [30] Dai B D ,Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 (in Chinese)
- [戴保东、程玉民 2007 物理学报 **56** 597]

Reproducing kernel particle method with complex variables for elasticity^{*}

Chen Li^{1,2)} Cheng Yu-Min¹⁾

¹⁾ Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China)

²⁾ Department of Mechanical Engineering ,Chang 'an University ,Xi 'an 710064 ,China)

(Received 7 April 2007 ; revised manuscript received 23 April 2007)

Abstract

The reproducing kernel particle method with complex variables is developed in this paper. The advantages of the developed method is that the correction function of a 2-D problem is formed with 1-D basis function. Then ,we apply the method to two-dimensional elasticity ,and the application to two-dimensional elasticity is presented , and the corresponding formulae are obtained. Compared with the conventional reproducing kernel particle method ,the reproducing kernel particle with complex variables developed in this paper has greater precision and computational efficiency. Some examples given in this paper demonstrated the efficiency of the present method.

Keywords : reproducing kernel particle method , reproducing kernel particle method with complex variables , elasticity , meshless method

PACC : 0200 , 0260 , 4630C

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10571118) and Shanghai Leading Academic Discipline Project (Grant No. Y0103).

[†] Corresponding author. E-mail :ymcheng@shu.edu.cn cc ymcheng@sh163.net