

一些直接代数方法的几何解释及应用*

张善卿†

(上海交通大学数学系, 上海 200240)

(杭州电子科技大学图形图像研究所, 杭州 310018)

(2007 年 5 月 17 日收到 2007 年 6 月 22 日收到修改稿)

基于微分方程多边形的概念, 就一些直接代数方法给出了几何解释, 同时将这种解释推广到方程组的情形, 最后以变形 Boussinesq 方程组为例说明了该几何解释的合理性.

关键词: 微分方程, 多边形, 几何解释, 精确解

PACC: 0340K, 0290, 0420J

1. 引言

非线性微分方程精确解的构造在非线性问题的研究中占有很重要的地位, 数学家和物理学家不断给出一些求解的新方法来. 特别是近些年, 随着计算机代数系统功能的日趋完善和强大, 在此领域出现了许多方法, 如双曲正切法^[1,2], Jacobi 椭圆函数展开法^[3-7], 三角函数法^[8,9], Weierstrass 椭圆函数法^[10-12]等等以及它们的各种扩展, 基于这些方法, 人们构造出了非线性微分方程(组)的形式丰富的孤立波解、周期解以及有理解, 给具体的物理解释提供了一定的依据, 具有重要的意义.

纵观这些方法都有一个公共的特性: 首先通过行波约化将非线性微分方程(组)约化为常微分方程(组), 接着假定约化后的常微分方程(组)的解是某一个(一些)可精确求解的常微分方程(组)(如 Riccati 方程, 方便起见, 以下简称简单方程)解的某种组合形式(如多项式形式或有理多项式形式等), 最后将这种假定形式代入到原来的方程, 得到关于组合系数的一个非线性代数方程组, 从而将原来非线性微分方程的求解问题划归为求解一个非线性代数方程组的问题, 即将问题代数化了. 因此, 这些方法可通称为直接代数方法. 在这些方法中, 关键所在是如何寻找那些简单方程, 这也正是以上各种方法的本质区别之处. 能否基于原来方程本身的结

构, 去寻找它所适用的简单方程呢? 回答是肯定的. 最近, 文献[13]的作者基于幂几何方法的思想^[14-16]提出了微分方程多边形的概念, 基于此概念给出了寻找原方程的简单方程的一种行之有效的几何方法, 给上述的直接代数方法给出了形象的几何解释. 这种方法不仅可用来寻找精确解也可用来构造非线性微分方程的变换. 本文将对上述方法进行描述, 并将其推广应用至方程组的情形. 最后, 以具体的实例来说明这种推广和解释的合理性.

2. 算法描述

首先, 引入几个概念. 设 x 是自变量, 而 $y = y(x)$ 是因变量, 称形如 $Cx^p y^q$ 表达式为通常单项式, 其中 C 为任意常数. 而单项式与有限阶导数 $\frac{d^k y}{dx^k}$ 的乘积称为微分单项式. 从而, 微分和式是指通常单项式和微分单项式之和. 给定一个常微分方程

$$\mathcal{O}(y(x), y'(x), y''(x), \dots, x) = 0, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{O}(y(x), y'(x), y''(x), \dots, x)$ 是一个微分和式. 每一个单项式可按如下规则和平面上的一个点建立联系(可理解为其坐标):

$$C_1 x^p y^q \rightarrow (p, q), \quad C_2 \frac{d^k y}{dx^k} \rightarrow (-k, 1), \quad (2)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 当单项式相乘时它们对应的坐标相加. 这样一个常微分方程的所有单项式对应的点集称为其载体. 将载体中的所有点连接起来

* 杭州电子科技大学科研启动基金(批准号: KYS071505001)资助的课题.

† E-mail: Zhangsq71@126.com

形成一个凸多边形,称为常微分方程的多边形. 这样,非线性常微分方程(1)就可由平面上的一个多边形 L_1 来刻画. 多边形的外围由顶点和边组成. 用 $\{\Gamma_j^0\}$ 和 $\{\Gamma_j^1\}$ 分别表示顶点和边. 该多边形的大多数边和顶点定义了原方程的幂或非幂渐进解以及幂展开解^[14-16].

现假定常微分方程(1)的解 $y(x)$ 能用另外一个方程的解 $Y(x)$ 表示出来(后一个方程称为简单方程)即

$$y(x) = T(Y, Y', \dots, x). \quad (3)$$

剩下的问题是如何寻找 $Y(x)$ 满足的简单方程. 将(3)式代入到方程(1)中,得到一个变换后的方程,设其对应的微分多边形是 L_2 . 设简单方程对应的微分多边形是 L_3 . 通过对 L_2 的分析可以构造出 L_3 来. 设 Γ_2^1 是 L_2 的一个边,而 Γ_3^1 是 L_3 的一条边. 假定 Γ_2^1 和 Γ_3^1 分别产生变换后的微分方程和简单方程的幂渐进解. 可以证明:如果 Γ_2^1 和 Γ_3^1 外法向共线,那么相应的渐进解参数完全一致. 和外方向共线的边必须是相互平行的. 因此,合适的多边形 L_3 的所有边或部分边应与 L_2 的边相平行. 除此之外,当多边形 L_3 沿着平面移动时,它的顶点应当包含在变换后的微分方程(用 L_2 刻画)的载体中. 假设我们找到了这样的多边形 L_3 . 这样,我们就能写出简单方程

$$E(Y, Y', \dots, x) = 0. \quad (4)$$

值得注意的是这样的简单方程并不是唯一的. 一般来讲,任何微分方程都可能是简单方程. 但应要求简单方程的阶数应当低于变换后的微分方程的阶数. 但最重要的简单方程是可积方程. 如果能找到简单方程的通解(或特解)的话,那么我们可以按如下方法获得所研究的方程精确解.

设所研究的非线性偏微分方程组为

$$\begin{aligned} P_1(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, \dots) &= 0, \\ P_2(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, \dots) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $u = u(x, t), v = v(x, t)$.

步骤 1 对方程组(5)作行波变换(也可能是其他变换):

$$\xi = k(x - ct), u = u(\xi), v = v(\xi), \quad (6)$$

得到约化后的常微分方程组

$$\begin{aligned} O_1(u, v, u', v', u'', v'', \dots, \xi) &= 0, \\ O_2(u, v, u', v', u'', v'', \dots, \xi) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

步骤 2 对方程组(7)的作奇性分析,给出其解

与某个简单方程的解 $Y(\xi)$ 之间的一种假设关系,比如说

$$u = F_1(Y) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, v = F_2(Y) = \sum_{j=0}^n b_j Y^j. \quad (8)$$

当然,也可给出更复杂的假设,如

$$\begin{aligned} u &= F_1(Y) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i + \sum_{l=1}^m c_l \left(\frac{Y'}{Y}\right)^l, \\ v &= F_2(Y) = \sum_{j=0}^n b_j Y^j + \sum_{k=1}^n d_k \left(\frac{Y'}{Y}\right)^k. \end{aligned} \quad (9)$$

为了讨论方便,本文采用形如(8)式的假定.

步骤 3 将假设(8)代入到方程组(7),得到变换后的常微分方程组

$$\begin{aligned} NO_1(Y, Y', Y'', \dots, \xi) &= 0, \\ NO_2(Y, Y', Y'', \dots, \xi) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

步骤 4 构造常微分方程组(10)中的两个常微分方程的微分多边形,分别记为 L_{1-1}, L_{1-2} ,而它们的交所形成的多边形记作 L_2 .

步骤 5 构造多边形 L_3 ,其刻画对应的简单方程. 多边形 L_3 应具有上面讨论的性质:部分边或全部边平行于 L_2 的边,并且沿平面移动时包含在 L_2 的载体内.

步骤 6 根据 L_3 构造出含有待定参数的简单方程.

步骤 7 确定在变换(8)中以及简单方程中的未知参数.

步骤 8 给出原方程的精确解.

3. 算法举例

下面以变形 Boussinesq 方程组加以说明^[17].

$$\begin{aligned} u_t + v_x + uu_x + \alpha u_{xx} &= 0, \\ v_t + (uv)_x + \beta u_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

对其做行波变换 $u = u(\xi), v = v(\xi), \xi = k(x - ct) + \xi_0$, 于是得到如下常微分方程组:

$$\begin{aligned} -cu' + v' + uw' - k^2 \alpha u''' &= 0, \\ -cv' + u'v + uv' + k^2 \beta u''' &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

利用通常的奇性分析技巧(平衡最高阶导数项和非线性项),于是,可提出如下的假设:

$$\begin{aligned} u &= F(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2, \\ v &= G(Y) = b_0 + b_1 Y + b_2 Y^2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ 是待定参数,而 $Y = Y(\xi)$

是某个待定的简单方程的解. 将(13)式代入到方程组(12)中, 得到一个常微分方程组. 根据上面介绍的常微分方程多边形的知识, 可以得到它们各自的微分多边形 L_2 (两者正好重叠), 该多边形的顶点坐标分别为 $M_1 = (-1, 1), M_2 = (-1, 2), M_3 = (-1, 3), M_4 = (-1, 4), M_5 = (-3, 1), M_6 = (-3, 2)$, 具体如图 1.

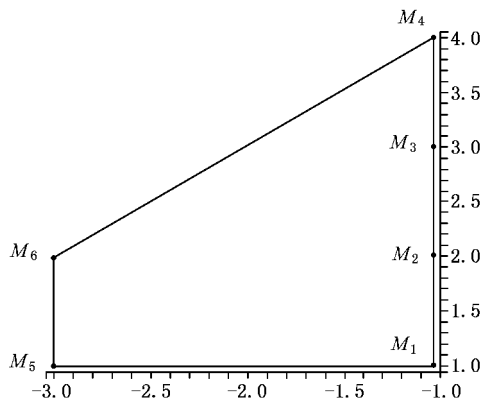


图 1

由于简单方程的选择可能不惟一, 下面就根据简单方程的构造法则给出一些特殊情形.

情形 1 选择简单方程所对应的多边形 $L_3 = \Delta M_2 M_3 M_6$, 由此可构造出一个简单方程

$$Y'^2 = aY^2 + bY^3 + c_0, \quad (14)$$

就可借助此简单方程获得方程(11)的如下形式解:

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= c + \frac{\beta}{2ac} + ack^2 \\ &\quad + 6ack^2 [\operatorname{csch}^2 \xi \pm \operatorname{csch} \xi \coth \xi], \\ v_1(\xi) &= \frac{\beta^2}{4a^2 c^2} - \frac{\beta k^2}{2} \\ &\quad - 3\beta k^2 [\operatorname{csch}^2 \xi \pm \operatorname{csch} \xi \coth \xi]. \end{aligned} \quad (15)$$

情形 2 选择简单方程所对应的多边形 $L_3 = \Delta M_2 M_3 M_4 M_6$, 由此可构造出一个简单方程

$$Y'^2 = aY^2 + bY^3 + c_0 Y^4 + d, \quad (16)$$

就可借助此简单方程获得方程(11)的如下形式解:

$$\begin{aligned} u_2(\xi) &= c + ak^2 c + \frac{\beta}{2ac} + 12k^2 \beta (Y - 2Y^2), \\ v_2(\xi) &= \frac{\beta k^2}{4ac} \left(\frac{1}{ac} + k^2 \right) - \frac{6\beta k^2}{ac} (Y - 2Y^2), \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$Y = \frac{\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi \right)}{4 - \left[1 - \tanh \left(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi \right) \right]^2}.$$

情形 3 选择简单方程对应的多边形 $L_3 = \Delta Q_1 M_1 M_3$, 其中 $Q_1 = (-2, 2)$, 由此可构造另外一个简单方程

$$Y' = a + bY^2, \quad (18)$$

即为 Riccati 方程, 由此可构造出双曲正切形式的解来.

4. 结 论

本文基于常微分方程多边形的概念, 对一些直接代数方法给出了形象的几何解释. 这种方法不仅可用来寻找精确解也可用来构造非线性微分方程的变换. 同时将其推广应用到方程组的情形, 并以变形 Boussinesq 方程组为例说明了这种推广和解释的合理性. 至于其他的一些方法, 如利用耦合的 Riccati 方程组的解来构造非线性微分方程解析解的方法, 如何给出几何解释, 需要进一步的研究.

[1] Li Z B, Zhang S Q 1997 *Acta Math. Sci.* **17** 81 (in Chinese) [李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]
 [2] Li Z B, Yao R X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062 (in Chinese) [李志斌、姚若侠 2001 物理学报 **50** 2062]
 [3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]
 [4] Liu S K, Fu Z T, Liu S D et al 2001 *Phys. Lett. A* **289** 69
 [5] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 6
 [6] Lü D Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4501 (in Chinese) [吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501]

[7] Zheng Q, Yue P, Gong L X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2996 (in Chinese) [郑强、岳萍、龚伦训 2005 物理学报 **54** 2996]
 [8] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Phys. Lett. A* **326** 364
 [9] Yan C T 1996 *Phys. Lett. A* **224** 77
 [10] Kudryashov N A 1990 *Phys. Lett. A* **147** 287
 [11] Kudryashov N A 1990 *J. Appl. Math. Mekh* **54** 373
 [12] Yan Z Y 2004 *Chaos Solitons Frac.* **21** 1013
 [13] Kudryashov N A, Demina M V 2007 *Chaos Solitons Frac.* **33** 1480
 [14] Bruno A D 2004 *Russ Math Surveys* **59** 429
 [15] Kudryashov N A, Efimova O Yu 2006 *Chaos Solitons Frac.* **30** 110

[16] Demina M V , Kudryashov N A 2007 *Chaos Solitons Frac.* **32** 124

[17] Zhang H Q 2005 *Chaos Solitons Frac.* **26** 921

Geometrical explanation and application of some algebraic direct methods^{*}

Zhang Shan-Qing[†]

(*Department of Mathematics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China*)

(*Institute of Graphics and Image , Hangzhou Dianzi University , Hangzhou 310018 , China*)

(Received 17 May 2007 ; revised manuscript received 22 June 2007)

Abstract

Based on the polygons of the differential equation , geometrical explanation for some algebraic direct methods is given , and its generalization of differential system is presented . Finally , the validity of this explanation is illustrated with variant Boussinesq system .

Keywords : differential equation , polygon , geometrical explanation , exact solution

PACC : 0340K , 0290 , 0420J

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation of Hangzhou Dianzi University , China(Grant No. KYS071505001).

[†] E-mail : Zhangsq71@126.com