

混沌振子系统周期解几何特征量分析与 微弱周期信号的定量检测^{*}

李 月¹⁾ 徐 凯¹⁾ 杨宝俊^{2)†} 袁 野¹⁾ 吴 宁¹⁾

1) (吉林大学信息工程系, 长春 130012)

2) (吉林大学地球物理系, 长春 130026)

(2007 年 10 月 11 日收到 2007 年 11 月 19 日收到修改稿)

提出了一种对微弱周期信号的定量检测方法. 分析混沌振子系统在大尺度周期状态下的相对稳定输出时, 发现了混沌振子系统输出周期解的平均面积是一个比较稳定的几何特征量. 该几何特征量与待测信号幅值之间存在比较稳定的单调递增关系. 在一定的参数条件下, 几何特征量精度可达到 $10^{-6} V^2$. 利用混沌系统对随机噪声信号的免疫性和对微弱周期信号的敏感性, 进一步建立了微弱周期信号的定量检测方法. 仿真实验表明, 随着待检测幅度的增加, 在保证检测精度的同时, 抗噪性能也随之增强.

关键词: 混沌振子系统, 大尺度周期相态, 周期解的几何特征量, 微弱周期信号的定量检测

PACC: 0545

1. 引 言

混沌振子系统是一类确定性的非线性动力学方程, 随着策动力幅值的变化, 该系统可呈现周期态、周期分岔、混沌态、间歇混沌和大尺度周期态. Duffing-Holmes 方程属于一种混沌振子系统, 已经从方程组、方程解、分析手段以及它的可能应用等方面加以了研究. Guckenheimer 和 Holmes^[1] 描述了策动力存在和不存在时的相态, 用 Poincaré 映射研究系统运动过程中鞍点流形变化, 计算了系统的全局同宿分叉的位置, 以及从连续周期轨迹族分离出的次谐运动, 利用符号动力学研究了流形相交时出现的 Cantor 集, 描述了跳跃非周期运动和无数不稳定具有任意长周期的周期轨迹特征. 刘曾荣^[2] 研究了线性恢复力项系数与阻力项系数在满足一定关系时系统出现 Smale 马蹄变换意义下的混沌, 存在可列个奇数阶次的次谐周期解. 该系统从强迫振动发展到混沌运动具有三个条件, 即非线性、耗散和局部不稳定, 其中非线性保证运动形态的多样化, 耗散从整体上保证运动的有限范围, 局部不稳定及伴有的

鞍点保证运动的非周期性^[3]. 李月等^[4] 利用 Yoshizawa 关于周期解唯一性的三组充要条件^[5], 证明了恢复力项为 $(-x^3 + x^5)$ 的 Duffing 方程周期解的唯一存在, 以及这类方程的灵敏度和稳定性. 上述成果主要涉及系统的演变状态和研究分析手段, 而对于系统处于稳定的大尺度周期相态时解的基本特征论述较少.

本文较详细论述一类混沌振子系统处于大尺度周期相态时其周期解的一个相当稳定的几何特征量, 即周期平均面积 $(\bar{S})$. 利用计算步长的变化分析 $\bar{S}$ 的误差范围, 进一步建立一个定量检测微弱周期信号幅度的方法, 补充和发展现有的信号检测技术^[6-10].

2. 混沌振子系统周期解的几何特征分析

2.1. 几何特征

对于 Holmes 型 Duffing 方程这一类典型的非线性振动方程, 表达式为

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \epsilon \gamma \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中, δ 为阻尼系数, $-x + x^3$ 为非线性恢复力,

^{*} 国家自然科学基金(批准号 240574051 和 40774054)和吉林省科技发展计划项目(批准号 20050526)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: yangbaojun@jlu.edu.cn

$\gamma \cos(\omega t)$ 表示一激励幅值为 γ 、频率为 ω 的周期摄动. 当 $\varepsilon \neq 0$ 时系统表现出复杂的动力学行为, 即随着信号幅值 γ 由零开始增加, 系统将依次出现周期态, 周期分岔, 混沌态, 间歇混沌, 大尺度周期态这五种状态.

由于 Duffing 方程为非线性方程, 它不存在精确的解析解, 故只能依靠计算机仿真来求出它的数值解, 不同大小的策动力将影响数值解的不同状态. 即使方程的解处于同一状态, 如都为大尺度周期状态, 策动力的微小变化仍然会引起解的微小变化. 系统处于大尺度周期态时, 系统的解周期近似等于策动力的周期, 如图 1 所示 (图中实线表示的是内策力, 虚线表示的是系统的解, 可见两者的周期几乎一致).

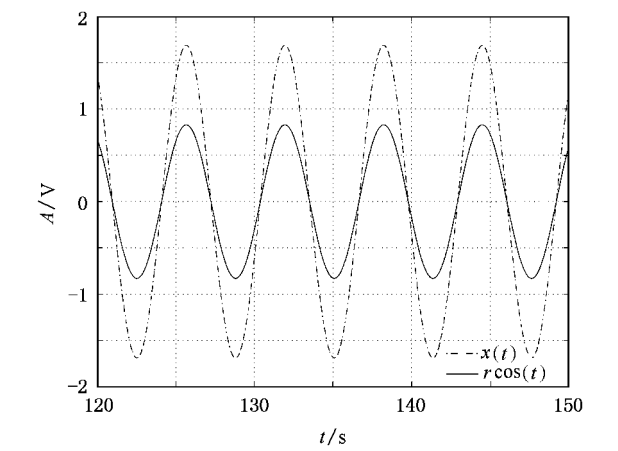


图 1 系统的周期解与策动力周期的比较

通过计算发现, 策动力幅度的变化和系统解的周期平均面积的变化之间近乎存在单调函数的关系, 可以将该周期平均面积作为稳定周期相态的一

种几何特征量. 由于处于大尺度周期态系统的方程解并不是严格的周期解, 因此以上系统解的单周期面积是通过求多个周期的面积的统计平均获得. 而每个周期的面积是通过将周期内的每个面积元 (将这个周期划分为若干个小梯形, 每个小梯形便是一个面积元, 面积元越多, 则计算越精确) 积分求得. 面积元的面积计算近似如下:

$$\Delta s = 0.5(x_i + x_{i+1})\Delta t, \tag{2}$$

其中, x_i 为系统解在时刻 i 时的值, Δt 为小梯形面积元底边边长 (可取为时间采样间隔).

则在第 j 个周期内的面积为

$$s_j = \sum_{i=1}^{N_j} 0.5(x_i + x_{i+1})\Delta t, \tag{3}$$

其中 N_j 表示的是第 j 个周期内的面积元个数.

若选取 k 个周期的面积, 然后取其平均, 记作某一策动力幅度下系统解的周期平均面积 $\bar{s}$, 则 $\bar{s}$ 为

$$\bar{s} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{N_j} 0.5(x_i + x_{i+1})\Delta t. \tag{4}$$

2.2. 几何特征量的数值分析

由 (1) 式所构成的混沌振子系统在呈现大尺度周期相态时, 由 (4) 式所计算的系统周期解的几何特征量 $\bar{s}$ 与幅值步长 h 、周期解频率 ω 、周期个数 k 等参数有关. 例如仅考虑步长 h 的影响, 取 $h = 0.001 \text{ V}$, 计算 $\bar{s}$ 与 γ 的关系, 可得表 1 的结果. 分析表 1 数据可知, 随着 γ 的递增, $\bar{s}$ 也递增. 在 γ 变化的不同阶段, 两者增加幅度不同. $\gamma: 0.830 \text{ V} \rightarrow 0.831 \text{ V} \rightarrow 0.832 \text{ V}; 0.866 \text{ V} \rightarrow 0.867 \text{ V} \rightarrow 0.868 \text{ V}; 0.902 \text{ V} \rightarrow 0.903 \text{ V} \rightarrow 0.904 \text{ V}$, 与上述 3 个不同阶段

表 1 幅值步长 $h = 0.001 \text{ V}$ 时几何特征量 $\bar{s}$ 与幅值 γ 的关系

$\gamma, \Delta\gamma = 0.001 \text{ V}$	0.830	0.840	0.850	0.860	0.870	0.880	0.890	0.900
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	0.839	0.849	0.859	0.869	0.879	0.889	0.899	0.909
$\bar{s} (100\text{T})$	5.9824	6.0317	6.0656	6.0926	6.1146	6.1354	6.1542	6.1718
	5.9874	6.0356	6.0684	6.0945	6.1170	6.1374	6.1560	6.1735
	5.9938	6.0392	6.0711	6.0970	6.1190	6.1394	6.1578	6.1746
	5.9994	6.0430	6.0738	6.0992	6.1210	6.1412	6.1596	6.1769
	6.0051	6.0466	6.0766	6.1015	6.1234	6.1430	6.1614	6.1772
	6.0099	6.0494	6.0793	6.1038	6.1257	6.1450	6.1631	6.1787
	6.0151	6.0530	6.0818	6.1059	6.1277	6.1469	6.1649	6.1802
	6.0189	6.0563	6.0845	6.1082	6.1295	6.1488	6.1666	6.1816
	6.0235	6.0596	6.0874	6.1109	6.1316	6.1507	6.1682	6.1832
	6.0280	6.0623	6.0901	6.1126	6.1334	6.1525	6.1701	6.1846

$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma)$ 相应的 $\bar{S}(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}) : 5.9820V^2 \rightarrow 5.9874V^2 \rightarrow 5.9938V^2 ; 6.1059V^2 \rightarrow 6.1082V^2 \rightarrow 6.1109V^2 ; 6.1746V^2 \rightarrow 6.1769V^2 \rightarrow 6.1772V^2$. 它们的比例分别为 $\gamma : 1 : 1.0012 : 1.0024 ; 1 : 1.0012 : 1.0023 ; 1 : 1.0011 : 1.0022$. $\bar{S} : 1 : 1.0009 : 1.0020 ; 1 : 1.0004 :$

$1.0008 ; 1 : 1.00037 : 1.00042$. 显然, $\gamma_1 - \bar{S}_1, \gamma_2 - \bar{S}_2, \gamma_3 - \bar{S}_3$ 具有不同的变化程度. 为了更清楚描述步长 h 变化对 $\bar{S}-\gamma$ 关系的影响, 取 $h = 0.0006, 0.0007, 0.0008, 0.0009, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005V$, 计算得到图 2.

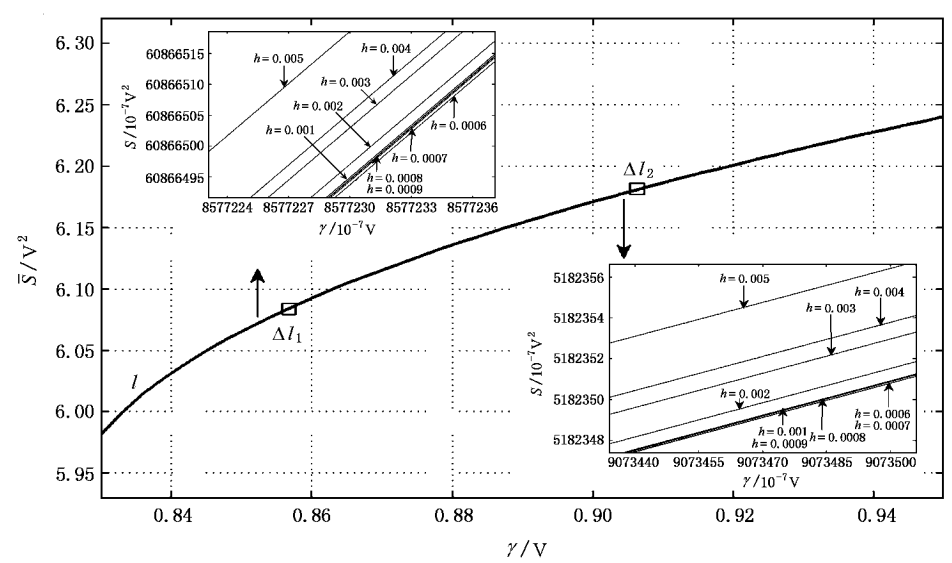


图2 不同幅值步长 h 对 $\bar{S}-\gamma$ 关系曲线离散的影响

图 2 上的 l 曲线由 9 根线组成, 为清楚表明这一结果, 把 l 上 Δl_1 段和 Δl_2 加以放大, 分别位于图 2 中左上角和右下角. 左上角放大部分: $h = 0.0006, 0.0007, 0.0008, 0.0009$ 和 0.001 等 5 根线更集中, 其中 0.0008 和 0.0009 相应的 2 根线更接近. 对应同一个 γ 值, 与 9 个 h 相应的 $\bar{S}$ 离散范围 $\Delta \bar{S}_{\max 1} < 0.0000025$. $\Delta \bar{S}_{\max 1}$ 表明 h 的变化引起 $\bar{S}-\gamma$ 误差比较小. 右下角部分: 与左上角相似, 0.0009 和 0.001 相应的 2 根线更接近. 对应同一个 γ 值, 与 9 个 h 相应的 $\bar{S}$ 离散范围 $\Delta \bar{S}_{\max 2} < 0.0000007$. $\Delta \bar{S}_{\max 2} > \Delta \bar{S}_{\max 1}$, 表明 l 线上不同部位的计算误差不同. 另一方面, h 的取值与计算量有关, 由图 2 $\Delta l_1, \Delta l_2$ 放大部分可知, 以 9 根线中更集中部分为准, h 可取为 $0.001V$, 所产生的 $\bar{S}$ 计算误差更小, 分别为 0.00000005 和 0.00000002 , 即步长 h 取作 $0.001V$ 对于整个 l 线都是可以接受的数值.

上述对混沌振子系统周期解几何特征量 $\bar{S}$ 的数值分析表明, $\bar{S}$ 是 γ, h 的函数, 由 h 的一定范围的变化引起 $\bar{S}$ 的误差比较小. 这是因为 $\bar{S}$ 与系统周期解相对应, 在系统呈现大尺度周期相态时该周期解是相对稳定的, 所以用同一种方式去度量解的几

何特征时将产生较小的误差, 同时说明用周期解几何特征量 $\bar{S}$ 表征该系统在呈现大尺度周期相态时解的一种形态特征是合理的. 这是下面提出的检测微弱周期信号幅值方法的数理基础.

3. 检测方法与仿真实验

3.1. 由周期相态解的几何特征量检测微弱信号的方法

构造如下混沌检测系统：

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t) + s(t), \quad (5)$$

其中 $s(t) = \gamma_1 \cos(\omega t) + n(t)$, $\gamma_1 \cos(\omega t)$ 为待检测的微弱谐波信号, $n(t)$ 为随机噪声, 可以为白噪声或色噪声, 高斯噪声或非高斯噪声. 检测过程分三步：

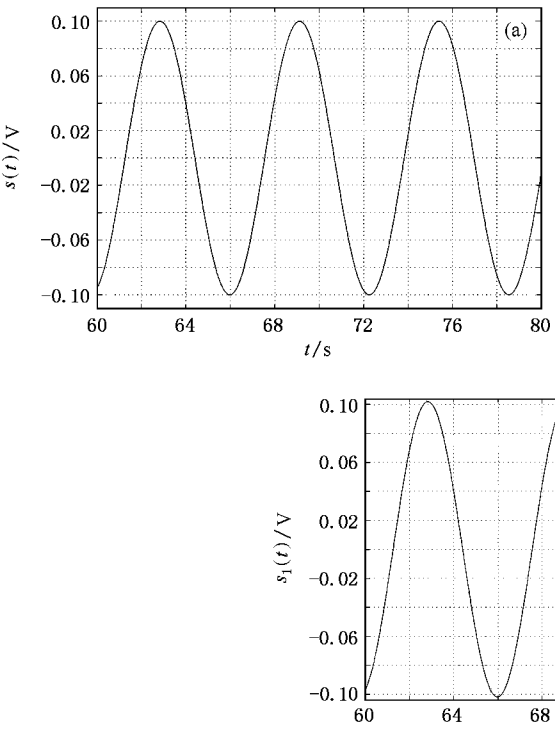
- 1) 首先不加入待测信号, 调节策动力的幅度使系统处于稳定周期相态, 然后以一定的步长增加策动力的幅度, 分别计算单周期的面积；
- 2) 然后利用得到的数据, 可以用径向基函数 (RBF) 网络^[11-14] 或 Levenberg-Marquardt 法 (L-M)^[15] 来学习和训练, 拟合出几何特征量与幅值之间的关系曲线；

3)加入待测信号,调节系统内策动力幅度 γ 为临界值 γ_c ,使系统处于稳定周期相态,计算出几何特征量,然后将其作为经过 L-M 法拟合后曲线的输入,曲线的输出即为 $\gamma_o = \gamma_c + \gamma_1$,减去 γ_c 即得到待测信号的幅度 γ_1 .

3.2. 仿真

加入噪声 $n(t)$,在满足最小检测下限 -20 dB(即最小检测幅度为 0.1 V)的条件下,我们作如下试验:

1)在待测信号幅度为 $\gamma_1 = 0.1\text{V}$ 的情况下,加入功率为 0.01W 的高斯白噪声,经多次实验,得如下数据:



$\bar{\gamma}_o = 0.9519\text{V}, \bar{\gamma}'_1 = \bar{\gamma}_o - \gamma_c = 0.1019\text{V}$
相对误差:

$$\delta = \left| \frac{\bar{\gamma}'_1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right| \times 100\% = 1.88\% ;$$

绝对误差:

$$\alpha = 0.1019 - 0.1 = 0.0019\text{V} ;$$

信噪比:

$$\text{SNR} = 10\lg \frac{(0.5) \times (0.1)^2}{0.01} = -3.01 \text{ dB}.$$

待测信号 $s(t)$ 与检测后恢复信号 $s_1(t)$ 的波形如图 3 所示.

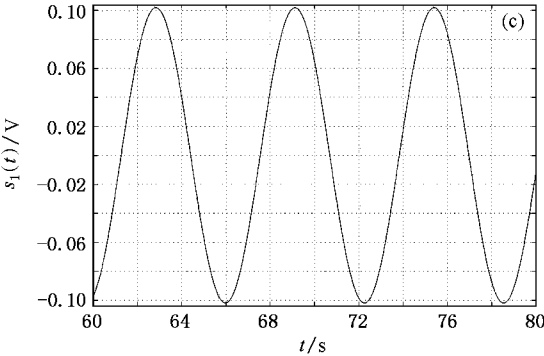
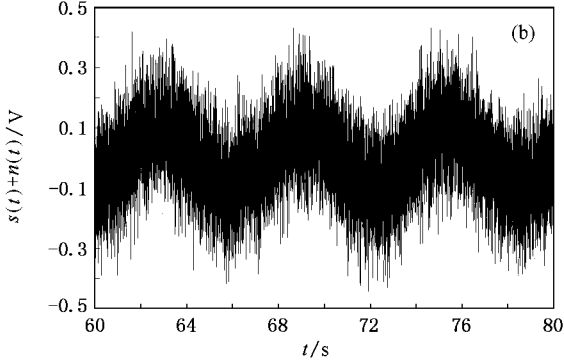


图 3 待测信号 $s(t)$ 与检测后恢复信号 $s_1(t)$ 的波形 (a)待测信号 $s(t)$;(b)噪声淹没下的信号 $s(t) + n(t)$;(c)检测出的信号 $s_1(t)$

2)在待测信号幅度为 $\gamma_1 = 0.1\text{V}$ 的情况下,加入功率为 0.1W 的高斯白噪声,经多次实验,得如下数据:

$$\bar{\gamma}_o = 0.9528\text{V}, \bar{\gamma}'_1 = \bar{\gamma}_o - \gamma_c = 0.1028\text{V}.$$

相对误差:

$$\delta = \left| \frac{\bar{\gamma}'_1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right| \times 100\% = 2.81\% ;$$

绝对误差:

$$\alpha = 0.1028 - 0.1 = 0.0028\text{V}$$

信噪比:

$$\text{SNR} = 10\lg \frac{(0.5) \times (0.1)^2}{0.1} = -13.01 \text{ dB}.$$

3)在待测信号幅度为 $\gamma_1 = 0.1\text{V}$ 的情况下,加入功率为 0.5 W 的高斯白噪声,经多次实验,得如下数据:

$$\bar{\gamma}_o = 0.9540\text{V}, \bar{\gamma}'_1 = \bar{\gamma}_o - \gamma_c = 0.1040\text{V}.$$

相对误差:

$$\delta = \left| \frac{\bar{\gamma}'_1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right| \times 100\% = 4.03\% ;$$

绝对误差:

$$\alpha = 0.1040 - 0.1 = 0.0040\text{V} ;$$

信噪比:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{(0.5) \times (0.1)^2}{0.5} \\ = -20 \text{ dB}.$$

上述仿真数据表明,随着噪声功率的增加,系统在保证最小检测下限的同时,检测误差有所加大.检测误差来源于面积计算误差及 $L-M$ 的曲线拟合误差.混沌系统对噪声具有一定的免疫力,这就使得加性噪声的引入不会使系统发生相变,但会使系统的大尺度周期轨道变得粗糙,即系统的周期解波形发生一定畸变,因而随机噪声使混沌系统稳定周期解的几何特征量出现一定的畸变,从而影响了检测精度.

4. 结论与讨论

4.1. 结 论

1) 分析混沌振子系统在大尺度周期相态条件下解的相对稳定波形,发现混沌振子系统周期解的一个比较稳定的几何特征量,即系统周期解的平均面积,该面积与策动力幅值间存在比较稳定的单调递

增关系.

2) 基于上述分析,利用系统对随机噪声信号的免疫性和对微弱周期信号的敏感性,建立微弱周期信号的定量检测方法.仿真实验表明,随着待检测信号幅度的增加,在一定检测精度条件约束下,抗噪性能也随之增强.

4.2. 讨 论

1) 混沌振子系统在周期策动力作用下,当呈现大尺度周期相态时,系统几何特征量 $\bar{S}$ 与策动力幅度所存在的单调递增关系受控于多个参量,其中计算步长 h 可使该关系曲线具有较复杂的‘族’特点;由于 $\bar{S}$ 是系统处在周期解情况时的结果,而周期解可因策动力混有随机噪声而发生不同程度的畸变,进而影响到 $\bar{S}$ 的准确性.这时系统的几何特征量仍然存在,不过它的稳定性、准确性都会因噪声强度的变化而变化.

2) 本文的讨论对于策动力频率 $\omega = 1$ 进行,当 ω 增大使系统周期解变化增快,即使所探讨的过程依然存在,也可以预测到系统几何特征量 $\bar{S}$ 、待测信号幅度 γ ,甚至所述的单调递增关系等都可能发生一些新的变化.

-
- [1] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag Press)
 - [2] Liu Z R 1994 *Perturbation Criteria for Chaos* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [刘曾荣 1994 混沌的微扰判据(上海:上海科技教育出版社)]
 - [3] Liu S S, Liu S D, Tan B K 1996 *Nonlinear Atmospheric Dynamics* (Beijing: National Defense Industry Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达、谭本旭 1996 非线性大气动力学(北京:国防工业出版社)]
 - [4] Li Y, Yang B J, Lin H B, Liu X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese) [李 月、杨宝俊、林红波、刘晓华 2005 物理学报 **54** 1994]
 - [5] Sansone G, Conti R trans by Huang Q C, Jin C F, Shi X F 1983 *Equazioni Differenziali non Lineari* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [桑森 G、康蒂 R 著 黄启昌、金成桴、史希福译 1983 非线性微分方程(北京:科学出版社)]
 - [6] Haykin S, Li X B 1999 *Proceeding of the IEEE* **85** 95
 - [7] Wang G Y, Zheng W, He S L 2002 *Signal Processing* **82** 103
 - [8] Wang G Y, He S L 2003 *IEEE Trans. on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications* **50** 945
 - [9] Chen L, Wang D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5098 (in Chinese) [谌 龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5098]
 - [10] Xing H Y, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3771 (in Chinese) [行鸿彦、徐 伟 2007 物理学报 **56** 3771]
 - [11] Schilling R J, Robert J C, James J 2001 *IEEE Trans. Neural Networks* **12** 1
 - [12] Henry H 2000 *IEEE Trans. Neural Networks* **5** 1131
 - [13] Guo H J, Liu J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4080 (in Chinese) [郭会军、刘君华 2004 物理学报 **53** 4080]
 - [14] Kong Z Q, Liu D, Ren H P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese) [孔志强、刘 丁、任海鹏 2003 物理学报 **52** 531]
 - [15] Wu F L, Shi Z K, Yang X H 2007 *Journal of Ship Mechanics* **11** 136 (in Chinese) [吴方良、石仲 、杨向晖 2007 船舶力学 **11** 136]

Analysis of the geometric characteristic quantity of the periodic solutions of the chaotic oscillator system and the quantitative detection of weak periodic signal^{*}

Li Yue¹⁾ Xu Kai¹⁾ Yang Bao-Jun^{2)†} Yuan Ye¹⁾ Wu Ning¹⁾

1) (Department of Information Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

2) (Department of Geophysics, Jilin University, Changchun 130026, China)

(Received 11 October 2007; revised manuscript received 19 November 2007)

Abstract

We proposed a quantitative detection method for weak periodic signal in this paper. A result is obtained when analyzing the stable output of chaotic oscillator system in the large-scale periodic state, which shows that the average area of the periodic solution of the chaotic oscillator system is a steady geometric characteristic quantity of periodic solutions of the chaotic oscillator system. There is a steadily and monotonically increasing relation between the average area and the amplitude to be detected. When some parameters are defined, the precision of the geometric characteristic quantity can reach $10^{-6} V^2$. The further quantitative detection of weak signals is built based on the two characteristics of the chaos system, namely the immunity to noise and sensitivity to weak signal. The simulation experiments shown that the immunity to noise will be enhanced along with the increase of amplitude detected while the precision can be guaranteed.

Keywords: chaotic oscillator system, large-scale periodic phase state, geometric characteristic quantity of periodic solutions, quantificational detection of weak periodic signal

PACC: 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40574051 and 40774054) and the Technology Development Plan Project of Jilin Province, China (Grant No. 20050526).

[†] Corresponding author. E-mail: yangbaojun@jlu.edu.cn