

双曲正割光束在弱非局域非线性体材料中的 传输特性研究^{*}

肖 毅^{1,2)} 郭 旗¹⁾† 杨湘波³⁾ 兰 胜¹⁾

1)(华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室 广州 510631)

2)(暨南大学光电工程系 广州 510632)

3)(华南师范大学激光生命科学研究所 广州 510631)

(2007 年 7 月 2 日收到, 2007 年 9 月 25 日收到修改稿)

利用变分法研究了 $(2+1)$ 维圆对称双曲正割光束在弱非局域非线性介质中的传输, 得到了描述光束束宽、相位、波前曲率、振幅演化的一组微分方程, 并得到了光束做孤子传输的临界功率, 通过稳定性分析给出了弱非局域情形非局域效应对光束传输的稳定作用的定量描述, 从而自然地阐述了由不稳定的 $(2+1)$ 维克尔孤子到稳定的 $(2+1)$ 维弱非局域孤子的过渡情形. 数值模拟的结果验证了变分计算结果的正确性, 并说明圆对称的双曲正割函数是 $(2+1)$ 维弱非局域空间孤子的很好的近似.

关键词: 双曲正割光束, 弱非局域非线性介质, 空间光孤子

PACC: 4265S, 4265J

1. 引言

在非线性介质中, 与光强有关的非线性折射率是空间光孤子形成的重要因素. 介质非线性响应的非局域模型认为介质中某个点的非线性折射率与该点一定范围邻域(含该点)的光强都有关系, 实际上提供了比局域模型更接近事物原貌的刻画. 1997 年, Snyder 等人^[1]在强非局域条件下(即非局域响应函数的特征宽度比光束的束宽大很多)将非局域非线性薛定谔方程(NNLSE)近似为一线性方程, 并得到了称之为“accessible soliton”的孤子解, 由此掀起了非局域空间孤子的研究热潮. 文献[2]利用变分法研究了非局域响应函数为自变量的幂函数的介质中的空间孤子. 文献[3]发现非局域孤子的宽度存在一个下限, 即不能小于载波波长的 $1/2$. 文献[4]以隐函数的形式得到了弱非局域介质中 $(1+1)$ 维亮孤子和 $(1+1)$ 维暗孤子的解析解. 非局域孤子与二次孤子(quadratic soliton)的内在相似性^[5]为人们提供了一个认识二次孤子的新视角. 强非局域孤子具有

比局域孤子大得多的相移^[6], 不仅如此, 当一弱一强两光束在强非局域介质中传输时, 弱光束也能在很短的介质长度内产生大的相移^[7]. 强非局域空间孤子间(只要非局域程度足够强)的相互作用与它们的相对相位无关, 总是相互吸引^[8]. $(2+1)$ 维部分非相干光束在非局域介质中的传输^[9], $(1+1)$ 维光束在亚强非局域介质^[10]以及考虑损耗的非局域介质^[11]中的传输也得到了研究. 在强非局域介质中可以存在非圆对称孤子^[1, 12, 13]. 将微扰理论方法用于研究一般非局域情形的空间孤子^[14], 不仅克服了非局域程度以及非局域响应函数的局限, 而且其二级近似得到的孤子解具有更高的准确度. 非局域非线性薛定谔方程的守恒量^[15]、不同非局域响应下的强非局域空间孤子^[16]、强非局域介质中的涡旋光孤子^[17]、空间相位调制对强非局域空间孤子的影响^[18]也都相继得到了研究. 几乎与非局域孤子的理论研究相平行, Assanto 小组对向列型液晶(nematic liquid crystal, 简称 NLC)中的空间孤子及其相互作用做了大量卓有成效的实验研究^[19–24], 而 NLC 正是一种强非局域介质. 非圆对称孤子以及环状孤子在另一种

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10474023 和 10674050)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20060574006)、广东省自然科学基金(批准号: 05005918)、广东省高等学校科技创新团队项目(批准号: 06CXTD005)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: guoq@scnu.edu.cn

强非局域介质铅玻璃中也得到了实验证实^[13].

同样引起人们注意的是非局域效应对孤子稳定性的影响. 人们早就知道在克尔非线性介质中, (2+1)维的空间孤子是不稳定的^[25-28],即如果光束的功率稍大于临界功率,则传输有限距离便会出现自聚焦,如果光束的功率稍小于临界功率,传输中就会持续扩散.而非局域效应的确能够使得(2+1)维的克尔空间孤子获得抗干扰的能力,从而在体材料中能够稳定传输.文献[29,30]研究了在非局域克尔材料中平面波的调制不稳定性.文献[31]给出了一个简单而严格的证据表明非局域效应可以阻止孤子的塌陷,只要非局域响应函数是对称的,并且具有正的、有限大小的傅里叶谱.非局域矢量孤子的稳定性^[32]以及非局域涡旋孤子的稳定性^[33]也得到了研究.一个逻辑上自然而然的问题是由不稳定的(2+1)维克尔孤子到稳定的(2+1)维弱非局域孤子之间的过渡情形是怎样的呢?前述文献并未涉及这个问题.本文利用变分方法研究了(2+1)维圆对称双曲正割光束在弱非局域克尔型介质中的传输规律,得到了关于变分参数的一组微分方程,并得到了光束做孤子传输的临界功率;通过稳定性分析给出了弱非局域情形非局域效应对光束传输的稳定作用的定量描述,从而自洽地阐述了由不稳定的(2+1)维克尔孤子到稳定的(2+1)维弱非局域孤子的过渡情形.数值模拟的结果验证了变分计算结果的正确性,也说明了(2+1)维圆对称双曲正割函数是(2+1)维弱非局域孤子形状的很好的近似.

2. 理论模型和变分近似

不考虑损耗,在傍轴近似下(2+1)维光束在非局域非线性克尔介质中的传输由如下非局域非线性薛定谔方程描述^[6,29]:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + \rho \int R(x-x', y-y') \times |\varphi(x', y', z)|^2 dx' dy' = 0, \quad (1)$$

其中 $\varphi(x, y, z)$ 是傍轴光束, $\mu = 1/2k$, $k = \omega n_0/c$ 是介质中的波数, $\rho = k\eta$, 对于自聚焦介质 $\eta > 0$, 对于自散焦介质 $\eta < 0$, $R(x, y)$ 是对称的非局域介质的响应函数,满足归一化条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) dx dy = 1. \quad (2)$$

方程(1)的拉格朗日密度函数是^[2,10,11]

$$L = L_1 + L_2, \quad (3)$$

$$L_1 = \frac{i}{2} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) - \mu \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \right), \quad (4)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \rho |\varphi|^2 \int R(x-x', y-y') \times |\varphi(x', y', z)|^2 dx' dy', \quad (5)$$

其中*号表示复共轭.介质的非局域程度可以用介质的响应函数 $R(x)$ 的特征宽度与光束 $\varphi(x, y, z)$ 的束宽之比较来表征.在弱非局域情形,即前者远小于后者情形,可以将(5)式中的光强 $|\varphi(x', y', z)|^2$ 在 (x, y) 处展开,那么(5)式可化为

$$L_2 = \frac{1}{2} \rho |\varphi|^2 \left[|\varphi|^2 + \gamma \left(\frac{\partial^2 |\varphi|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |\varphi|}{\partial y^2} \right) \right], \quad (6)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) x^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) y^2 dx dy, \quad (7)$$

文献[4]以隐函数的形式得到了在弱非局域介质中(1+1)维的孤子解,表现为与局域克尔孤子的双曲正割形状相接近的一种形状,故本文选取(2+1)维圆对称双曲正割光束作为方程(1)的试探解:

$$\varphi(x, y, z) = A(z) \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{u(z)} \right] \times \exp[i\theta(z) + i\alpha(z)(x^2 + y^2)] \quad (8)$$

其中振幅 A ,束宽 w ,相位 θ 和波前曲率 c 都随传输坐标而变.利用通常的变分程序^[34],可以得到关于变分参数的微分方程如下:

$$\frac{dw}{dz} = 4\mu cw, \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{A^2 \rho (4\ln 2 - 1)}{4\ln 2} - \frac{\mu(1 + 2\ln 2)}{3w^2 \ln 2} - \frac{2A^2 \gamma \rho (1 + 8\ln 2)}{15w^2 \ln 2}, \quad (10)$$

$$\frac{dc}{dz} = -4\mu c^2 + \frac{4\rho(1 + 2\ln 2)}{27w^4 \operatorname{zeta}[3]} + \frac{2A^2 \rho (1 - 4\ln 2)}{27w^2 \operatorname{zeta}[3]} + \frac{8A^2 \gamma \rho (1 + 8\ln 2)}{135w^4 \operatorname{zeta}[3]}, \quad (11)$$

以及光束的功率守恒:

$$P = (2\pi \ln 2) A^2 w^2 = (2\pi \ln 2) A_0^2 w_0^2 = P_0, \quad (12)$$

其中,雷曼函数 $\text{zeta}[3] \approx 1.202$, A_0 , w_0 和 P_0 分别是光束的初始振幅、初始束宽和初始功率,光束功率

$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx dy$. 利用(9)(11)以及(12)式可得到束宽方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} = & \frac{16\mu^2(1+2\ln 2)}{27w^3\text{zeta}[3]} + \frac{4\mu\alpha(1-4\ln 2)P_0}{27w^3\pi\ln 2\text{zeta}[3]} \\ & + \frac{16\gamma\mu\alpha(1+8\ln 2)P_0}{135w^5\pi\ln 2\text{zeta}[3]}, \end{aligned} \quad (13)$$

假设光束的束宽在传输中一直保持初始束宽值 w_0 , 由(13)式可求得圆对称双曲正割光束在弱非局域克尔介质中做孤子传输的临界功率

$$P_c = \frac{20\pi\ln 2(1+2\ln 2)\mu}{\alpha[20\ln 2-5-4\gamma(1+8\ln 2)\gamma w_0^2]}, \quad (14)$$

考虑到 $P_c > 0$, 由(14)式给出本文所述弱非局域模型的限制条件

$$0 < \frac{2\gamma}{w_0^2} < \frac{20\ln 2-5}{\alpha(1+8\ln 2)} \approx 0.677, \quad (15)$$

引入归一化束宽 $\sigma = w/w_0$, 瑞利距离 $\xi = z/kw_0^2$, 同时利用(14)式, 将束宽方程(13)化为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma}{d\xi^2} = & \frac{4(1+2\ln 2)}{27\text{zeta}[3]\sigma^3} \\ & + \frac{2\alpha(1-4\ln 2)(1+2\ln 2)\Omega}{27\text{zeta}[3][20\ln 2-5-\alpha(1+8\ln 2)\gamma]\sigma^3} \\ & + \frac{8(1+8\ln 2)(1+2\ln 2)\Omega\Gamma}{27\text{zeta}[3][20\ln 2-5-\alpha(1+8\ln 2)\gamma]\sigma^5}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\Omega = P_0/P_c$, $\Gamma = 2\gamma/w_0^2$. 为了对光束的归一化束宽的演化有一个感性的认识, 我们首先在初始条件 $\alpha(0)=1$, $\sigma_\xi(0)=0$ 下(即假设光束在其束腰处入射介质)数值求解方程(16), 其结果反映在图1和图2中.

图1和图2中, 当 $P_0 = P_c$, 光束做孤子传输(束宽保持不变)这一点对于不同的非局域程度都是一样的. 当光束功率偏离临界功率时, 不同非局域程度的差别就显露出来了, 在局域情况($\Gamma=0$)下, 如果光束功率稍小于临界功率, 光束就会发散, 如果光束功率稍大于临界功率, 光束就会自聚焦; 当非局域效应强到一定程度, 如果存在功率的偏差, 光束就会周期性地展宽及压缩, 呈现呼吸状结构, 不会动辄塌陷或扩散. 随着非局域程度的进一步增大, 束宽的振荡幅度以及振荡周期都会进一步减小. 非局域效应对光束传输的稳定作用是显而易见的. 图1和图2所反映的是光束功率相对于临界功率的偏差为

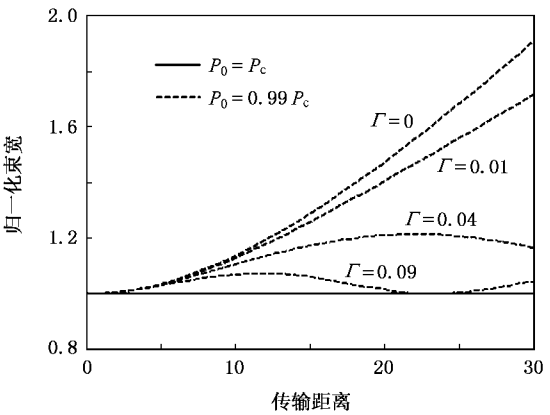


图1 归一化束宽随传输距离的演化曲线, 实线为 $P_0 = P_c$ 时的孤子传输情形, 虚线为 $P_0 = 0.99 P_c$ 时不同非局域程度下归一化束宽的演化情形

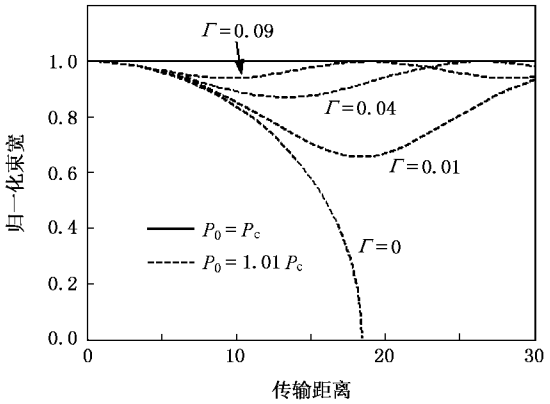


图2 归一化束宽随传输距离的演化曲线, 实线为 $P_0 = P_c$ 时的孤子传输情形, 虚线为 $P_0 = 1.01 P_c$ 时不同非局域程度下归一化束宽的演化情形

$\pm 1\%$ 的情形, 可以想见, 光束的相对功率偏差越大, 那么它的稳定传输就需要越强的非局域效应.

3. 势函数及稳定性分析

下面确定 $(2+1)$ 维圆对称双曲正割光束在弱非局域介质中稳定传输所要求的非局域程度. 将(16)式积分一次, 在 $\alpha(0)=1$, $\sigma_\xi(0)=0$ 的初始条件下, 得到

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\xi} \right)^2 + U(\sigma) = 0, \quad (17)$$

其中势函数 $U(\sigma)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} U(\sigma) = & \frac{\alpha(1+2\ln 2)}{27\text{zeta}[3]} \left(\frac{1}{\sigma^2} - 1 \right) \\ & + \frac{1\alpha(1-4\ln 2)(1+2\ln 2)\Omega}{27\text{zeta}[3][20\ln 2-5-\alpha(1+8\ln 2)\gamma]} \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{1}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{\mathfrak{X} (1 + 8\ln 2) \mathfrak{X} (1 + 2\ln 2) \Omega \Gamma}{27\zeta_3 [3 \mathfrak{I} (20\ln 2 - 5 - \mathfrak{X} (1 + 8\ln 2) \Gamma)]} \left(\frac{1}{\sigma^4} - 1 \right). \quad (18)$$

方程 (17) 可以看作描述一个单位质量的“粒子”在势阱 $U(\sigma) \leq 0$ 中运动的方程. 下面将讨论在限制性条件 (15) 确定的非局域程度范围内“粒子”在势阱 $U(\sigma) \leq 0$ 中的运动情形. 方程 $U(\sigma) = 0$ 的根为

$$\sigma_1 = -1,$$

$$\sigma_2 = 1,$$

$$\sigma_3 = -\sqrt{\frac{(1 + 8\ln 2) \Omega \Gamma}{\mathfrak{X} (4\ln 2 - 1) \mathfrak{X} (\Omega - 1) - (1 + 8\ln 2) \mathfrak{X} (\Omega - 2) \Gamma}},$$

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{(1 + 8\ln 2) \Omega \Gamma}{\mathfrak{X} (4\ln 2 - 1) \mathfrak{X} (\Omega - 1) - (1 + 8\ln 2) \mathfrak{X} (\Omega - 2) \Gamma}}. \quad (19)$$

其中 σ_1 和 σ_3 是假根 (考虑到 σ 的物理含义), 舍去. “粒子”在势阱中的运动对应着光束的归一化束宽的值在 1 和 σ_4 之间振荡. 当 $\Omega = 1$ 时, 由 (19) 式得到 $\sigma_4 = 1$, 势阱 $U(\sigma) \leq 0$ 退化为一个点, 如图 3 所示, 这是未受功率扰动的孤子的情形. 当 $\Omega < 1$ 时, σ_4 或者是一个大于 1 的实根, 或者是一个虚根. 如果 σ_4 是一个大于 1 的实根, “粒子”就可以在势阱 $U(\sigma) \leq 0$ 中做稳定的振荡 (对应着光束的周期性的初始展宽振荡), 如图 4 中 $\Gamma = 0.09$ 和 $\Gamma = 0.04$ 情形. 如果 σ_4 是一个虚根, “粒子”就不能够稳定地振荡 (对应着光束的扩散), 如图 4 中 $\Gamma = 0.01$ 情形. 要让 σ_4 为一大于 1 的实根, 就需要满足

$$\Gamma > \frac{\mathfrak{X} (4\ln 2 - 1) \mathfrak{X} (\Omega - 1)}{(8\ln 2 + 1) \mathfrak{X} (\Omega - 2)} \approx 1.35 \frac{r}{1 + r} = \Gamma_1, \quad (20)$$

其中 $r = |\Omega - 1|$ 表示相对功率偏差的大小. (20) 式给出了在 $\Omega < 1$ 情形下非局域程度的一个下限 Γ_1 , 当 $\Gamma < \Gamma_1$ 时非局域效应不能够阻止光束的扩散. 当 $\Omega > 1$ 时, 容易验证在限制性条件 (15) 式所确定的非局域程度范围内, 总有 $0 < \sigma_4 < 1$, 光束的归一化束宽在 1 和 σ_4 之间振荡对应着光束的周期性的初始压缩振荡, 如图 5 所示. $\sigma_4 > 0$ 说明任意弱的非局域效应都可以阻止光束的塌陷 (指严格的数学意义的塌陷, 即光束束宽变为零), 在这一点, 本文与文献 [31] 的结论是一致的. 然而, 光束不会发生严格的数学意义的塌陷并不意味着光束能够稳定传输. 由 (19) 式第 4 式可看出, σ_4 可以随着非局域程度

(Γ) 的减小而任意趋近于零, 但是物理上实际的光束的束宽是不能任意趋近于零的. 当 σ_4 达到一个非常小的数值 (例如使得束宽达到载波的波长量级), 不妨设为 $\sqrt{\delta}$, 傍轴近似下的方程 (1) 所未包含的别的效应将发生作用以限制束宽的进一步变小^[35-37]. 则 σ_4 减小到 $\sqrt{\delta}$ 的时刻可以认为是即将发生物理意义的“塌陷”的时刻^[38]. 而要阻止物理意义的“塌陷”, 非局域程度仍可以给出一个下限, 令 $\sigma_4 > \sqrt{\delta}$ 则

$$\Gamma > \frac{\mathfrak{X} (4\ln 2 - 1) \mathfrak{X} (\Omega - 1)}{[\mathfrak{X} (1 + 1/\delta) - 2] (8\ln 2 + 1)} \approx 1.35 \frac{r}{(1 + r) (1 + 1/\delta) - 2} = \Gamma_2, \quad (21)$$

(21) 式给出了 $\Omega > 1$ 情形下非局域程度的另一个下限 Γ_2 , 当 $\Gamma < \Gamma_2$ 时非局域效应不能够阻止光束发生物理意义的“塌陷”. 这里给出 (2+1) 维的圆对称双曲正割光束在弱非局域介质中稳定传输的含义, 即光束场将保持傍轴场的特性, 既不扩散, 也不发生物理意义的“塌陷”. 将 (20) 和 (21) 式综合起来或许物理意义更加明确, 即

$$\frac{1 - 1.48\Gamma}{1 - 0.74\Gamma} < \Omega < \frac{1 - 1.48\Gamma}{1 - 0.74(1 + 1/\delta)\Gamma}, \quad (22)$$

(22) 式的推得还须加一附加条件, 即 $1 - 0.74(1 + 1/\delta)\Gamma > 0$, 因此并不与 (20) 和 (21) 式完全等价. (22) 式是圆对称双曲正割光束在弱非局域介质中稳定传输所需要满足的条件, 也是本文的重要结论之一. 如果弱非局域介质响应函数的特征宽度以及入射光束的宽度都确定下来, 那么非局域程度 (Γ) 也就确定了下来, 则光束的稳定传输就要求其初始入射功率处在 (22) 式所确定的区间内. 反过来, 该区间的也可以作为弱非局域情形下非局域效应

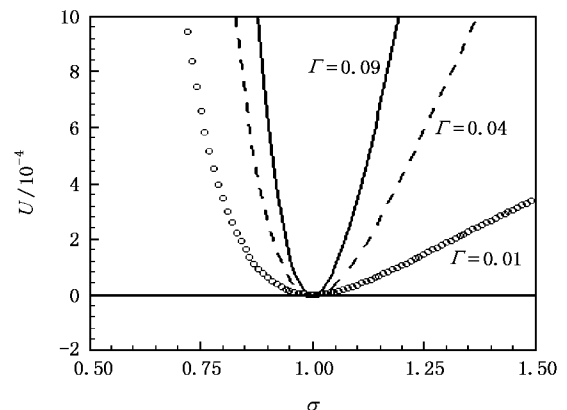


图 3 $\Omega = 1$ 时不同非局域程度下势函数曲线图

稳定作用的一个定量描述,可以看出,随着非局域程度变弱(Γ 变小)(22)式所描述的区间长度也就越小,对光束传输的稳定作用也就越小.在局域情形, $\Gamma=0$,该区间的长度变为零,所以说(2+1)维克尔空间孤子(即临界功率下的(2+1)维光束)是不稳定的.

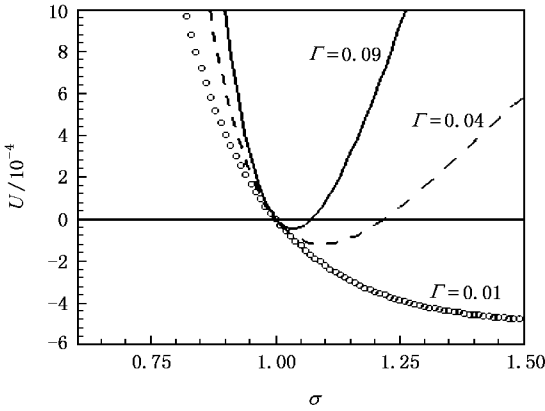


图4 $\Omega=0.99$ 时不同非局域程度下势函数曲线图

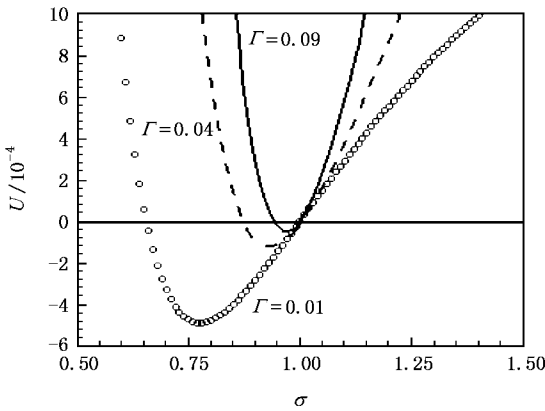


图5 $\Omega=1.01$ 时不同非局域程度下势函数曲线图

4. 数值模拟及讨论

为了验证变分计算的结果,利用分步傅里叶方法对方程(1)直接进行数值模拟.非局域响应函数取为高斯型函数

$$R(x,y) = \frac{1}{2\pi w_m^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2w_m^2}\right], \quad (23)$$

(23)式代入(7)式得到 $\gamma = w_m^2/2$, 那么 $\Gamma = 2\gamma/w_0^2 = w_m^2/w_0^2 = b^2$, 量 b 同样可以表征非局域程度的强弱.引入如下归一化参量:

$$X = \frac{x}{w_0}, Y = \frac{y}{w_0}, X' = \frac{x'}{w_0},$$

$$Y' = \frac{y'}{w_0}, \xi = \frac{z}{kw_0^2}, u = kw_0 \eta^{1/2} \varphi. \quad (24)$$

方程(1)化为

$$i \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{d^2 u}{dY^2} \right) + u \int R(X-X', Y-Y') |u(X', Y', \xi)|^2 dX' dY' = 0, \quad (25)$$

其中的非局域响应函数归一化为

$$R(X,Y) = \frac{1}{2\pi b^2} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{2b^2}\right), \quad (26)$$

初始入射光束为对称双曲正割型:

$$u(X,Y,0) = U_0 \operatorname{sech}(\sqrt{X^2 + Y^2}), \quad (27)$$

使得光束的功率达到临界功率相对应的 U_0 的值可以由归一化关系(24)式以及临界功率(14)式确定.

图6是不同非局域程度下光束在临界功率下以孤子形式传输情形的数值模拟结果.需要指出的是,模拟时以(14)式表示的临界功率作为入射光束的初始功率,由于(6)式只取泰勒展开式的前两项,故(14)式临界功率存在截断误差,而且非局域程度越大(b 越大),误差就越大.我们考察了 b 值取 0.3, 0.25, 0.2, 0.1, 0.08, 0.05 情形下的孤子传输.从直觉上讲,非局域程度越小,临界功率的误差越小,光束做孤子传输的情形应当越来越理想,但是图6却反映出奇特的现象:当 b 取 0.3, 0.25, 0.2 时,正如所预期的一样,归一化束宽的振荡幅度持续在变小,但是当 b 取 0.1, 0.08, 0.05 时,归一化束宽的振荡幅度却又开始变大.我们对这种现象的解释是,随着非局域程度的减小,临界功率的误差逐渐减小,同时非局域效应对光束传输的稳定作用也在减小(即(22)式所描述的区间长度在减小),当非局域稳

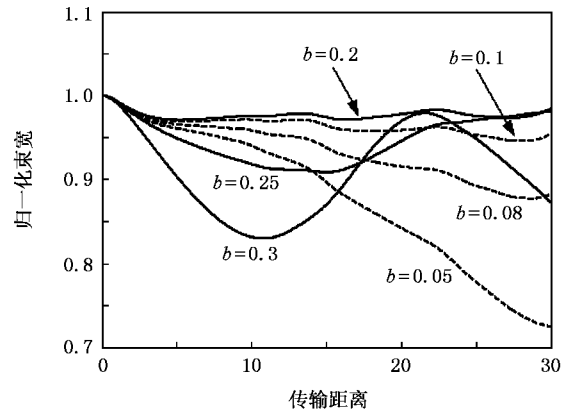


图6 $P_0 = P_c$ 时不同非局域程度下归一化束宽随传输距离的演化曲线的数值模拟结果

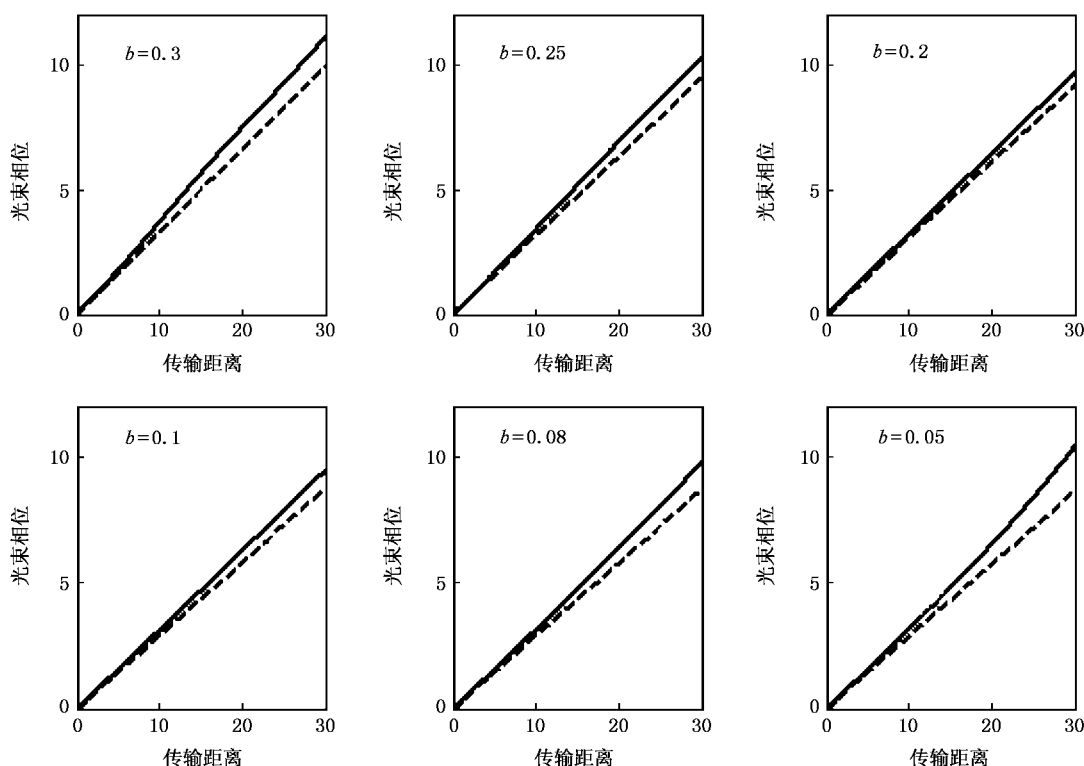


图7 $P_0 = P_c$ 时不同非局域程度下光束相位随传输距离的演化曲线的数值模拟结果(实线)和变分计算结果(虚线)的比较

定作用不足以抵偿临界功率的误差所造成的影响时(即入射光束的功率偏差超出了(22)式所描述的区间范围),孤子传输情形又逐渐变差.显然,随着 b 值进一步减小,即越来越接近局域情形,尽管临界功率误差越来越小,但由于(22)式所描述的区间长度减小得更快,光束传输是趋向于不稳定的.图7是不同非局域程度下光束在临界功率下以孤子形式传输时其相位演化情形,我们看到当 b 取 0.3, 0.25, 0.2 时,数值模拟结果(实线)和变分计算结果(虚线)符合得越来越好,当 b 取 0.1, 0.08, 0.05 时,却又逐渐变差.我们再考察光束做孤子传输最理想的 $b = 0.2$ 时光束沿两个相互垂直的横方向(x 方向及 y 方向)的光强分布的演化图(图8),可以看到两个方向上的演化图是一致的,图8中反映出的光强最大值的轻微的波动与图3所反映的 $b = 0.2$ 时束宽的轻微的波动是相对应的.由图6,7和8可以看出,在 $b = 0.2$ 情形,临界功率的误差小到一定程度,同时非局域效应又不是太弱,即便是传输了30个瑞利距离之后孤子传输的特性仍然保持得很好,说明圆对称的双曲正割函数是 $(2+1)$ 维弱非局域空间孤子形状的很好的近似.另外一点需要指出的是,

图1和图2中当光束的功率等于临界功率,即便是在局域情况下,光束也能做非常理想的孤子传输(束宽完全不变),这是因为图1和图2是对方程(16)纯理论计算的结果.然而这在光束的实际传输(实验)中以及数值模拟中却是不可能实现的,因为在实验中,入射光束功率的偏差是不可避免的,而在对方程(1)的数值模拟中,即便光束的入射功率准确地取为临界功率,但机器运算存在一个最低限度的随机误差是不可消除的^[39],一旦这样所造成的光束功率误差超出了(22)式所确定的区间,光束就是不稳定的.

对(22)式的验证可以通过对(20)和(21)式的验证来进行,即只须验证两个非局域程度下限 Γ_1 和 Γ_2 与相对功率偏差 r 之间的对应关系是否符合(20)和(21)式.在 $\Omega < 1$ 条件下考虑相对功率偏差分别为 1% 和 10% 的情形,即 $P_0 = 0.99P_c$ 和 $P_0 = 0.9P_c$ 情形,假设非局域响应函数是高斯型的,根据(20)式,它们所对应的非局域程度的下限分别是 $b \approx 0.12$ 和 $b \approx 0.35$.由图9和图10的数值模拟结果可以看出,当非局域程度低于下限时,光束将会扩散;当非局域程度高于下限时,光束周期性地展宽及压缩,呈现呼吸状结构.在 $\Omega > 1$ 条件下仍考虑功

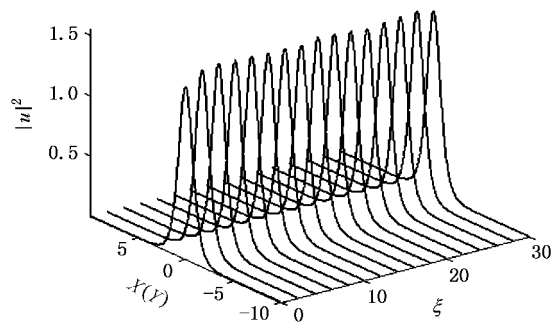


图8 $b=0.2, P_0=P_c$ 时光束光强沿 X 及 Y 方向的分布的演化图,它们是一致的

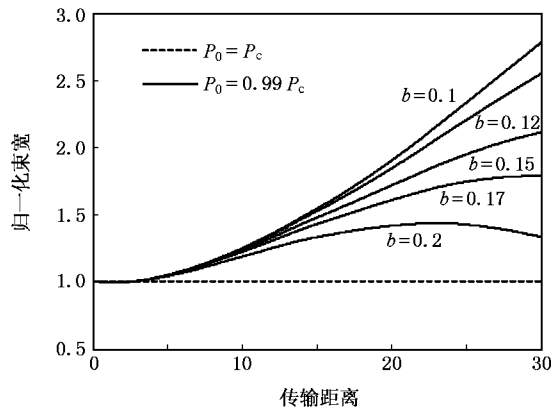


图9 归一化束宽随传输距离的演化曲线(虚线是 $P_0=P_c$ 时的变分计算结果,实线是 $P_0=0.99P_c$ 时的数值模拟结果)

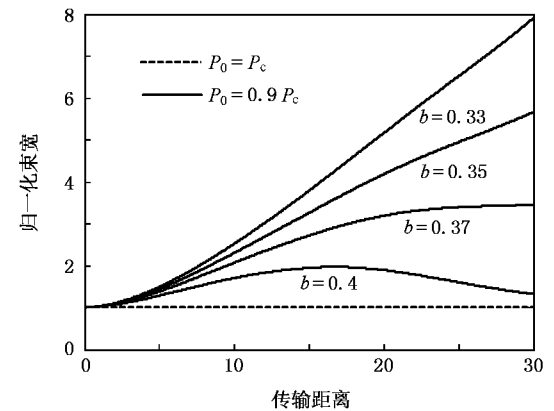


图10 归一化束宽随传输距离的演化曲线(虚线是 $P_0=P_c$ 时的变分计算结果,实线是 $P_0=0.9P_c$ 时的数值模拟结果)

率偏差为 1% 和 10% 的情形,即 $P_0=1.01P_c$ 和 $P_0=1.1P_c$,仍假设非局域响应函数是高斯型的,如果要限定光束传输中其归一化束宽的最小值分别为 0.4 和 0.3 根据(21)式,在 $P_0=1.01P_c$ 情形,相应的

非局域程度的下限依次为 $b \approx 0.050, b \approx 0.036$; 在 $P_0=1.1P_c$ 情形,相应的非局域程度的下限依次为 $b \approx 0.150, b \approx 0.110$. 由图 11,在 $P_0=1.01P_c$ 情况下,当 b 依次取 0.05, 0.036 时,光束传输中所出现的归一化束宽的最小值(变分计算结果)依次是 0.4 和 0.3,显然,随着非局域程度的减弱,光束传输中归一化束宽的最小值将持续变小.数值模拟结果呈现同样的规律,只不过数值模拟中归一化束宽的最小值出现的位置要比变分计算中的相应位置靠前一点,同时数值模拟的归一化束宽的最小值比相应的变分计算结果要更小,其原因在于数值模拟中作为初始入射功率的临界功率(14)式因为截断误差而偏大.图 12 是 $P_0=1.1P_c$ 情形数值模拟和变分计算的比较.通过图 11 和 12,我们看到不论功率偏差的大小,光束的归一化束宽的最小值随非局域程度的减弱而持续变小的规律是类似的,所不同的是当功率偏差比较大时,光束传输较短距离就会出现首个

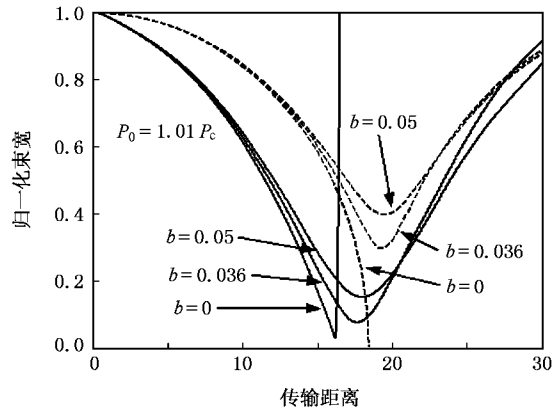


图11 $P_0=1.01P_c$ 情形归一化束宽随传输距离的演化曲线(实线是数值模拟结果,虚线是变分计算结果)

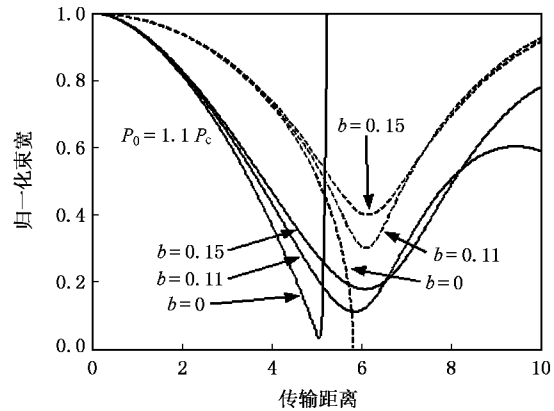


图12 $P_0=1.1P_c$ 情形归一化束宽随传输距离的演化曲线(实线是数值模拟结果,虚线是变分计算结果)

归一化束宽的最小值.

5. 结 论

本文研究了 $(2+1)$ 维圆对称双曲正割光束在弱非局域非线性介质中的传输特性,得到了描述光束束宽、相位、波前曲率、振幅演化的一组微分方程,并

得到了光束做孤子传输的临界功率.通过稳定性分析给出了弱非局域情形非局域效应对光束传输的稳定作用的定量描述,从而自洽地阐述了由不稳定的 $(2+1)$ 维克尔孤子到稳定的 $(2+1)$ 维弱非局域孤子的过渡情形.数值模拟的结果验证了变分计算结果的正确性,并说明圆对称的双曲正割函数是 $(2+1)$ 维弱非局域空间孤子的很好的近似.

-
- [1] Snyder A W , Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [2] Abe S , Ogura A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6066
- [3] Granot E , Sternklar S , Isbi Y , Malomed B , Lewis A 1999 *Opt. Commun.* **166** 121
- [4] Krolkowski W , Bang O 2000 *Phys. Rev. E* **63** 16610
- [5] Nikolov N I , Neshev D , Bang O , Krolkowski W 2003 *Phys. Rev. E* **68** 36614
- [6] Guo Q , Luo B , Yi F H , Chi S , Xie Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 16602
- [7] Xie Y Q , Guo Q 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 3020 (in Chinese)
[谢逸群、郭 旗 2004 物理学报 **53** 3020]
- [8] Rasmussen P D , Bang O , Krolkowski W 2005 *Phys. Rev. E* **72** 66611
- [9] Krolkowski W , Bang O , Wyller J 2004 *Phys. Rev. E* **70** 36617
- [10] Guo Q , Luo B , Chi S 2006 *Opt. Commun.* **259** 336
- [11] Huang Y , Guo Q 2006 *Opt. Commun.* **261** 175
- [12] Zhang X P , Guo Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3178 (in Chinese)
[张霞萍、郭 旗 2005 物理学报 **54** 3178]
- [13] Rotschild C , Cohen O , Manela O , Segev M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904
- [14] Ouyang S G , Guo Q , Hu W 2006 *Phys. Rev. E* **74** 36622
- [15] Ouyang S G , Guo Q , Wu L J , Lan S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2331
- [16] Ouyang S G , Guo Q , Lan S , Wu L J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2325
- [17] Dai J H , Guo Q , Shi X R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4642 (in Chinese)
[戴继慧、郭 旗、史信荣 2007 物理学报 **56** 4642]
- [18] Qin X J , Shao Y Q , Guo Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5269 (in Chinese)
[秦晓娟、邵毅全、郭 旗 2007 物理学报 **56** 5269]
- [19] Peccianti M , Assanto G 2002 *Phys. Rev. E* **65** 35603
- [20] Peccianti M , Brzdkiewicz K A , Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [21] Peccianti M , Conti C , Assanto G , Luca A D , Umeton C 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335
- [22] Conti C , Peccianti M , Assanto G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 73901
- [23] Conti C , Peccianti M , Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [24] Alberucci A , Peccianti M , Assanto G , Dyadyusha A , Kaczmarek M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 153903
- [25] Derrick G H 1964 *J. Math. Phys.* **5** 1252
- [26] Kelley P L 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 1005
- [27] Garnire E , Chiao R Y , Townes C H 1966 *Phys. Rev. Lett.* **16** 347
- [28] Marburger J H and Dewes E 1968 *Phys. Rev. Lett.* **21** 556
- [29] Krolkowski W , Bang O , Rasmussen J J , Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 16612
- [30] Wyller J , Krolkowski W , Bang O , Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 66615
- [31] Bang O , Krolkowski W , Wyller J , Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 46619
- [32] Xu Z Y , Kartashov Y V , Torner L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 55601
- [33] Skupin S , Bang O , Edmundson D , Krolkowski W 2006 *Phys. Rev. E* **73** 66603
- [34] Anderson D 1983 *Phys. Rev. A* **27** 3135
- [35] Feit M , Fleck J 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 633
- [36] Chi S , Guo Q 1995 *Opt. Lett.* **20** 1598
- [37] Fibich G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4356
- [38] Berge L 1998 *Phys. Rep.* **303** 259
- [39] Chung Y , Dagli 1990 *IEEE J. Quantum Electron.* **26** 1335

The propagation properties of symmetrical hyperbolic secant beams in weakly nonlocal nonlinear bulk media^{*}

Xiao Yi^{1,2)} Guo Qi^{1)†} Yang Xiang-Bo³⁾ Lan Sheng¹⁾

¹⁾ *Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*

²⁾ *Department of Optoelectronic Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China*

³⁾ *Institute of Laser Life Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*

(Received 2 July 2007; revised manuscript received 25 September 2007)

Abstract

The propagation of $(2 + 1)$ D paraxial symmetrical hyperbolic secant beams in weakly nonlocal nonlinear media is studied by variational approach. A series of differential equations which describe the evolutions of the width, the phase, the phase front curvature, and the amplitude of the beam are obtained. The critical power for a beam propagating as a spatial optical soliton in weakly nonlocal nonlinear media is also obtained. A quantitative depiction of the steadying effect of nonlocality on the propagation of a beam is obtained through the steadiness analyse, which provides a self-consistent explanation of the transition from unsteady local kerr solitons to steady weakly nonlocal solitons. The results of numerical method agree with that of variational calculations, implying that hyperbolic secant function is a good approximation to a $(2 + 1)$ D weakly nonlocal spatial optical soliton.

Keywords: hyperbolic secant beam, weakly nonlocal nonlinear media, spatial optical soliton

PACC: 4265S, 4265J

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474023 and 10674050), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20060574006), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 05005918) and the Project for Bring Forth New Ideas in Science and Technology of Higher Education of Guangdong Province, China (Grant No. 06CXTD005).

[†] Corresponding author. E-mail: guoqi@senu.edu.cn