第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4657-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.8, August, 2008

广义 Birkhoff 系统的积分不变量*

梅凤翔[1)†]　蔡建乐[2)]

1)(北京理工大学力学系,北京 100081)

2)(杭州师范大学理学院,杭州 310018)

(2007 年 12 月 30 日收到;2008 年 1 月 23 日收到修改稿)

研究广义 Birkhoff 系统的积分不变量.给出系统存在积分不变量的条件,在此条件下导出系统的线性积分不变量、通用积分不变量和二阶绝对积分不变量.举例说明结果的应用.

关键词:广义 Birkhoff 方程,线性积分不变量,通用积分不变量,二阶绝对积分不变量

PACC:0320

1. 引　　言

由 Poincaré[1] 首先给出的积分不变量具有重要价值.Poincaré 为研究天体的运动,尤其是三体问题中渐近的和双渐近运动的稳定性,广泛应用了积分不变量.Chazy 借助积分不变量在三体问题中得到新的结论.积分不变量在统计物理、量子力学及微分方程定性理论中获得了应用.文献[2—6]研究了 Hamilton 系统的积分不变量,文献[7]研究了 Birkhoff 系统的积分不变量,文献[8]给出广义非完整力学系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系和积分不变量,文献[9]研究了转动相对论 Birkhoff 系统的积分不变量,文献[10]提出广义 Birkhoff 方程.由广义 Birkhoff 方程描述的力学系统和物理系统称为广义 Birkhoff 系统.本文研究广义 Birkhoff 系统的积分不变量,包括存在积分不变量的条件以及导出的线性积分不变量、通用积分不变量和二阶绝对积分不变量.

2. 广义 Birkhoff 系统的线性积分不变量

广义 Birkhoff 方程有如下形式[10]:

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n), \tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol a)$ 为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol a)$ 为 Birkhoff 函数组,$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,\boldsymbol a)$ 为附加项.当 $\Lambda_\mu=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时,方程(1)成为 Birkhoff 方程[7,10—12]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{2}$$

假设附加项 Λ_μ 满足条件

$$\Lambda_\mu=\frac{\partial w}{\partial a^\mu}\quad(\mu=1,2,\cdots,2n), \tag{3}$$

此时,引进 Pfaff 作用量

$$A=\int_{t_0}^{t_1}(R_\nu\dot a^\nu-B+w)\,\mathrm dt. \tag{4}$$

计算其全变分,得

$$\Delta A=\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\Big\{\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}[R_\mu\dot a^\mu-B+w)\Delta t+R_\mu\delta a^\mu]+\Big[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial a^\mu}\Big]\times\delta a^\mu\Big\}\mathrm dt. \tag{5}$$

利用方程(1)、关系式(3)以及全变分和等时变分间的关系

$$\delta a^\mu=\Delta a^\mu-\dot a^\mu\Delta t, \tag{6}$$

(5)式可表示为

$$\Delta A=R_\mu^1\Delta a^{\mu1}-R_\mu^0\Delta a^{\mu0}-(B^1-w^1)\Delta t_1+(B^0-w^0)\Delta t_0. \tag{7}$$

在任意参数 α 下,由(7)式可得

$$\Delta A=A'(\alpha)\Delta\alpha=(R_\mu\Delta a^\mu-B\Delta t+w\Delta t)\big|_0^1.$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021,10772025)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20040007022)资助的课题.

† E-mail:meifx@bit.edu.cn

对 α 由 0 到 α_0 积分,可得

$$
\begin{aligned}
0 &= A(\alpha_0) - A(0) \\
&= \int_0^{\alpha_0} (R_\mu^1 \Delta a^{\mu 1} - B^1 \Delta t_1 + w \Delta t_1) \\
&\quad - \int_0^{\alpha_0} (R_\mu^0 \Delta a^{\mu 0} - B^0 \Delta t_0 + w \Delta t_0) \\
&= \oint_{c_1} (R_\mu \Delta a^\mu - B \Delta t + w \Delta t) \\
&\quad - \oint_{c_0} (R_\mu \Delta a^\mu - B \Delta t + w \Delta t) .
\end{aligned} \tag{8}
$$

由此得

$$
I = \oint_c (R_\mu \Delta a^\mu - B \Delta t + w \Delta t) = \mathrm{inv}. \tag{9}
$$

这就是广义 Birkhoff 系统的线性积分不变量.

当 $w = 0$ 时,(9)式给出 Birkhoff 系统的线性积分不变量

$$
I = \oint_c (R_\mu \Delta a^\mu - B \Delta t) = \mathrm{inv}. \tag{10}
$$

这个结果已由文献[7]给出.对 Hamilton 系统,(10)式给出 Poincaré-Cartan 积分不变量.

3. 广义 Birkhoff 系统的通用积分不变量

由(8)式取 $\Delta t = 0$,则

$$
\Delta a^\mu = \delta a^\mu .
$$

此时由(8)式给出

$$
\oint_{c_0} R_\mu \delta a^\mu = \oint_{c_1} R_\mu \delta a^\mu . \tag{11}
$$

这就意味着在动力学空间中沿同时状态的闭曲线积分

$$
I_1 = \oint_c R_\mu \delta a^\mu \tag{12}
$$

在曲线沿相应轨道移动时保持为常值.积分 I_1 称为广义 Birkhoff 系统的通用积分不变量.

4. 二阶绝对积分不变量

由积分 I_1 利用 Stokes 定理可以导出广义 Birkhoff 系统的二阶绝对积分不变量.实际上,我们有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \oint_c R_\mu \delta a^\mu \\
&= \oint_c \delta(R_\mu a^\mu) - \oint_c a^\mu \delta R_\mu \\
&= - \oint_c a^\mu \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \delta a^\nu .
\end{aligned}
$$

于是,可将 I_1 表示为

$$
I_1 = \frac{1}{2} \oint_c \left(R_\mu \delta a^\mu - a^\mu \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \delta a^\nu \right) . \tag{13}
$$

Stokes 定理有下列形式:

$$
\begin{aligned}
&\oint_c (F_x(x,y) \mathrm{d}x + F_y(x,y) \mathrm{d}y) \\
&= \iint_\sigma \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y ,
\end{aligned} \tag{14}
$$

其中 σ 为闭轮廓限定的曲面.利用(14)式,(13)式可表示为

$$
I_2 = \frac{1}{2} \iint_\sigma \left(2 \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} + \frac{\partial^2 R_\mu}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right) \delta a^\mu \delta a^\nu = \mathrm{inv}. \tag{15}
$$

这就是广义 Birkhoff 系统的二阶绝对积分不变量.

5. 算 例

单自由度阻尼振子的微分方程为

$$
\ddot{q} + 2nq + k^2 q = 0. \tag{16}
$$

令

$$
a^1 = q, \quad a^2 = \dot{q},
$$

取广义 Birkhoff 系统为

$$
\begin{aligned}
R_1 &= - a^2 \exp(2nt), \\
R_2 &= 0, \\
B &= - \frac{1}{2} (a^2)^2 \exp(2nt), \\
\Lambda_1 &= k^2 a^1 \exp(2nt), \\
\Lambda_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{17}
$$

则有

$$
w = \frac{1}{2} k^2 (a^1)^2 \exp(2nt) . \tag{18}
$$

线性积分不变量(9)式给出

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_c \Big[- a^2 \exp(2nt) \Delta a^1 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \exp(2nt) \Delta t \\
&\quad + \frac{1}{2} k^2 (a^1)^2 \exp(2nt) \Delta t \Big] \\
&= \mathrm{inv}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

而通用积分不变量(12)式给出

$$
I_1 = \oint_c - a^2 \exp(2nt) \delta a^1 = \mathrm{inv}. \tag{20}
$$

6. 结 论

对一般的广义 Birkhoff 系统,没有积分不变量.

但是，当附加项 Λ_μ 满足(3)式时，可找到线性积分不变量(9)式、通用积分不变量(12)式以及二阶绝对积分不变量(15)式.本文结果是对文献[7]中一个结果的推广.

[1] Poincaré H 1897 *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste* (Paris: Gauthier-Villars)

[2] Whittaker E T 1904 *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Combridge: Combridge University Press)

[3] Wang J H 1958 *Analytical Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [汪家　1958 分析动力学(北京:高等教育出版社)]

[4] Dobronravov V V 1976 *Foundations of Analytical Mechanics* (Moscow: Vishaya Shkola) (in Russian)

[5] Chen B 1987 *Analytical Dynamics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [陈　滨 1987 分析动力学(北京:北京大学出版社)]

[6] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)]

[7] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) (in Russian)

[8] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]

[9] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q, Wang Y D, Ouyang S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1917 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周　强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1917]

[10] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456

[11] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)

[12] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]

Integral invariants of a generalized Birkhoff system*

Mei Feng-Xiang[1)†]　Cai Jian-Le[2)]

1)(*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

2)(*College of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 30 December 2007; revised manuscript received 23 January 2008)

Abstract

Integral invariants of a generalized Birkhoff system are studied in this paper. The condition under which the integral invariants exist in the system is given. A linear integral invariant, a universal integral invariant and an absolute integral invariant of second order of the system are obtained under the given condition. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: generalized Birkhoff system, linear integral invariant, universal integral invariant, second-order absolute integral invariant

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021, 10772025) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: meifx@bit.edu.cn