

势问题的无单元 Galerkin 方法的误差估计*

程荣军¹⁾²⁾ 程玉民^{1)†}

1) 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

2) 浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

(2007 年 12 月 27 日收到, 2008 年 1 月 21 日收到修改稿)

在高维情况下, 首先研究了无单元 Galerkin 方法的形函数构造方法——移动最小二乘法在 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的误差估计. 然后, 在势问题的无单元 Galerkin 方法的基础上, 研究了势问题的通过罚函数法施加本质边界条件的无单元 Galerkin 方法在 Sobolev 空间中的误差估计. 当节点和形函数满足一定条件时, 证明了该误差估计是最优阶的. 从误差分析中可以看出, 数值解的误差与权函数的影响半径密切相关. 最后, 通过算例验证了结论的正确性.

关键词: 无网格方法, 无单元 Galerkin 方法, 势问题, 误差估计

PACC: 0200, 0260, 4600

1. 引 言

无网格方法是目前科学和工程计算方法研究的热点之一, 也是科学和工程计算发展的趋势. 与以往的基于网格的方法, 如有限元、边界元法等不同, 无网格方法采用基于点的近似, 不需要在求解区域内划分用来确定插值函数的网格, 为科学和工程计算带来很大的方便^[1].

目前发展的无网格方法有扩散单元法(diffuse element method, DEM)^[2], 无单元 Galerkin 法(element-free Galerkin method, EFG)^[3], 有限点法(finite point method, FPM)^[4,5], 单位分解法(partition of unity method, PUM)^[6], 重构核粒子法(reproducing kernel particle method, RKPM)^[7], 无网格局部 Petrov-Galerkin 方法(meshless local Petrov-Galerkin method, MLPG)^[8], 点插值方法(point interpolation method, PIM)^[9], 局部边界积分方程的无网格方法(local boundary integral equation, LBIE)^[10], 复变量无网格方法^[11,12], 数值流形无网格方法^[13,14]及边界积分方程的无网格方法^[15-19]等.

Levin^[20], Wendland^[21], Armentano 和 Duran^[22,23], Zuppa^[24], Krysl 和 Belytschko^[25] 研究了无单元

Galerkin 方法的形函数构造方法——移动最小二乘法的误差估计, 对于带 Dirichlet 边界条件的无单元 Galerkin 方法的误差涉及很少.

在高维情况下, 本文首先研究了无单元 Galerkin 方法的形函数构造方法——移动最小二乘法在 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的误差估计, 然后给出了带 Dirichlet 边界条件的势问题的无单元 Galerkin 方法的误差估计. 从误差分析的过程中可以看出, 势问题的误差与权函数的影响半径密切相关, 即误差由权函数的影响半径来度量. 通过具体算例验证了结论的正确性.

2. 定义和一些记号

d 是正整数, 用来表示空间维数. $\Omega \subset R^d$ 是一个具有 Lipschitz 连续边界的非空有界开集. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ 表示 R^d 中的任意点. 多重标记号 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^T \in (Z^+)^d$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$. 记 $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$, $|\alpha|! = \sum_{i=1}^d \alpha_i!$. 对任意 α , $u(\mathbf{x})$ 的 α 阶偏导数表示为 $D^\alpha u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$. 特别注意的是, $D^0 u(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x})$. 为了方

* 国家自然科学基金(批准号: 10571118)和上海市重点学科建设项目(批准号: Y0103)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ymcheng@shu.edu.cn; ymcheng@sh163.net

便 本文给出 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间的定义^[26].

定义 1 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 定义为

$$L^p(\Omega) := \{f(x) \mid \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1)$$

其中 L_p 范数为

$$\|f(x)\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p \leq \infty, \quad (2)$$

$$\|f(x)\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}\{ |f(x)| \mid x \in \Omega \}, \quad p = \infty. \quad (3)$$

定义 2 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 定义为

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\}, \quad (4)$$

其中,

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f \mid f \in L^1(K), \forall K \subset \Omega\}, \quad (5)$$

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \right)^p, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (6)$$

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty. \quad (7)$$

定义 3 Sobolev 半范数 $|\cdot|$ 定义为

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \right)^p, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (8)$$

$$|f|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha|=k} \{ \text{ess sup} |D^\alpha u| \mid x \in \Omega \}, \quad p = \infty. \quad (9)$$

需要注意的是

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad (10)$$

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (11)$$

3. 移动最小二乘法

移动最小二乘法^[1]中 取试函数

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) \alpha(x) \quad (12)$$

为函数 $u(x)$ 的逼近函数. 其中 $p_i(x)$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(x)$ 是相应的系数.

对应于 (12) 式的整体逼近, Lancaster 和 Salkauskas 在 x 的邻域内定义局部逼近为

$$u^h(x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{x}) a_i(x) \equiv p^T(\bar{x}) \alpha(x), \quad (13)$$

其中系数 $a_i(x)$ 根据加权最小二乘法来确定, 它使得对函数 $u(x)$ 的局部逼近误差最小.

定义

$$J = \sum_{l=1}^n u(x - x_l) [u^h(x, x_l) - u(x_l)]^2$$

$$= \sum_{l=1}^n u(x - x_l) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_l) \cdot a_i(x) - u(x_l) \right]^2, \quad (14)$$

其中 $u(x - x_l)$ 是具有紧支集特性的权函数, x_l 为点 x 的紧支域内的节点.

(14) 式可用矩阵形式表示为

$$J = (pa - u)^T W(x) (pa - u), \quad (15)$$

其中

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (16)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} u(x - x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u(x - x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u(x - x_n) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

为了得到系数 $\alpha(x)$ 对 J 取极值, 即得

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = A(x)\alpha(x) - B(x)u = 0, \quad (19)$$

其中矩阵 $A(x)$ 和 $B(x)$ 分别为

$$A = p^T W(x) p, \quad (20)$$

$$B = p^T W(x). \quad (21)$$

由 (19) 式可得

$$\alpha(x) = A^{-1}(x) B(x) u, \quad (22)$$

这样, 逼近函数 $u^h(x)$ 的表达式为

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{l=1}^n \Phi_l^h(x) u_l = \Phi^h(x) u, \quad (23)$$

其中形函数

$$\begin{aligned} \Phi^h(x) &= [\Phi_1^h(x), \Phi_2^h(x), \dots, \Phi_m^h(x)] \\ &= p^T(x) A^{-1}(x) B(x), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 k 表示基函数中最高阶完备多项式的阶数. 当 $k=0$ 时, $\Phi_l^0(x)$ 为 Shepard 函数, 有

$$\Phi_l^0(x) = \frac{u(x - x_l)}{\sum_{l=1}^n u(x - x_l)}. \quad (25)$$

4. 移动最小二乘法的误差估计

本节给出了移动最小二乘法的误差估计, 需要以下引理:

引理 1^[26] (Hölder 不等式)

假设 $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in Q, a_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, a_i, b_i \in R$.

1) 如果 $\sum_{i=1}^n a_i < \infty$ 和 $\sum_{i=1}^n b_i < \infty$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (26a)$$

2) 如果 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ 则

$$fg \in L^1(\Omega), \|fg\| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (26b)$$

引理 2^[26] 如果 $u(x - x_i) \in C^k$, 则

$$\sum_{i=1}^N D^\alpha \Phi_i(x) (x - x_i)^\beta = (-1)^{|\beta|} \delta_{\alpha\beta}, \quad |\beta| \leq m, |\alpha| \leq k. \quad (27)$$

可假设

1) 存在常整数 C_0, C_1, C_2 使得对任意 $x \in \bar{\Omega}$, 最多有 C_0 个 x_i 满足关系 $\|x - x_i\| \leq r_i$, 并且存在 r 使得 $C_1 r_1 \leq r \leq C_2 r_i$.

$$2) \max_{1 \leq i \leq N} \max_{\beta, |\beta|=l} \|D^\beta \Phi_i(x)\|_\infty \leq \frac{C}{r^l}, \quad 0 \leq l \leq k.$$

在此基础上 给出如下的定理：

定理 1 设 $u(x - x_i) \in C^m(\bar{\Omega}) \cap W^{m,\infty}(\Omega), u(x) \in C^{m+1}(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)$, 其中 $\Omega \subset R^d$ 是一个具有 Lipschitz 连续边界的非空有界开集. 令 $u^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u(x_i)$, 如果假设 1) 和 2) 满足, 则有下列的误差估计：

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{W^k \varphi(\Omega)} \leq C_k r^{m+1-k} \|u(x)\|_{W^{m+1} \varphi(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

其中 C_k 和参数 r 无关.

证明 为证明

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{W^k \varphi(\Omega)} \leq C_k r^{m+1-k} \|u(x)\|_{W^{m+1} \varphi(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq m \quad (28a)$$

只要证明

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{W^k \varphi(\Omega)} \leq C_k r^{m+1-k} \|u(x)\|_{W^{m+1} \varphi(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (28b)$$

对(23)式两边求导数, 得

$$D^\beta u^h(x) = \sum_{i=1}^n D^\beta \Phi_i(x) u(x_i). \quad (29)$$

$u(x_i)$ 在点 x 的 Taylor 展开式为

$$u(x_i) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x + \theta(x_i - x)),$$

$$0 < \theta < 1, \quad (30)$$

把(30)式代入(29)式, 得到

$$\begin{aligned} & D^\beta u^h(x) \\ &= \sum_{i=1}^n D^\beta \Phi_i(x) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x + \theta(x_i - x)) \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{i=1}^n D^\beta \Phi_i(x) \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x + \theta(x_i - x)) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \delta_{\alpha\beta} D^\alpha u(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x + \theta(x_i - x)) \\ &= D^\beta u(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} (x_i - x)^\alpha D^\alpha u(x + \theta(x_i - x)). \end{aligned} \quad (31)$$

如果 $\partial\Omega$ 是充分光滑的, 可以选取恰当的节点分布和权函数半径, 使得每一个子域 $\text{supp}\{\Phi_i\} \cap \Omega$ 关于 x_i 是星形的, 即 $\forall x \in \text{supp}\{\Phi_i\} \cap \Omega, x + \theta(x_i - x) \in \text{supp}\{\Phi_i\} \cap \Omega$, 从而(31)式是有意义的.

显然

$$\begin{aligned} & |D^\beta u(x) - D^\beta u^h(x)| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} |x_i - x|^\alpha |D^\alpha u(x + \theta(x_i - x))| \\ & \quad \times |D^\beta \Phi_i(x)| \\ & \leq Cr^{m+1} \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} |D^\alpha u(x + \theta(x_i - x))| \\ & \quad \times |D^\beta \Phi_i(x)|. \end{aligned} \quad (32)$$

利用 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned} & |D^\beta u(x) - D^\beta u^h(x)|^p \\ & \leq Cr^{(m+1)p} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| = m+1} |D^\alpha u(x + \theta(x_i - x))| \right) \\ & \quad \times |D^\beta \Phi_i(x)|^p \\ & \leq Cr^{(m+1)p} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\alpha| = m+1} |D^\alpha u(x + \theta(x_i - x))| \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\sum_{i=1}^n |D^\beta \Phi_i(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq Cr^{(m+1)p} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}))| \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^n |D^\beta \Phi_i(\mathbf{x})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq Cr^{(m+1)p} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}))|^p \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^n |D^\beta \Phi_i(\mathbf{x})|^q \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{33}$$

根据假设 1), 存在整数 C_0 , 对任意 \mathbf{x} , 使得 $\#\{i | u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0\} \leq C_0$, 所以 $\exists I \in \{i | u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0\}$ 使得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}))|^p \right) \\ &\leq C_0 \sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}))|^p. \end{aligned} \tag{34}$$

根据假设 2), 可得

$$|D^\beta \Phi_i(\mathbf{x})|_{|\beta|=k} \leq \frac{C}{r^k}, \tag{35}$$

于是

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |D^\beta \Phi_i(\mathbf{x})|^q \right)^{\frac{p}{q}} &\leq C_0 \left(\frac{C^q}{r^{kq}} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= C_0 C^p \frac{1}{r^{kp}}, \end{aligned} \tag{36}$$

从而

$$\begin{aligned} &|D^\beta u(\mathbf{x}) - D^\beta u^h(\mathbf{x})|^p \\ &\leq Cr^{(m+1)p} \sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}))|^p \frac{1}{r^{kp}}, \end{aligned} \tag{37}$$

因为

$$\begin{aligned} &\|D^\beta u(\mathbf{x}) - D^\beta u^h(\mathbf{x})\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= \int_{\Omega} |D^\beta u(\mathbf{x}) - D^\beta u^h(\mathbf{x})|^p d\Omega \\ &\leq \int_{\Omega} Cr^{(m+1-k)p} \sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^p d\Omega \\ &\leq Cr^{(m+1-k)p} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^p d\Omega \\ &= Cr^{(m+1-k)p} \|u(\mathbf{x})\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}^p, \end{aligned} \tag{38}$$

又

$$\begin{aligned} &|u(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})|_{W^k,p(\Omega)} \\ &= \left(\int_{\Omega} \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u(\mathbf{x}) - D^\beta u^h(\mathbf{x})|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{|\beta|=k} \int_{\Omega} |D^\beta u(\mathbf{x}) - D^\beta u^h(\mathbf{x})|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Cr^{(m+1-k)} \|u(\mathbf{x})\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{39}$$

所以有

$$\begin{aligned} &\|u(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})\|_{W^k,p(\Omega)} \\ &\leq C_k r^{m+1-k} \|u(\mathbf{x})\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq m. \end{aligned} \tag{40}$$

需要注意的是

1) 当 $p = 2$ 时, 得到

$$\begin{aligned} &\|u(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})\|_{H^k(\Omega)} \\ &\leq C_k r^{m+1-k} \|u(\mathbf{x})\|_{H^{m+1}(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq m. \end{aligned} \tag{41}$$

2) 当 $k = 0$ 和 $p = 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} &\|u(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_k r^{m+1} \|u(\mathbf{x})\|_{H^{m+1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{42}$$

5. 势问题的无单元 Galerkin 方法的误差估计

5.1. 势问题的无单元 Galerkin 方法

势问题对应的势函数是标量函数, 对应的控制方程是 Poisson 方程或 Laplace 方程.

考虑二维的 Poisson 方程,

$$\text{在 } \Omega \text{ 内} \quad -\nabla^2 u = f(\mathbf{x}), \tag{43a}$$

$$\text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad u = \bar{u} \tag{43b}$$

$$\text{在 } \Gamma_q \text{ 上} \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \tag{43c}$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 是给定的源函数, Ω 是定义域, 其边界 $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, n 是边界上的单位外法线矢量, \bar{u} 和 \bar{q} 分别是本质边界 Γ_u 和自然边界 Γ_q 上的已知势函数和法向流量.

(43) 式的带罚因子 α 的 Galerkin 弱形式为

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \alpha (\nabla u)^T \nabla u d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T f d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{q} \delta u d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha}{2} \delta \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u})(u - \bar{u}) d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

把移动最小二乘逼近函数(23)式代入(44)式得到

$$(K + K^\alpha)u = F + F^\alpha, \tag{45}$$

其中

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} (\Phi_{I,x} \Phi_{J,x} + \Phi_{I,y} \Phi_{J,y}) d\Omega, \tag{46}$$

$$K_{IK}^\alpha = \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \Phi_K d\Gamma, \tag{47}$$

$$F_I = \int_{\Omega} \Phi_I f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \Phi_I d\Gamma, \tag{48}$$

$$F_I^\alpha = \alpha \int_{\Gamma_n} \Phi_i \bar{u} \, dT. \quad (49)$$

5.2. 误差估计

设原问题为求 $u \in V$ 使得

$$a(u, v) = f, v, \quad \forall v \in V, \quad (50)$$

其中 V 是定义在区域 Ω 上的函数的 Banach 空间, 双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 及泛函 $f \in V'$ 满足 Lax-Milgram 定理的条件. 空间 $V_M = \text{span}\{\Phi_i \mid 1 \leq i \leq N\}$, 其中 Φ_i 是移动最小二乘形函数, 则原问题(50)的无单元 Galerkin 方法为求 $u^M \in V_M$, 使得

$$a(u^M, v^M) = f, v^M, \quad \forall v^M \in V_M, \quad (51)$$

下面考虑误差 $\|u - u^M\|_V$.

定理 2 设双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 是连续且 V 椭圆的, 则存在常数 C , 使得

$$\|u - u^M\|_V \leq C \inf_{v \in V_M} \|u - v\|_V,$$

其中 u 和 u^M 分别为原问题(50)和无单元 Galerkin 方法离散问题(51)的解, $\|\cdot\|_V$ 表示 V 中的范数.

证明 在(50)式中令 $v = v^M \in V_M \subset V$, 并和(51)式相减得到

$$a(u - u^M, v^M) = 0, \quad \forall v^M \in V_M \subset V. \quad (52)$$

根据 $a(\cdot, \cdot)$ 的连续性和 V 椭圆性, 存在 α, β 使得

$$\begin{aligned} & \alpha \|u - u^M\|_V^2 \\ & \leq a(u - u^M, u - u^M) \\ & = a(u - u^M, u - v^M) + a(u - u^M, v^M - u^M) \\ & = a(u - u^M, u - v^M) \\ & \leq \beta \|u - u^M\|_V \|u - v^M\|_V, \end{aligned} \quad (53)$$

即

$$\|u - u^M\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u - v^M\|_V, \quad \forall v^M \in V_M \quad (54)$$

从而结论得证.

由定理 1 和定理 2 可见无单元 Galerkin 方法的误差估计可归结为移动最小二乘法的误差估计, 这是因为

$$\inf_{v \in V_M} \|u - v\|_V \leq \|u - u^h\|_V, \quad (55)$$

其中 $u^h(x) = \sum_{l=1}^n \Phi_l(x) u_l$ 为移动最小二乘逼近函数.

下面考虑 Dirichlet 边值问题(43a)和(43b)通过罚函数法施加边界条件的误差估计(只考虑齐次边界条件, 即在(43b)中, 令 $\bar{u} = 0$. 而非齐次边界可以通过变换转化成齐次的).

Dirichlet 边值问题(43a)和(43b)的变分形式为

求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (56)$$

其中

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega. \quad (57)$$

下面考虑 Dirichlet 边值问题(43a)和(43b)通过罚函数法施加边界条件的误差估计. 罚函数施加边界条件为

对 $\theta > 0$, 考虑如下的双线性形式

$$\tilde{a}(u, v) \equiv a_{\theta}(u, v) = a(u, v) + r^{-\theta} D(u, v), \quad (58)$$

其中

$$D(u, v) = \int_{\partial\Omega} u v \, dx. \quad (59)$$

考虑 $u^M = u^{\theta, M} \in V_M$ 满足下面的等式

$$a_{\theta}(u^{\theta, M}, v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in V_M, \quad (60)$$

对 $v \in H^1(\Omega)$, 定义

$$Q_{\theta}(v) = a(v, v) + r^{-\theta} D(v, v) - 2 \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad (61)$$

有

$$Q_{\theta}(u^{\theta, M}) = \min_{v \in V_M} Q_{\theta}(v). \quad (62)$$

定理 3 假设 $u \in H^l(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($l > 3/2$) 是边值问题(56)的解, $u^{\theta, M} \in V_M$ 是边值问题(60)的解. 于是对任意的 $0 < \varepsilon < \min(l - 3/2, 1/2)$, 有下面的误差估计式:

$$\|u - u^{\theta, M}\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha(\varepsilon) r^{\mu} \|u\|_{H^l(\Omega)},$$

其中 $\mu = \min(k, l - 1, \frac{\theta}{2}, k + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon, l - \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon)$, 并且 $\alpha(\varepsilon)$ 只依赖于 ε , 与 r, u 无关.

证明 对任意 $v \in H^1(\Omega)$, 我们定义

$$\begin{aligned} R_{\theta}(v) & = a(u - v, u - v) \\ & \quad + r^{-\theta} D\left(\frac{\partial u}{\partial n} r^{\theta} + v, \frac{\partial u}{\partial n} r^{\theta} + v\right), \end{aligned} \quad (63)$$

由 Green 公式

$$\begin{aligned} R_{\theta}(v) & = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v) \\ & \quad + r^{\theta} D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}\right) + r^{-\theta} D(v, v) + 2D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right) \\ & = a(u, u) + r^{\theta} D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}\right) + a(v, v) \\ & \quad + r^{-\theta} D(v, v) - 2 \int_{\Omega} f v \, d\Omega \\ & = a(u, u) + r^{\theta} D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}\right) + Q_{\theta}(v), \end{aligned} \quad (64)$$

于是有

$$\min_{v \in V_M} R_\theta(v) = \alpha(u, u) + r^\theta D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}\right) + \min_{v \in V_M} Q_\theta(v), \quad (65)$$

又因为

$$R_\theta(u^{\theta, M}) = \min_{v \in V_M} R_\theta(v), \quad (66)$$

所以得到

$$\begin{aligned} & \|u - u^{\theta, M}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &= \alpha(u - u^{\theta, M}, u - u^{\theta, M}) \\ &\leq R_\theta(u^{\theta, M}) \\ &\leq R_\theta(v), \quad \forall v \in V_M, \end{aligned} \quad (67)$$

由定理 1 和定理 2 有

$\exists g^M \in V_M$ 使得

$$\|u - g^M\|_{H^1(\Omega)} \leq cr^\mu \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (68)$$

其中 $\mu = \min(k+1-s, l-s)$, $0 \leq s \leq 1$.

从而

$$\begin{aligned} R_\theta(g^M) &= \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ r^{-\theta} D\left(\frac{\partial u}{\partial n} r^\theta + g^M, \frac{\partial u}{\partial n} r^\theta + g^M\right) \\ &= \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ r^\theta D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}\right) + r^{-\theta} D(g^M, g^M) \\ &+ 2D\left(\frac{\partial u}{\partial n}, g^M\right) \\ &= \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ r^\theta \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dx + r^{-\theta} \int_{\partial\Omega} (g^M)^2 dx \\ &+ 2 \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \cdot g^M\right) dx \\ &= \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[\left(r^{\theta/2} \frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial n} \cdot g^M\right) \right. \\ &\left. + (r^{-\theta/2} g^M)^2 \right] dx \\ &= \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(r^{\theta/2} \frac{\partial u}{\partial n} + r^{-\theta/2} g^M \right)^2 dx \\ &\leq \alpha(u - g^M, u - g^M) \\ &+ c \int_{\partial\Omega} \left[\left(r^{\theta/2} \frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 + (r^{-\theta/2} g^M)^2 \right] dx \\ &\leq C \left\{ \alpha(u - g^M, u - g^M) \right. \\ &\left. + r^\theta \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dx + r^{-\theta} \int_{\partial\Omega} (g^M)^2 dx \right\} \end{aligned}$$

$$\leq C \left\{ \|u - g^M\|_{H^1(\Omega)}^2 + r^\theta \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dx + r^{-\theta} \int_{\partial\Omega} (g^M)^2 dx \right\}. \quad (69)$$

注意到 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 记 $0 < \varepsilon < \min\left(l - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, 有

$$\begin{aligned} \|g^M\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &= \|u - g^M\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 (s = 1/2 + \varepsilon) \\ &\leq \alpha(\varepsilon) \|u - g^M\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)}^2 \\ &\leq \alpha(\varepsilon) r^{2\mu_1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (70)$$

其中 $\mu_1 = \min\left(k + \frac{1}{2} - \varepsilon, l - \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$.

又

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \alpha(\varepsilon) \|u\|_{H^{3+\varepsilon}(\Omega)}^2. \quad (71)$$

将(70)和(71)式代入(69)式, 并且令 $s = 1$, 得到

$$\begin{aligned} R_\theta(g^M) &\leq \alpha(\varepsilon) \left(r^{2\min(k, l-1)} + r^\theta + r^{2\mu_1 - \theta} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \alpha(\varepsilon) r^{2\mu} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (72)$$

其中 $\mu = \min\left(k, l-1, \frac{\theta}{2}, k + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon, l - \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon\right)$.

最后得到

$$\|u - u^{\theta, M}\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha(\varepsilon) r^\mu \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (73)$$

其中 $\mu = \min\left(k, l-1, \frac{\theta}{2}, k + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon, l - \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - \varepsilon\right)$.

6. 数值算例

本节利用无单元 Galerkin 方法求解矩形区域上的稳态温度场, 本质边界条件用罚函数法进行处理, 并进行了误差分析.

6.1. 考虑矩形域上的 Poisson 方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \\ x &\in [0, 8], y \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (74)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, -1) &= u(x, 1) = x^2 + 1, \\ u(0, y) &= y^2, \\ u(8, y) &= 64 + y^2, \end{aligned} \quad (75)$$

解析解为

$$u(x, y) = x^2 + y^2. \quad (76)$$

如图 1 所示, 在求解域内均匀布置了 11×5 个节点. 罚因子取为 10^5 . 图 2 给出了 $y = 0$ 处的解析解和数值解的对比图. 通过图 2 可以看出, 数值解和解析解吻合得很好.

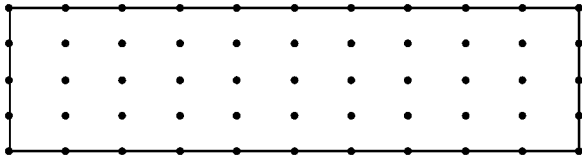


图 1 矩形区域内 11×5 节点均匀分布示意图

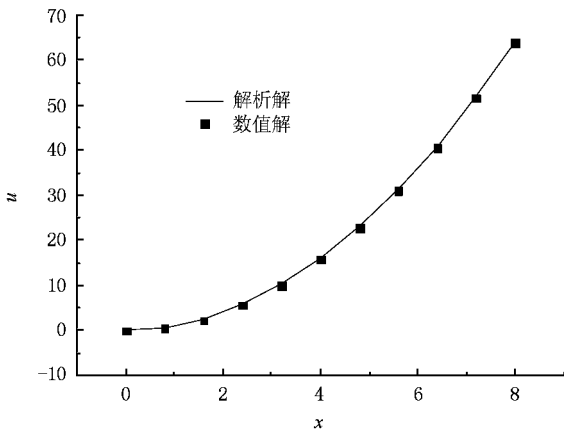


图 2 在中轴线 $y = 0$ 处的解析解和数值解的比较

本文考虑了 $u - u^M$ 在 H^1 范数下的误差. 权函数选为 Gauss 权函数, 基函数选取为线性基.

相对误差定义为

$$\|u - u^M\|_{H^1(\Omega)}^{\text{rel}} = \frac{\|u - u^M\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (77)$$

表 1 给出了当 $y = 0$ 时, 解析解和不同罚因子

表 1 解析解和不同罚因子 α 下的数值解的比较

坐标	解析解	数值解			
		$\alpha = 10^3$	$\alpha = 10^6$	$\alpha = 10^9$	$\alpha = 10^{12}$
(0, 0.0)	0	0.0428	0.0963	0.095	0.005
(0, 0.8)	0.64	0.651	0.598	0.6777	0.653
(0, 1.6)	2.56	2.1066	2.2547	2.1253	2.456
(0, 2.4)	5.76	5.2243	5.4122	5.5305	5.9299
(0, 3.2)	10.24	9.7497	9.9148	9.8565	9.5612
(0, 4.0)	16	15.452	15.655	15.743	16.007
(0, 4.8)	23.04	22.558	22.72	22.657	22.358
(0, 5.6)	31.36	30.725	30.955	31.129	31.536
(0, 6.4)	40.96	40.447	40.665	40.525	39.951
(0, 7.2)	51.84	50.667	51.352	51.575	52.015
(0, 8.0)	64	62.811	63.832	63.89	63.979

α 下的数值解的比较. 结果表明不同罚因子对解的影响是不同的. 基于数值结果, 节点分布不变化, 当权函数影响半径取不同值时, 势问题的无单元 Galerkin 方法的关于 H^1 范数的误差通过图 3 表示. 从图 3 中可以看出, 相对误差随着形函数半径 r 的减小而减小, 从而验证了定理 3 结论的正确性.

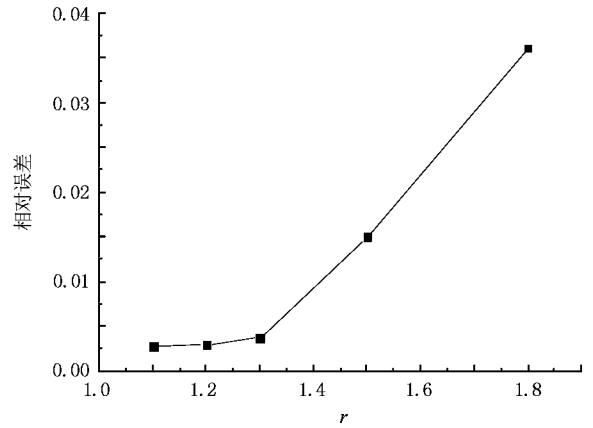


图 3 相对误差随影响半径变化示意图

6.2. 考虑矩形域上的 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in [0, 5], y \in [0, 10], \quad (78)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u(0, y) &= 0, \\ u(x, 10) &= 100\sin(\pi x/10), \\ \frac{\partial u(5, y)}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (79)$$

解析解为

$$u(x, y) = \frac{100\sin(\pi x/10)\sinh(\pi y/10)}{\sinh(\pi)}. \quad (80)$$

如图 4 所示, 在求解域内均匀布置了 6×11 个节点. 罚因子取为 10^5 . 图 5 给出了 $x = 2$ 处的解析解和数值解的对比图. 通过图 5 可以看出, 数值解和解析解吻合得很好.

我们考虑了 $u - u^M$ 在 H^1 范数下的误差. 权函数选为 Gauss 权函数, 基函数选取为线性基. 误差度量如 (77) 式定义. 表 2 给出了当 $x = 2$ 时, 解析解和不同罚因子 α 下的数值解的比较. 结果表明不同罚因子对解的影响是不同的. 基于数值结果, 节点分布固定, 当权函数影响半径取不同值时, 势问题的无单

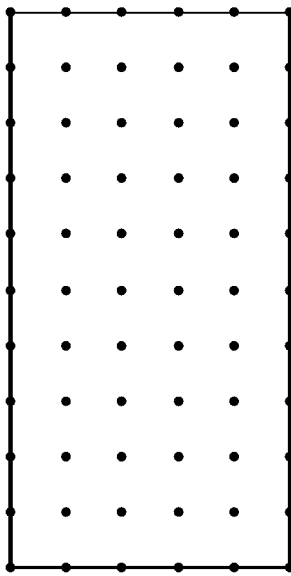


图 4 矩形区域内 6×11 节点均匀分布示意图

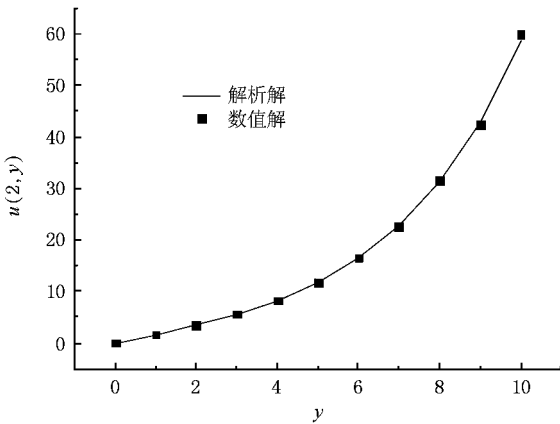


图 5 在 $x=2$ 处的解析解和数值解的比较

元 Galerkin 方法的关于 H^1 范数的误差通过图 6 表示.从图 6 中可以看出 相对误差随着形函数半径 r

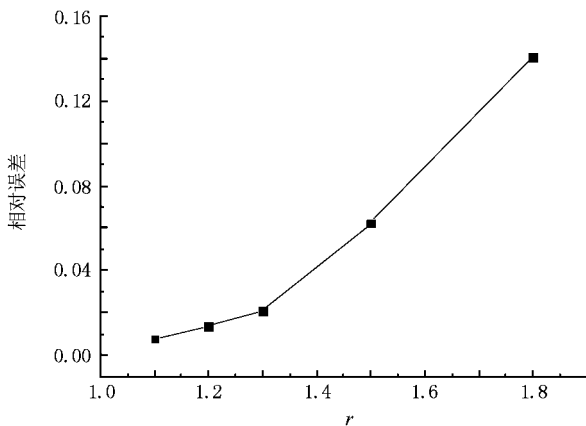


图 6 相对误差随影响半径变化示意图

的减小而减小,从而验证了定理 3 结论的正确性.

需要注意的是

1)一般来说,在一定范围内,权函数半径 r 越小,计算结果越精确,误差也越小.但是,如果 r 充分小,有可能导致系数矩阵的奇异性.所以权函数半径的选定要小,但是必须保证影响域的并集覆盖整个求解区域.

2)罚因子的大小一般取为 $1.0 \times 10^3 - 1.0 \times 10^{12}$.

表 2 解析解和不同罚因子 α 下的数值解的比较

坐标	解析解	数值解			
		$\alpha = 10^5$	$\alpha = 10^7$	$\alpha = 10^9$	$\alpha = 10^{11}$
(2,10)	58.779	58.81	59.266	59.267	59.799
(2,9)	42.826	43.622	43.135	42.521	42.655
(2,8)	31.21	31.620	31.358	31.668	31.535
(2,7)	22.664	22.963	22.726	22.652	22.701
(2,6)	16.374	16.569	16.394	16.523	16.492
(2,5)	11.713	11.836	11.709	11.753	11.844
(2,4)	8.2171	8.2906	8.2802	8.2574	8.2396
(2,3)	5.5392	5.5796	5.5226	5.5896	5.6820
(2,2)	3.4125	3.4312	3.3991	3.3834	3.3524
(2,1)	1.6254	1.6260	1.6176	1.6955	1.6555
(2,0)	0	0.0003	0.0005	0.0002	0.0001

7. 结 论

本文首先给出了移动最小二乘法在 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的误差估计.当节点和形函数满足一定条件时,证明了移动最小二乘近似函数及其相应的高阶导数具有最优阶的误差估计,得到了一个一般性的误差估计公式.

在势问题的无单元 Galerkin 方法的基础上,研究了势问题的通过罚函数法施加本质边界条件的无单元 Galerkin 方法在 Sobolev 空间中的误差估计.当节点和形函数满足一定条件时,证明了该误差估计是最优阶的.从误差分析中可以看出,数值解的误差与权函数的影响半径密切相关.

- [1] Belytschko T , Krongauz Y , Organ D , Fleming M , Krysl P 1996 *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.* **139** 3
- [2] Nayroles B , Touzot G , Villon P 1992 *Comput. Mech.* **10** 307
- [3] Belytschko T , Lu Y Y , Gu L 1994 *Inter. J. Num. Meth. in Engin.* **37** 229
- [4] Onate E , Idelsohn S R , Zienkiewicz O C , Taylor R L 1996 *Inter. J. Num. Meth. in Engin.* **39** 3839
- [5] Cheng R J , Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5569 (in Chinese) [程荣军、程玉民 2007 物理学报 **56** 5569]
- [6] Babuska I , Melenk J M 1997 *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.* **40** 727
- [7] Liu W K , Jun S , Li S , Adee J , Belytschko T 1995 *Inter. J. Num. Meth. in Engin.* **38** 1655
- [8] Atluri S N , Zhu T L 1998 *Comput. Mech.* **22** 117
- [9] Wang J G , Liu G R 2002 *Inter. J. Num. Meth. in Engin.* **54** 1623
- [10] Zhu T , Zhang J , Atluri S N 1998 *Comput. Mech.* **22** 174
- [11] Cheng Y M , Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民、李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [12] Chen L , Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1 (in Chinese) [陈丽、程玉民 2008 物理学报 **57** 1]
- [13] Li S C , Cheng Y M 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 496 (in Chinese) [李树忱、程玉民 2004 力学学报 **36** 496]
- [14] Li S C , Cheng Y M , Li S C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4760 (in Chinese) [李树忱、程玉民、李术才 2006 物理学报 **55** 4760]
- [15] Cheng Y M , Chen M J 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 181 (in Chinese) [程玉民、陈美娟 2003 力学学报 **35** 181]
- [16] Cheng Y M , Peng M J 2005 *Science in China Series G Physics , Mechanics & Astronomy* **48** 641
- [17] Kitipomchai S , Liew K M , Cheng Y M 2005 *Comput. Mech.* **36** 13
- [18] Qin Y X , Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校、程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [19] Dai B D , Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 (in Chinese) [戴保东、程玉民 2007 物理学报 **56** 597]
- [20] Levin D 1998 *Math. of Comput.* **67** 1735
- [21] Wendland H 2001 *IMA J. Numer. Anal.* **21** 285
- [22] Armentano M G , Duran R G 2001 *Appl. Num. Math.* **37** 397
- [23] Armentano M G 2002 *SIAM J. Numer. Anal.* **39** 38
- [24] Zuppa C 2003 *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society , New Series* **34** 231
- [25] Krysl P , Belytschko T 1997 *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.* **148** 257
- [26] Liu W K , Li S F , Belytschko T 1997 *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.* **143** 113

Error estimates of element-free Galerkin method for potential problems^{*}

Cheng Rong-Jun^{1 2)} Cheng Yu-Min¹⁾†

1 上海应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072, 中国

2 宁波理工学院, 浙江大学, 宁波 315100, 中国

(Received 27 December 2007 ; revised manuscript received 21 January 2008)

Abstract

The error estimates for moving least-square approximation, which is the method for obtaining the shape function in element-free Galerkin method, are presented in Sobolev space $W^{k,p}(\Omega)$ for high dimensional problems. Then on the basis of element-free Galerkin method for potential problems, the error estimates for element-free Galerkin method for potential problems, in which the essential boundary conditions are enforced by penalty methods, are obtained. The error estimates we present in this paper have optimal order when the nodes and shape functions satisfy certain conditions. From the error analysis, it is shown that the error bound of the potential problem is directly related to the radii of the weight functions. Two numerical examples are also given to verify the conclusions in this paper.

Keywords : meshless method, element-free Galerkin method, potential problem, error estimate

PACC : 0200, 0260, 4600

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10571118) and the Shanghai Leading Academic Discipline Program of China (Grant No. Y0103).

† Corresponding author. E-mail : ymcheng@shu.edu.cn ; ymcheng@sh163.net