

四维 Qi 系统零平衡点的 Hopf 分岔反控制*

刘素华^{1)†} 唐驾时²⁾

1) 上海工程技术大学高职学院, 上海 200437)

2) 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

(2007 年 12 月 16 日收到, 2008 年 3 月 13 日收到修改稿)

通过线性与非线性状态反馈, 实现了对四维 Qi 系统零平衡点的 Hopf 分岔反控制. 首先确定产生 Hopf 分岔的线性控制项, 得到线性控制增益的选取原则. 然后, 利用稳定性分析, 借助于对线性受控 Qi 系统的 Jordan 标准型的直接控制以及适当的变换, 确定影响 Hopf 分岔稳定性的非线性控制项, 得到非线性控制增益的选取原则. 针对所考虑分岔参数的不同, 给出不同的控制方案. 最后通过数值模拟验证了理论分析结果的正确性.

关键词: Qi 系统, Hopf 分岔, 反控制, 稳定性

PACC: 0547

1. 引 言

对非线性动力系统的 Hopf 分岔进行合理的控制具有重要的理论研究和实际应用价值, 一方面, Hopf 分岔可能带来系统的失稳而引发不良后果, 需要抑制或消除它; 另一方面, 有些实际应用, 例如振荡器的设计^[1]等, 需要人为地产生 Hopf 分岔, 即实现 Hopf 分岔反控制. 当前混沌控制及其反控制已取得了不少的研究成果^[2-4], 分岔控制也正处在不断地研究探索之中^[5-9]. 最近, Qi 等人^[10,11]拓展 Liu 和 Chen^[12] 创建的一个带有平方交叉项的三维混沌系统的思想, 提出了一个每一个方程都含有三次交叉非线性项的新的四维混沌动力系统, 它具有极其复杂的非线性动力学现象, 如 Hopf 分岔, 倍周期分岔, 混沌以及暂态混沌^[13]等. 本文研究 Qi 系统零平衡点的 Hopf 分岔反控制, 发展前述 Yu 等人的控制方法, 针对不同的分岔参数, 从多项式反馈控制中找到影响零平衡点 Hopf 分岔的产生并保证其稳定性的线性与非线性控制项, 推导出控制增益的选取原则, 得到零平衡点的 Hopf 分岔反控制.

2. 系统分析

考虑如下 Qi 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1 x_2 x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3, \end{aligned} \quad (1)$$

其中参数 a, b, c, d 均为正的实数. 该系统具有一个零平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$ 和两类(8 个)非零平衡点^[10,11]. 本文主要研究零平衡点的 Hopf 分岔反控制, 略去对非零平衡点的考虑.

在平衡点 S_0 系统(1)线性化矩阵的特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a + b \pm \sqrt{a^2 + 6ab + b^2})$, $\lambda_3 = -c$, $\lambda_4 = -d$. 由于 a, b, c, d 都是正实数, 所以 $\lambda_1 > 0$, 其余特征根均为负实数, S_0 是鞍点. 另一方面, 所有特征根的实部 $\text{Re}\lambda$ 都不会穿过虚轴, 系统(1)在平衡点 S_0 不可能发生 Hopf 分岔.

为使系统(1)在平衡点 S_0 产生 Hopf 分岔, 设计线性状态反馈控制项. 设 a 为分岔参数, 系统在平衡点 S_0 的线性化矩阵具有一对虚数特征根 $\lambda_{1,2} = \alpha(a) \pm i\omega(a)$ 和两个实数根 λ_3, λ_4 , 根据 Hopf 分岔定义, 当分岔参数 $a = a_0$ 满足条件

$$\alpha(a_0) = 0, \omega(a_0) > 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \quad (2)$$

时, 系统产生 Hopf 分岔, 且在 $a = a_0$ 处

$$\alpha'(a_0) \neq 0. \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10672053)资助的课题.

† E-mail: liusuhua968@yahoo.com.cn

参数值 a_0 即为 Hopf 分岔值.

为确定系统的 Hopf 分岔稳定性, 首先需将系统转化为 Jordan 标准型, 即为

$$\dot{y} = \mathcal{J}(a)y + F(y, a),$$

其中 $F(y, a)$ 为非线性项. 在分岔点 $a = a_0$ 处, 有

$$\mathcal{J}(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4(a_0) \end{pmatrix},$$

根据 Hopf 分岔理论^[14], 利用中心流形定理降维原理, 计算 Hopf 分岔稳定性指标

$$\beta_2 = 2\text{Re}\left\{ \frac{g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2}{2\omega_0} i + \frac{g_{21}}{2} \right\},$$

上式中各特征量取决于系统 Jordan 标准型中的非线性项 $F(y, a)$, 其求解表达式详见附录或文献 [14].

若 $\beta_2 < 0$, Hopf 分岔稳定, 若 $\beta_2 > 0$, Hopf 分岔不稳定. 倘若线性受控后系统的 Hopf 分岔不具有稳定性, 则需要设计非线性控制项, 以获得 $\beta_2 < 0$, 保证 Hopf 分岔的稳定性.

3. 线性控制

3.1. Hopf 分岔的产生

设控制器的线性项为 $u_p = \sum_{i=1}^4 k_{pi}x_i$ ($p = 1, 2$ 对应于所控制的方程). 显然, 此线性控制没有改变平衡点 S_0 . 受控系统在平衡点 S_0 的线性化矩阵为

$$J_{ok} = \begin{pmatrix} -a + k_{11} & a + k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ b + k_{21} & b + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \text{Im}[\lambda_{1,2}(a_0)] = \sqrt{-2b^2 - b(k_{11} + k_{12} + k_{21} + 3k_{22}) - k_{11}k_{21} - k_{12}k_{21} - k_{21}k_{22} - k_{22}^2}, \\ \alpha'(0) &= \text{Re}[\lambda_{1,2}'(a_0)] = -\frac{1}{2}\omega_0', \quad \omega'(0) = \text{Im}[\lambda_{1,2}'(a_0)] = -\frac{2b + k_{21} + k_{22}}{2\omega_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

对受控系统 (7) 作变换 $x = Ty$, 其中

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{b + k_{21}} & -\frac{b + k_{22}}{b + k_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b + k_{21} \neq 0 \text{ 且 } 10)$$

相应的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}), \lambda_3 = -c, \lambda_4 = -d. \quad (5)$$

其中 $A = -a + b + k_{11} + k_{22}$, $B = -2ab + bk_{11} - bk_{12} - ak_{21} - k_{12}k_{21} - ak_{22} + k_{11}k_{22}$.

由条件 (2) 和 (3) 知, Hopf 分岔产生的条件为

$$\begin{aligned} -a + b + k_{11} + k_{22} &= 0, \\ -2ab + bk_{11} - bk_{12} - ak_{21} - k_{12}k_{21} - ak_{22} + k_{11}k_{22} &> 0. \end{aligned} \quad (6)$$

由此可见, 参数 c, d 与分岔的产生无关, 线性控制增益 k_{p3}, k_{p4} ($p = 1, 2$) 对 Hopf 分岔的产生无作用, 因而线性受控系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $u_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2$, $u_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2$. 同时, 此受控系统只可能使参数 a, b 出现 Hopf 分岔点, 不会使参数 c, d 出现 Hopf 分岔点.

若选取 $k_{21} = 0, k_{22} = 0$, 则条件 (6) 简化为

$$a - b - k_{11} = 0, a + b + k_{12} < 0. \quad (8)$$

3.2. 线性受控系统的 Hopf 分岔稳定性分析

施加线性控制后, 受控系统 (7) 在满足条件 (6) 的情况下产生 Hopf 分岔, 然而, 是否需要增加非线性控制项来保证所产生 Hopf 分岔的稳定性, 还需要对受控系统 (7) 的 Hopf 分岔进行稳定性分析. 选取 a 作为分岔参数, 根据 (5) 式得到在分岔点 $a = a_0 = b + k_{11} + k_{22}$ 处有如下特征量:

得到 Jordan 标准型

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega_0 y_2 - \frac{b + k_{22}}{b + k_{21}} y_1 y_3 y_4 \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \left(b + k_{21} + \frac{(b + k_{22})^2}{b + k_{21}} \right) y_2 y_3 y_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_2 &= \omega_0 y_1 - \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_3 y_4 \\
 &\quad + \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2 y_3 y_4, \\
 \dot{y}_3 &= -cy_3 + \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_2 y_4 \\
 &\quad - \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2^2 y_4, \\
 \dot{y}_4 &= -dy_4 + \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_2 y_3 \\
 &\quad - \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2^2 y_3. \quad (11)
 \end{aligned}$$

将(9)式和方程(11)的右端代入附录中特征量的表达式,得到 Hopf 分岔稳定性指标 $\beta_2 = 0$, 这说明此 Hopf 分岔是退化的,不能保证其稳定,根据文献[14]可进一步计算 β_4 来判定其稳定性,然而这是极为繁杂而不必要的工作,事实上,数值模拟显示,线性受控系统(7)没有获得零平衡点邻域稳定的极限环.下面将增加非线性控制项,以保证受控系统(7) Hopf 分岔的稳定性.

4. 非线性控制

4.1. 非线性控制项的确定

为方便从所有状态变量的二次和三次多项式中确定影响线性受控系统(7) Hopf 分岔稳定性的控制项,初步设计直接施加于标准型(11)的如下非线性控制项:

$$\tilde{v}_q = \sum_{i,j=1}^4 \tilde{A}_{qij} y_i y_j + \sum_{i,j,k=1}^4 \tilde{B}_{qijk} y_i y_j y_k \quad (q = 1, 2, 3, 4), \quad (12)$$

其中 q 对应于所控制的方程,且

$$\tilde{A}_{qij} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{qji} + \tilde{A}_{qij}),$$

$$\tilde{B}_{qijk} = \frac{1}{6}(\tilde{B}_{qjik} + \tilde{B}_{qkij} + \tilde{B}_{qkji} + \tilde{B}_{qjki} + \tilde{B}_{qkji} + \tilde{B}_{qjki}).$$

利用与 3.2 节相同的计算方法,将标准型(11)施加非线性控制项(12)后的右端以及(9)式代入附录中特征量的表达式,得到稳定性指标 β_2 为

$$\beta_2 = \frac{1}{4}(3\tilde{B}_{1111} + \tilde{B}_{1122} + \tilde{B}_{2112} + 3\tilde{B}_{2222}),$$

由上式可见,所有二次非线性控制项对稳定性均无作用,若使

$$3\tilde{B}_{1111} + \tilde{B}_{1122} + \tilde{B}_{2112} + 3\tilde{B}_{2222} < 0,$$

则 Hopf 分岔稳定.因此,非线性控制项(12)简化为

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_1 &= \tilde{B}_{1111} y_1^3 + \tilde{B}_{1122} y_1 y_2^2, \\
 \tilde{v}_2 &= \tilde{B}_{2112} y_1^2 y_2 + \tilde{B}_{2222} y_2^3. \quad (13)
 \end{aligned}$$

对非线性控制项(13)作逆变换 $y = T^{-1}x$,得到作用于线性受控系统(7)的非线性控制项

$$\begin{aligned}
 v_1 &= A_1 x_1^3 + A_2 x_1^2 x_2 + A_3 x_1 x_2^2, \\
 v_2 &= B_1 x_1^2 x_2 + B_2 x_1 x_2^2 + B_3 x_2^3. \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中 $A_i, B_i (i = 1, 2, 3)$ 分别对应于第一、第二个方程的非线性控制增益.

4.2. 稳定性指标 β_2 表达式

通过上述对线性与非线性控制项的分析,确定受控系统为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4 + u_1 + v_1, \\
 \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 + u_2 + v_2, \\
 \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1 x_2 x_4, \\
 \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3. \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中线性项 u_1 和 u_2 同(7)式,非线性项见(14)式.对受控系统(15)做变换 $x = Ty$,得到如下 Jordan 标准型:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= -\omega_0 y_2 - \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_1 y_3 y_4 \\
 &\quad + \frac{1}{\omega_0} \left(b+k_{21} + \frac{(b+k_{22})^2}{b+k_{21}} \right) y_2 y_3 y_4 + Q_1(y), \\
 \dot{y}_2 &= \omega_0 y_1 - \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_3 y_4 \\
 &\quad + \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2 y_3 y_4 + Q_2(y), \\
 \dot{y}_3 &= -cy_3 + \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_2 y_4 \\
 &\quad - \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2^2 y_4, \\
 \dot{y}_4 &= -dy_4 + \frac{\omega_0}{b+k_{21}} y_1 y_2 y_3 \\
 &\quad - \frac{b+k_{22}}{b+k_{21}} y_2^2 y_3. \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 Q_1(y) &= \frac{\omega_0^2 A_1}{(b+k_{21})^2} y_1^3 \\
 &\quad + \frac{\omega_0}{(b+k_{21})} ((B_1 - 3A_1)(b+k_{22}) \\
 &\quad + A_2(b+k_{21})) y_1^2 y_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(A_3 + \frac{(b + k_{22})(2A_2 + B_2)}{b + k_{21}} \right. \\
& + \left. \frac{(b + k_{22})(3A_1 + 2B_1)}{(b + k_{21})^2} \right) y_1 y_2^2 \\
& + \frac{1}{\omega_0} ((b + k_{22})(B_3 - A_3) \\
& + \frac{(b + k_{22})(A_2 - B_2)}{b + k_{21}} \\
& + \frac{(b + k_{22})(B_1 - A_1)}{(b + k_{21})^2}) y_2^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(y) = & \left(B_3 - \frac{(b + k_{22})B_2}{b + k_{21}} + \frac{(b + k_{22})^2 B_1}{(b + k_{21})^2} \right) y_2^3 \\
& + \frac{\omega_0 B_1}{(b + k_{21})^2} y_1^2 y_2 \\
& + \omega_0 \left(\frac{B_2}{b + k_{21}} - \frac{\chi(b + k_{22})B_1}{(b + k_{21})^2} \right) y_1 y_2^2.
\end{aligned}$$

从而得到稳定性指标 β_2 的表达式为

$$\begin{aligned}
\beta_2 = & \frac{1}{4} \left(- \frac{b + k_{11} + k_{12} + k_{22}}{b + k_{21}} (3A_1 + B_1) \right. \\
& \left. - \frac{\chi(b + k_{22})}{b + k_{21}} (A_2 + B_2) + A_3 + 3B_3 \right) \quad (17)
\end{aligned}$$

其中 $b + k_{21} \neq 0$. 适当选取控制增益 k_{pi} , A_i 和 B_i , 使满足条件(6)以及

$$\begin{aligned}
& - \frac{b + k_{11} + k_{12} + k_{22}}{b + k_{21}} (3A_1 + B_1) \\
& - \frac{\chi(b + k_{22})}{b + k_{21}} (A_2 + B_2) + A_3 + 3B_3 < 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

则可以得到稳定的 S_0 点 Hopf 分岔反控制, 分岔值为 $a = a_0 = b + k_{11} + k_{22}$.

若考虑 b 为 Hopf 分岔参数, 则控制增益所需满足的条件亦为(6)和(18), 分岔值为 $b = b_0 = a - k_{11} - k_{22}$.

5. 分岔参数为 c, d 的控制方案

以参数 c, d 为 Hopf 分岔参数, 若只对系统(1)的后两个方程进行线性控制, 则受控系统在 S_0 点的线性化矩阵总存在大于零的实特征根 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + b + \sqrt{a^2 + 6ab + b^2})$, 不可能得到的 Hopf 分岔. 若在系统(7)的基础上增加对后两个方程的线性与非线性控制, 类似上节分析方法, 受控系统确定为

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4 + u_1,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 + u_2, \\
\dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1 x_2 x_4 + u_3 + v_3, \\
\dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3 + u_4 + v_4.
\end{aligned} \quad (19)$$

其中 $u_1 = k_{11} x_1 + k_{12} x_2, u_2 = k_{21} x_1 + k_{22} x_2, u_3 = k_{33} x_3 + k_{34} x_4, u_4 = k_{43} x_3 + k_{44} x_4, v_3 = C_1 x_3^3 + C_2 x_3^2 x_4 + C_3 x_3 x_4^2, v_4 = D_1 x_3^2 x_4 + D_2 x_3 x_4^2 + D_3 x_4^3$. 注: $k_{pi}(p, i = 1, 2, 3, 4)$ 为线性控制增益, $C_j, D_k(j, k = 1, 2, 3)$ 为非线性控制增益.

当线性控制增益 k_{pi} 满足条件

$$\begin{aligned}
& k_{34} k_{43} \neq 0, \\
& k_{33} + k_{44} = c + d, \\
& c^2 - 2ck_{33} + k_{33}^2 + k_{34} k_{43} < 0, \\
& k_{11} + k_{22} < a - b, \\
& 0 < -2ab - a(k_{21} + k_{22}) \\
& + b(k_{11} - k_{12}) - k_{12} k_{21} + k_{11} k_{22} \\
& < \frac{1}{4}(a - b - k_{11} - k_{22})^2. \quad (20)
\end{aligned}$$

时, Hopf 分岔产生, 分岔值由(20)式中的等式确定.

令 c 为 Hopf 分岔参数, 采用与 a 为分岔参数时相同的分析方法得到, 在分岔值 $c = c_0 = -d + k_{33} + k_{44}$ 时, 受控系统(19)的 Hopf 分岔稳定性指标 β_2 为

$$\begin{aligned}
\beta_2 = & \frac{1}{4} \left(- \frac{k_{34}}{k_{43}} (3C_1 + D_1) \right. \\
& \left. + \frac{\chi(d - k_{44})}{k_{43}} (C_2 + D_2) + C_3 + 3D_3 \right). \quad (21)
\end{aligned}$$

若选取控制增益满足

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_{34}}{k_{43}} (3C_1 + D_1) \\
& + \frac{\chi(d - k_{44})}{k_{43}} (C_2 + D_2) + C_3 + 3D_3 < 0 \quad (22)
\end{aligned}$$

则可以得到稳定的 S_0 点 Hopf 分岔.

条件(20)相对复杂, 若选取 $k_{21} = 0, k_{22} = 0, k_{44} = 0$, 则条件(20)可简化为

$$\begin{aligned}
& k_{33} = c + d, \\
& k_{34} k_{43} < -d^2, \\
& k_{11} < a - b, \\
& - \frac{a^2 + 6ab + b^2 - \chi(a + b)k_{11} + k_{11}^2}{4b} \\
& < k_{12} < -2a + k_{11}. \quad (23)
\end{aligned}$$

当 d 为 Hopf 分岔参数时, 控制增益所需满足的条件亦为(20)和(22), 分岔值为 $d = d_0 = -c +$

$k_{33} + k_{44}$.

$(x_1 - x_2 - x_4)$.

6. 受控系统的数值模拟

以 a 作为 Hopf 分岔参数, 当 $b = 10, c = 110, d = 10$ 时^[11] 根据条件(6)或(8), 取 $k_{11} = -2, k_{12} = -20, k_{21} = 0, k_{22} = 0$, 又根据条件(18), 取 $A_1 = -1, A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$, 则在 $a = a_0 = 8$ 时得到平衡点 S_0 上的 Hopf 分岔, 且 $\beta_2 = -0.9 < 0$, 分岔方向为 $a < a_0$, Hopf 分岔稳定, 相应的分岔图如图 1 所示. 图 2 为当 $a = 7$ 时受控系统(15)在平衡点 S_0 邻域的时间历程($t-x_1$)以及极限环的三维轨迹图

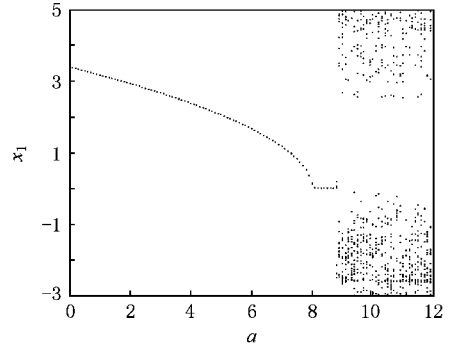


图 1 受控系统(15)的分岔图

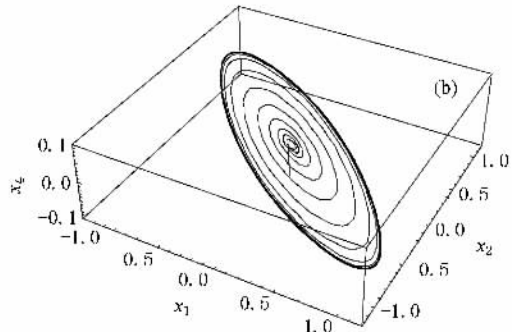
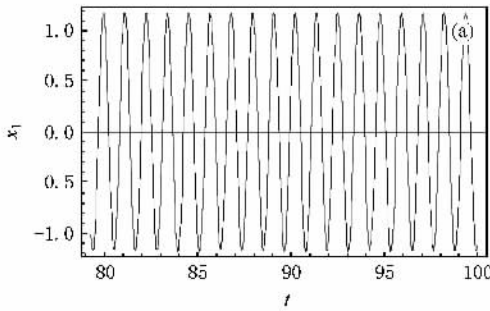


图 2 受控系统(15)在平衡点 S_0 邻域的时间历程($t-x_1$)以及极限环三维轨迹图($b = 10, d = 10, c = 110, a = 7, k_{11} = -2, k_{12} = -20, k_{21} = 0, k_{22} = 0, A_1 = -1, A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$)

以 c 作为 Hopf 分岔参数, 当 $a = 8, b = 10, d = 10$ 时, 根据条件(20)或(23), 取 $k_{11} = -10, k_{12} = -27, k_{21} = 0, k_{22} = 0, k_{33} = 22, k_{34} = 15, k_{43} = -10$, 又根据条件(22), 取 $C_1 = -1, C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, 则在 $c = c_0 = 12$ 时得到平衡点 S_0 上的 Hopf 分岔, 且 $\beta_2 = -1.125 < 0$, 分岔方向为 $c < c_0$, Hopf 分岔稳定, 相应的分岔图如图 3 所示. 由图 3 可见, 受

控系统(19)在 $c = c_0 = 12$ 点产生 Hopf 分岔, 随着分岔参数的减小, 在 $c = c_0 = 3.6$ 时 S_0 点 Hopf 分岔失去稳定性, 受控系统趋于非零平衡点. 图 4 为 $c = 11.9$ 时受控系统(19)在平衡点 S_0 邻域的时间历程($t-x_3$)以及极限环的三维轨迹图($x_3-x_4-x_1$).

7. 结 论

Qi 系统的零平衡点为鞍点, 为实现零平衡点 Hopf 分岔的反控制, 设计了线性与非线性状态反馈. 首先确定产生 Hopf 分岔的线性控制项, 得到线性控制增益的选取原则. 然后, 通过直接对线性受控系统的 Jordan 标准型进行非线性控制, 利用 Hopf 分岔稳定性分析, 得到控制稳定性的非线性项, 给出非线性控制增益的选取原则. 本文针对不同的分岔参数给出不同的控制方案. 最后, 通过数值模拟验证了理论分析结果, 满足选取原则的受控系统均可在零平衡点得到稳定的 Hopf 分岔极限环.

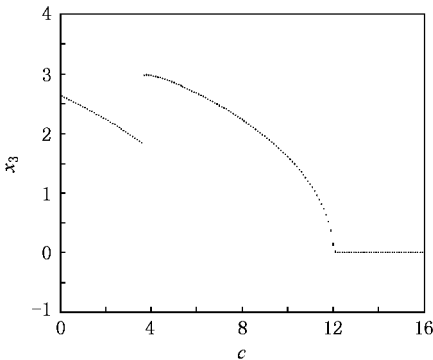


图 3 受控系统(19)的分岔图

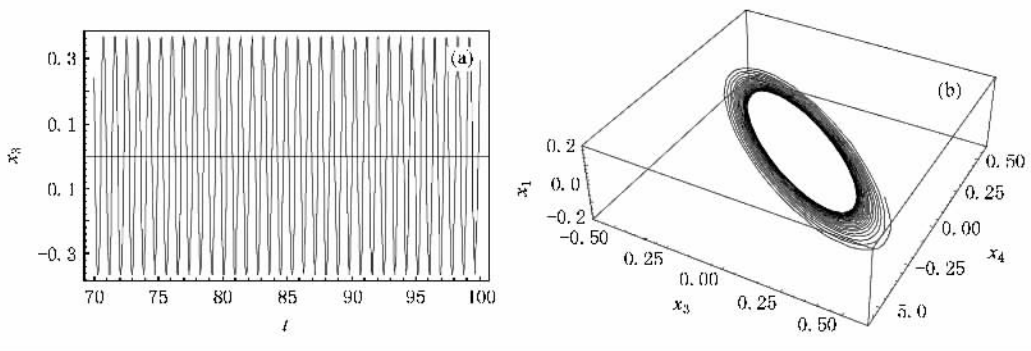


图 4 受控系统 (19) 在平衡点 S_0 邻域的时间历程 ($t-x_3$) 以及极限环三维轨迹图 ($a = 8, b = 10, d = 10, c = 11.9, k_{11} = -10, k_{12} = -27, k_{21} = 0, k_{22} = 0, C_1 = -1, C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$)

附 录

$$g_{20} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} - \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} - 2 \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right),$$

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} \right) \right),$$

$$g_{02} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} - \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} + 2 \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right),$$

$$g_{21} = G_{21} + 2G_{110} w_{11}^1 + G_{101}^1 w_{20}^1 + 2G_{110}^2 w_{11}^2 + G_{101}^2 w_{20}^2,$$

其中

$$G_{21} = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2^3} \right) \right),$$

$$G_{110}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_3} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_3} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2 \partial y_3} \right) \right),$$

$$G_{110}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_4} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_4} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2 \partial y_4} \right) \right),$$

$$G_{101}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_3} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_3} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2 \partial y_3} \right) \right),$$

$$G_{101}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_4} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_4} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2 \partial y_4} \right) \right),$$

$$w_{11}^1 = -\frac{1}{4\lambda_3(a_0)} \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_2^2} \right),$$

$$w_{11}^2 = -\frac{1}{4\lambda_4(a_0)} \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_2^2} \right),$$

$$w_{20}^1 = \frac{1}{4(2i\omega_0 - \lambda_3(a_0))} \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_2^2} - 2i \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_1 \partial y_2} \right),$$

$$w_{20}^2 = \frac{1}{4(2i\omega_0 - \lambda_3(a_0))} \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_2^2} - 2i \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_1 \partial y_2} \right).$$

以上求导均在零点, 分岔参数取为分岔值.

[1] Shen Z H, Ma J H 2001 *Introduction of Nonlinear Dynamical System Analysis* (Beijing: Science Press) p114 (in Chinese) [盛昭瀚、马军海 2001 非线性动力系统分析引论(北京: 科学出版社)第 114 页]

[2] Chen G R, Lü J H 2005 *Analysis, Control and Synchronization of Dynamics for the Lorenz Family* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2005 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京: 科学出版社)]

- [3] Fan W H , Tian X J , Chen J F , Zheng F Y , Yong L , Gao B , Luo H E 2007 *Chin. Phys.* **16** 2909
- [4] Lu J G 2005 *Chin. Phys.* **14** 67
- [5] Liu S H , Tang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3145 (in Chinese)
[刘素华、唐驾时 2007 物理学报 **56** 3145]
- [6] Tang J S , Ouyang K J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4437 (in Chinese)
[唐驾时、欧阳克俭 2006 物理学报 **55** 4437]
- [7] Qian C Z , Fu W B 2005 *J. Dyn. Contr.* **3** 7 (in Chinese) [钱长照、符文彬 2005 动力学与控制学报 **3** 7]
- [8] Chen D S , Wang H O , Chen G R *IEEE Tran. Circuits Syst. I* **48** 661
- [9] Yu P , Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1683
- [10] Qi G Y , Du S Z , Chen G R , Chen Z Q , Yuan Z Z 2005 *Chaos Solitons Fractals* **23** 1671
- [11] Qi G Y , Chen G R 2006 *Physics Lett. A* **352** 386
- [12] Liu W B , Chen G 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 261
- [13] Wang L , Ni Q , Huang Y Y 2007 *J. Dyn. Contr.* **5** 20 (in chinese) [王 琳、倪 樵、黄玉盈 2007 动力学与控制学报 **5** 20]
- [14] Hassard B , Kazarinoff N , Wan Y 1981 *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (London : Cambridge University Press) p86

Anti-control of Hopf bifurcation at zero equilibrium of 4D Qi system^{*}

Liu Su-Hua^{1 2†} Tang Jia-Shi²⁾

1 \checkmark Vocational Technical College , Shanghai University of Engineering Science , Shanghai 200437 , China)

2 \checkmark College of Mechanics and Aerospace , Hunan University , Changsha 410082 , China)

(Received 16 December 2007 ; revised manuscript received 13 March 2008)

Abstract

Anti-control of Hopf bifurcation at the zero equilibrium of the 4D Qi system is achieved by the linear and nonlinear state feedback. First , aimed at the emergence of the Hopf bifurcation , linear control terms are determined and the conditions which the linear control gains should satisfy are presented. Then , with respect to the nonlinear control terms , which are associated with the stability of Hopf bifurcation , the nonlinear feedback applied directly to the Jordan form of the Qi system is investigated. By the stability analysis and a proper transformation , the nonlinear control terms which play roles on the stability of Hopf bifurcation are collected and the condition restricting the nonlinear control gain is obtained. The control strategy is different as the bifurcation parameter concerned is altered. Finally , the numerical results are presented that confirm the analytical predictions.

Keywords : Qi system , Hopf bifurcation , anti-control , stability

PACC : 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672053).

[†] E-mail : liusuhua968@ yahoo . com . cn