

# 振动筛系统的两类余维三分岔与 非常规混沌演化\*

张永祥<sup>1)†</sup> 孔贵芹<sup>2)</sup> 俞建宁<sup>3)</sup>

1) 沈阳农业大学理学院 沈阳 110161)

2) 中国船舶工业第六三五四研究所 九江 332000)

3) 兰州交通大学数理与软件工程学院 兰州 730070)

(2007 年 8 月 1 日收到 2008 年 1 月 29 日收到修改稿)

建立了振动筛系统的动力学模型, 推导出了其周期运动的 Poincaré 映射, 基于 Poincaré 映射方法着重研究了系统 Flip-Hopf-Hopf 余维三分岔、三次强共振条件下的 Hopf-Hopf 余维三分岔以及三种非常规的混沌演化过程. 研究结果表明, 这两类余维三分岔点附近的动力学行为变得更加复杂和新颖, 在分岔点附近出现了三角形吸引子、 $3T^2$  环面分岔以及“五角星型”、“轮胎型”概周期吸引子, 揭示了环面爆破、环面倍化以及  $T^2$  环面分岔向混沌演化的过程, 这些结果对于振动筛系统的动力学优化设计提供了理论参考.

关键词: 余维三分岔, 非常规混沌演化,  $T^2$  环面分岔

PACC: 0547

## 1. 引言

非线性动力学的分岔和混沌的研究, 一直是近十几年来非线性科学领域最活跃的研究前沿<sup>[1-5]</sup>. 振动筛是工业生产中常见的一种机械设备, 振动筛系统具有强非线性和不连续性, 属于多自由度碰撞振动系统范畴, 系统的动力学响应十分复杂. 振动筛系统分岔与混沌问题的研究在其动力学优化设计、可靠性分析及降低噪声等方面都具有重要的意义. 文献 [7] 对映射的分岔理论进行了分析, 文献 [8, 9] 研究一类两自由度系统的余维二分岔问题, 文献 [10, 11] 探索了一类两自由度含间隙碰撞振动系统的动力学行为及混沌演化路线, 文献 [12] 解决了两自由度对碰振动系统的稳定性及分岔, Ivanov 对碰撞振动系统的奇异性进行了讨论<sup>[13]</sup>, 文献 [14, 15] 研究了一类碰撞振动系统的 Hopf 分岔与周期倍化分岔, 对于分岔的研究主要集中在余维一和余维二分岔研究, 对于余维三分岔问题, 需要三参数开折, 影响因素很多, 参数平面划分复杂, 其理论研究具有一定的难度, 对此情况下的分岔与混沌形成过程的

理论研究目前仍是一个难题, 因此研究这类系统主要通过定性分析和数值模拟, 本文针对振动筛这一三自由度碰撞振动模型, 分析了系统的两类余维三分岔以及三种非常规混沌演化过程, 揭示了分岔点附近的复杂动力学行为. 振动筛复杂分岔和混沌的深入研究对于振动系统动力学优化设计提供了理论参考.

## 2. 振动筛的力学模型及 Poincaré 映射

图 1 为振动筛系统的力学模型图. 质量为  $M_1$  和  $M_2$  的振子分别由刚度为  $K_1$  和  $K_2$  的线性弹簧和阻尼系数为  $C_1$  和  $C_2$  的线性阻尼器相联接, 两个振子只作垂直方向的运动,  $M_1$  受到简谐激振力  $P \sin(\Omega T + \tau)$  的作用. 质量为  $M_3$  的质块由重力作用从上方落下与  $M_1$  碰撞, 改变速度方向后又以新的初值运动, 然后再次与  $M_1$  碰撞, 如此往复. 假设力学模型中的阻尼是 Rayleigh 型比例阻尼, 碰撞过程由碰撞恢复系数  $R$  确定.

碰撞振动系统的无量纲运动微分方程为

\* 甘肃省自然科学基金(批准号 3ZS051-A25-030)资助的课题.

† E-mail: zyx9701@126.com

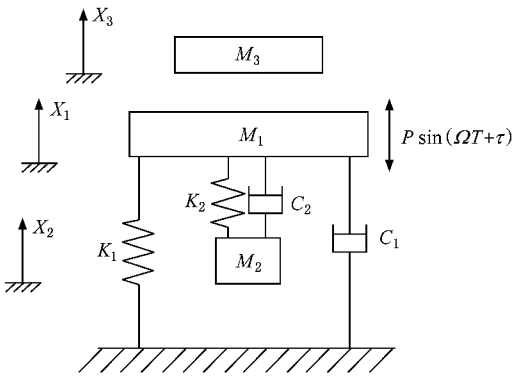


图 1 振动筛的力学模型

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 2\zeta(1 + \beta) & -2\zeta\beta \\ -2\zeta\beta & 2\zeta\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 + \gamma & -\gamma \\ -\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \tau), \\ & \ddot{x}_3 = -\delta. \end{aligned} \tag{1}$$

振子  $M_1$  与  $M_3$  的冲击方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1-} + \mu \dot{x}_{3-} &= \dot{x}_{1+} + \mu \dot{x}_{3+}, \\ \dot{x}_{1+} - \dot{x}_{3+} &= -R(\dot{x}_{1-} - \dot{x}_{3-}), \end{aligned} \tag{2}$$

在方程 (1) 和 (2) 中“ $\cdot$ ”表示对无量纲时间  $t$  求导数  $\dot{x}_{1-}$ 、 $\dot{x}_{1+}$  和  $\dot{x}_{3-}$ 、 $\dot{x}_{3+}$  分别表示振子  $M_1$  与  $M_3$  碰撞前后的瞬时速度， $R$  为恢复系数，其中无量纲量为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M_2}{M_1}, \beta = \frac{K_2}{K_1}, \gamma = \frac{C_2}{C_1}, \\ \mu &= \frac{M_3}{M_1}, \omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, \\ \zeta &= \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, \delta = \frac{M_3 g}{P}, \epsilon x_i = \frac{X_i K_1}{P}, \end{aligned} \tag{3}$$

设振子  $M_1$  与  $M_3$  碰撞后的瞬时为无量纲时间为 0，那么下一次振子  $M_1$  与  $M_3$  碰撞前的瞬时为  $2n\pi/\omega$ ， $n \in Z$ 。系统周期  $n-1$  运动的边界条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_3(0) = x_1(2n\pi/\omega) \\ &= x_3(2n\pi/\omega) = x_{10}, \\ x_2(0) &= x_2(2n\pi/\omega) = x_{20}, \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_2(2n\pi/\omega) = \dot{x}_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \frac{1 - \mu R}{1 + \mu} \dot{x}_1(2n\pi/\omega) \\ &+ \frac{\mu(1 + R)}{1 + \mu} \dot{x}_3(2n\pi/\omega) \\ &= \dot{x}_{10}, \\ \dot{x}_3(0) &= \frac{1 + R}{1 + \mu} \dot{x}_1(2n\pi/\omega) \\ &+ \frac{\mu - R}{1 + \mu} \dot{x}_3(2n\pi/\omega) \\ &= \dot{x}_{30}, \end{aligned} \tag{4}$$

可以求的初相位角和四个积分常数的表达式 (略去繁琐的推导过程和各表达式结果)，根据模式叠加法，得到周期运动的表达式

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} (e^{-\eta_j t} (a_j \cos \omega_{dj} t + b_j \sin \omega_{dj} t) \\ &+ A_j \sin(\omega t + \tau_0) + B_j \cos(\omega t + \tau_0)), \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} (e^{-\eta_j t} ((b_j \omega_{dj} - \eta_j a_j) \cos \omega_{dj} t \\ &- (\eta_j b_j + a_j \omega_{dj}) \sin \omega_{dj} t) + A_j \omega \cos(\omega t + \tau_0) \\ &- B_j \omega \sin(\omega t + \tau_0)), \\ x_3 &= x_{10} + \frac{n\pi}{\omega} \eta t - \frac{1}{2} \eta t^2, \\ \dot{x}_3 &= \frac{n\pi}{\omega} \eta - \eta t, (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{5}$$

$\psi_{ij}$  是正则模态矩阵  $\psi$  的元素， $\eta_j = \zeta \omega_j^2$ ， $\omega_{dj} = \sqrt{\omega_j^2 - \eta_j^2}$ 。  $a_j$  和  $b_j$  是积分常数，由系统的初始条件和模态参数确定， $A_j$  和  $B_j$  为振幅常数。

对碰撞系统而言，存在擦边运动造成的奇异性，故选择截面

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, \theta) \in R^6 \times S^1 \\ &| x_1 = x_3, \dot{x}_1 = \dot{x}_{1+}, \dot{x}_3 = \dot{x}_{3+} \} \end{aligned}$$

为 Poincaré 截面，其中  $\theta = \omega t \bmod(2\pi)$  则  $X^* = (x_{10}, \dot{x}_{10}, x_{20}, \dot{x}_{20}, x_{30}, \dot{x}_{30}, \tau)^T$  表示系统在 Poincaré 截面上的周期  $n-1$  不动点。可以建立  $n-1$  运动的 Poincaré 映射 (略去复杂的推导过程) 为  $\Delta X' = f(\sigma, \Delta X)$ ，其中  $\Delta X' \in R^6$  和  $\Delta X \in R^6$  为  $X^*$  的扰动矢量

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Delta x_{10}, \Delta \dot{x}_{1+}, \Delta x_{20}, \Delta \dot{x}_{20}, \Delta x_{30}, \Delta \tau)^T, \\ \Delta X' &= (\Delta x'_{10}, \Delta \dot{x}'_{1+}, \Delta x'_{20}, \Delta \dot{x}'_{20}, \Delta x'_{30}, \Delta \tau')^T, \end{aligned}$$

$\sigma$  属于分岔参数。

Poincaré 映射在不动点处的线性化矩阵为

$$Df(\sigma, X^*) = \left. \frac{\partial f(\sigma, \Delta X)}{\partial \Delta X} \right|_{(\sigma, X^*)}, \tag{6}$$

如果矩阵  $Df(\sigma, X^*)$  的全部特征值都位于单位圆

内,图 1 系统具有稳定的  $n - 1$  运动.若  $\sigma$  取一定值时  $Df(\sigma, X^*)$  的一些特征值位于单位圆上系统的  $n - 1$  运动将发生分岔,  $\sigma$  即为分岔点.分岔的类型取决于单位圆周上  $Df(\sigma, X^*)$  特征值的数量及其在单位圆周上的位置.对于图 1 系统  $Df(\sigma, X^*)$  特征值共 6 个,本文主要研究四个以上特征值同时穿越单位圆问题( $\sigma \in R^3$ ),对此情况下的分岔与混沌形成过程的理论研究目前仍是一个难题,因此分析这类系统最有效的方法就是数值仿真方法.对于这样复杂的分岔可以根据映射的余维二和余维一分岔理论去分析分岔点附近的动力学行为.

### 3. 振动筛的两类余维三分岔与非常规混沌演化

在图 1 振动筛系统中,选取系统参数(1),  $\alpha = 0.14$ ,  $\beta = \gamma = 0.14$ ,  $\zeta = 0.04$ ,  $R = 0.05$ , 令  $\sigma^* = (\mu,$

$\omega, \delta)$ ,当  $\sigma^* = (0.140, 2.262, 0.301)$  时, Jacobi 矩阵(6)的特征值为  $\lambda_{5,6} = -0.936 \pm 0.354i$  ( $|\lambda_{5,6}| = 1.000$ ),  $\lambda_6 = -1.002$ ,  $\lambda_{1,2} = -0.614 \pm 0.780i$  ( $|\lambda_{1,2}| = 0.993$ ),可以近似认为  $\sigma^*$  是一个余维三 Flip-Hopf-Hopf 分岔点.固定  $\delta = 0.3$ ,图 2(a)给出了  $\mu = 0.144$  时  $\dot{x}_2$  随参数  $\omega$  变化的分岔图,从图 2(a)可以看出,  $\omega$  在一定区间内系统为稳定的周期一运动.随着  $\omega$  的增加,有一对复共轭特征值先穿过单位圆,系统发生 Hopf 分岔,随后又一对复共轭特征值穿过单位圆发生了  $T^2$  环面分岔.随着  $\omega$  的减小,由于负实数特征值先穿过单位圆,所以发生了 Flip 分岔,值得注意的是随着  $\omega$  的减小一对复共轭特征值穿过单位圆,因而倍周期序列没有出现,发生了周期 2 点的 Hopf 分岔.图 2(b)给出了 Flip-Hopf-Hopf 分岔点附近  $\mu = 0.14$  时的局部余维二分岔图,进一步揭示了 Hopf 分岔,Flip 分岔以及  $T^2$  环面分岔之间的转化关系.

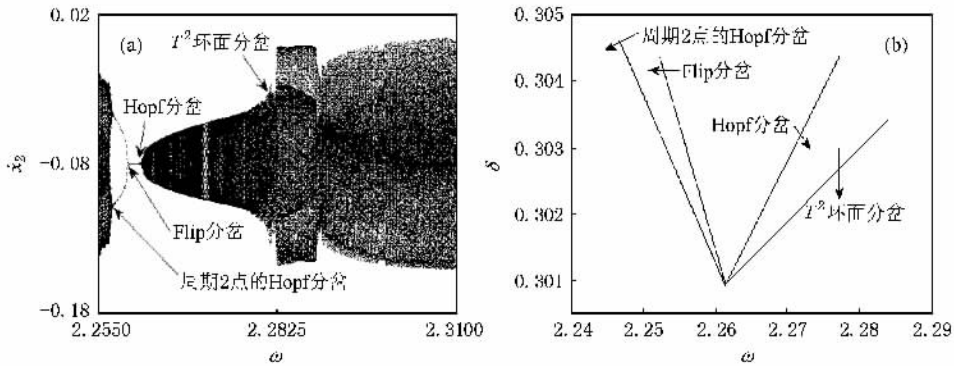


图 2 分岔图 (a)  $\mu = 0.144$  (b) 局部余维二分岔

为了更好的揭示系统的非线性动力学行为,分析系统向混沌演化的过程,下面给出三种非常规混沌演化过程,图 3 给出了上述  $\delta = 0.3$ ,  $\mu = 0.144$  时不同  $\omega$  值情况下系统的 Poincaré 截面投影图.数值结果表明,系统由稳定周期一运动发生 Hopf 分岔和 Flip 分岔后的动力学行为变得更加复杂,在向混沌演化的过程中完全不同于常规的倍周期分岔和概周期通向混沌的道路.当  $\omega = 2.256$  时,系统发生了周期 2 点 Hopf 分岔后,概周期吸引子在 Poincaré 截面上由两个光滑的吸引不变圈表示,见图 3(a),随着  $\omega$  减小两个吸引不变圈发生了环面爆破现象直接演化为混沌,见图 3(b)和(c),同时,随着  $\omega$  增加,系统由周期一先发生 Hopf 分岔,其 Poincaré 截

面上由一个光滑的吸引不变圈表示,见图 3(d),随着  $\omega$  的进一步增加系统发生环面分岔在 Poincaré 截面上呈现出多种几何形状的概周期吸引子,图 3(e)给出了一种“五角星型”吸引子,最后系统演化为混沌,见图 3(f).图 4 给出了上述  $\delta = 0.3$ ,  $\mu = 0.146$  时不同  $\omega$  值情况下系统的 Poincaré 截面投影图.这里不同的是当  $\omega = 2.2565$  时,系统发生了周期 2 点 Hopf 分岔后,概周期吸引子在 Poincaré 截面上由两个吸引不变圈表示,见图 4(a),随着  $\omega$  减小两个吸引不变圈发生了环面倍化现象,见图 4(b)和(c),最后演化为麦比乌斯吸引子呈现的混沌,见图 4(d).

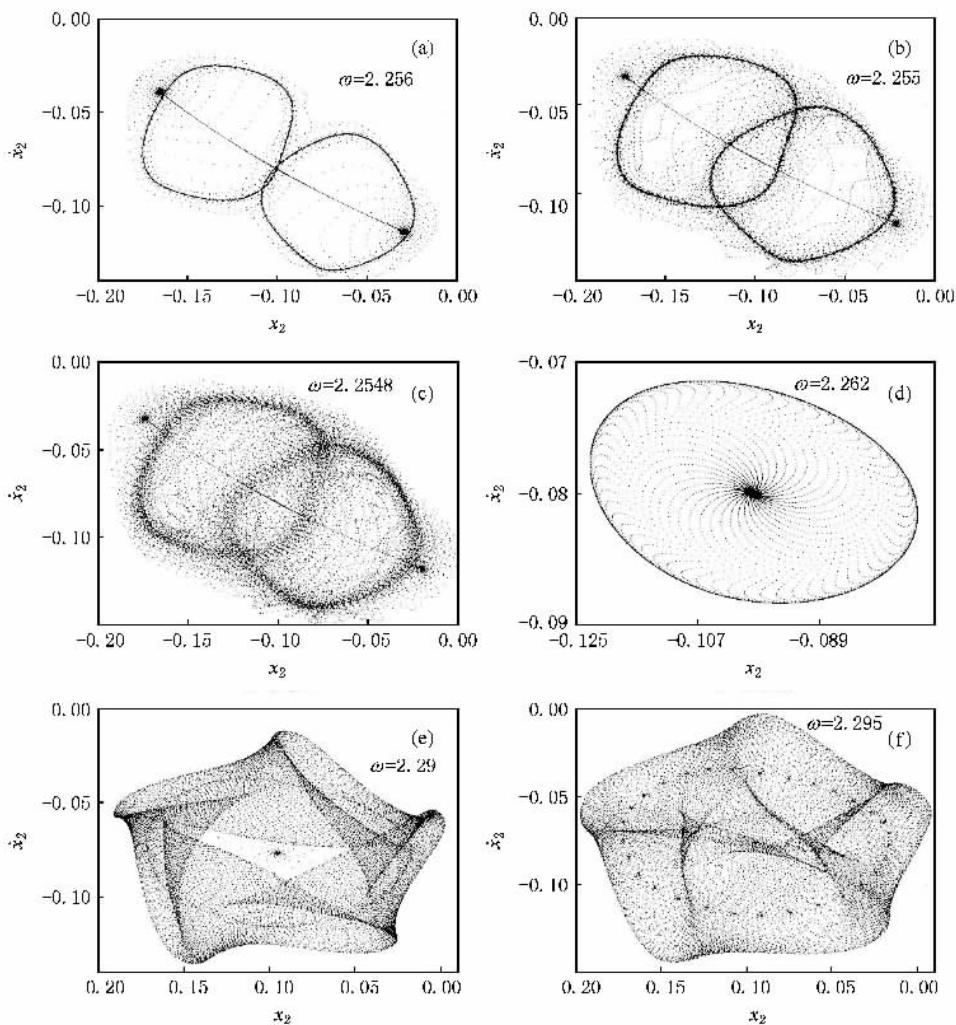


图3 Poincaré 映射图 (a)2T 吸引不变圈 (b)环面爆破 (c)混沌 (d)吸引不变圈 (e)五角星型”概周期吸引子 (f)混沌

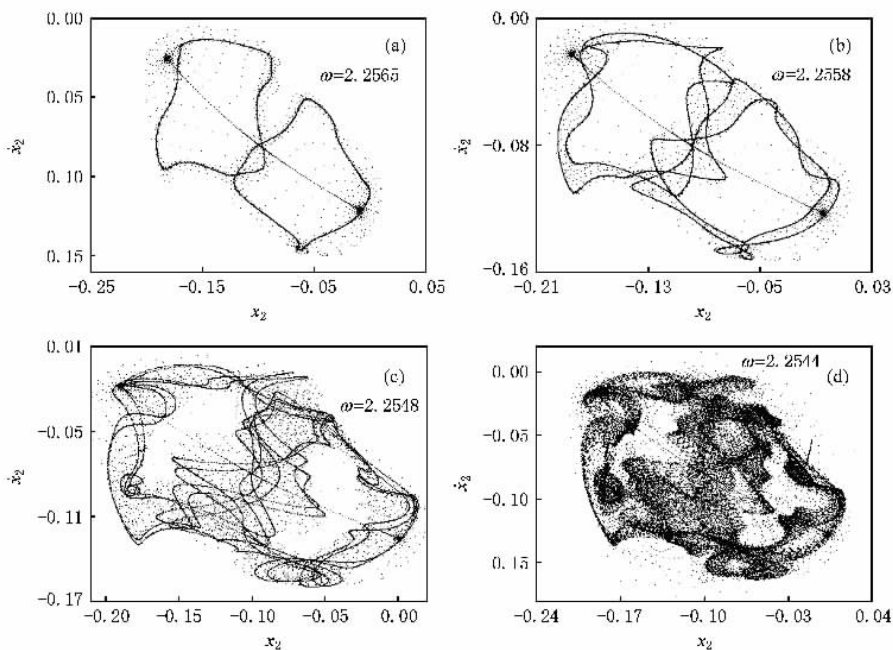


图4 Poincaré 映射图 (a)2T 吸引不变圈 (b)2T 环面倍化 (c)4T 环面倍化 (d)混沌

选取系统参数(2),  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = \gamma = 0.35$ ,  $R = 0.07$ ,  $\zeta = 0.01$ , 令  $\sigma = (\delta, \omega, \mu)$  为余维三分岔参数, 当  $\sigma^* = (0.2484, 3.8628, 0.4096)$  时, Jacobi 矩阵(6)的特征值为  $\lambda_{1,2} = 0.3711 \pm 0.9286i$  ( $|\lambda_{1,2}| = 1.00000$ ),  $\lambda_{3,4} = -0.5000 \pm 0.8699i$  ( $|\lambda_{3,4}| = 1.0033$ ,  $\lambda_{3,4}^3 = 1$ ),  $\lambda_5 = -0.6514$ ,  $\lambda_6 = -0.0068$ ,  $\lambda_{1,2}$  和  $\lambda_{3,4}$  几乎同时穿越单位圆而其余特征值位于单位圆内, 因此  $\sigma^*$  是一个近似三次强共振条件下的 Hopf-Hopf 分岔点. 为了揭示系统在该余维三分岔点附近的非线性动力学行为, 固定  $\delta = 0.25$ ,  $\mu = 0.40$ , 激振力频率

$\omega \in (3.80, 3.95)$  为变化参数, 图 5 给出了系统的 Poincaré 截面投影图. 随着  $\omega$  的减小至  $\omega = 3.928$  时系统出现 Hopf 分岔, 因系统三次强共振的影响, 其 Poincaré 截面投影图呈现出三角形吸引不变圈, 图 5 (a) 给出了分岔后  $\omega = 9.8975$  时的情况, 当  $\omega = 3.892$  时系统进入周期 3 轨道, 如图 5 (b) 所示. 随着  $\omega$  的进一步减小, 系统进入了  $3T$  环面概周期运动状态, 最后  $3T$  环面又一次发生  $T^2$  环面分岔, 其 Poincaré 截面投影图呈现出了“轮胎型”概周期吸引子, 见图 5 (c)–(f).

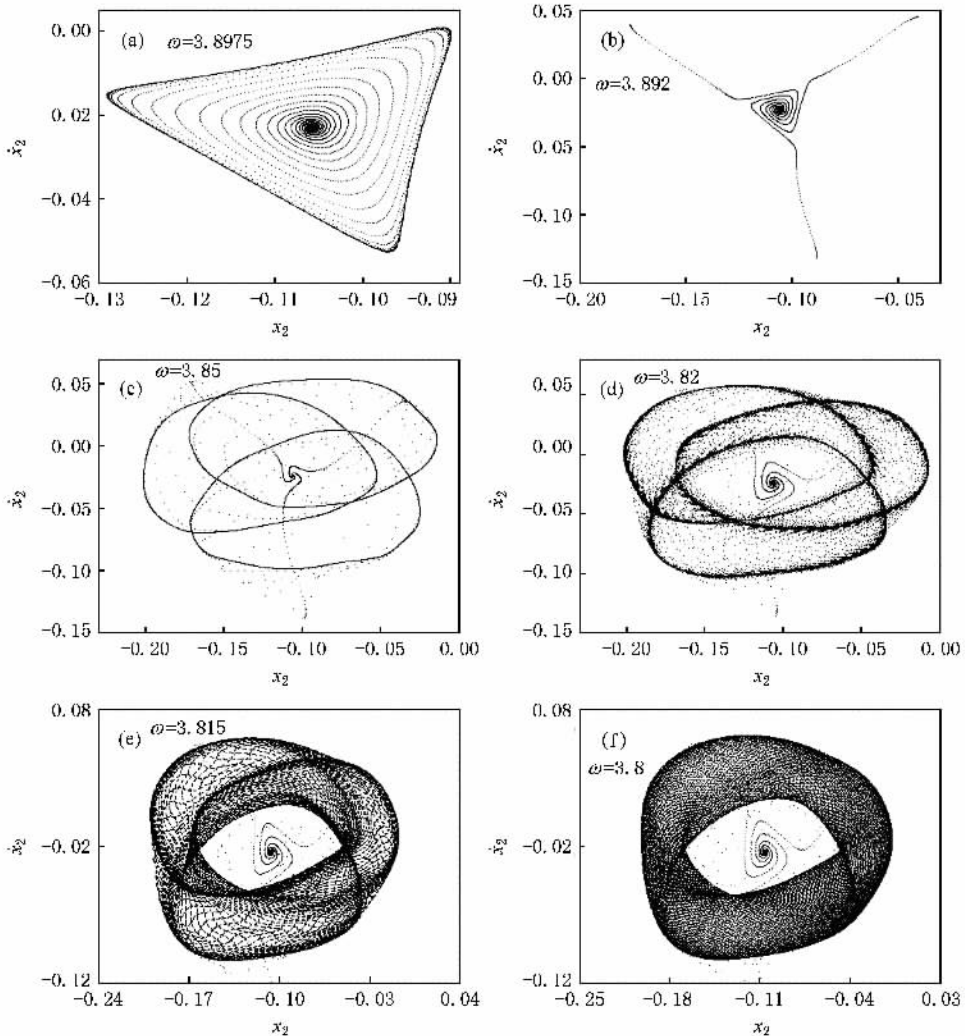


图 5 Poincaré 映射图 (a) 三角形吸引不变圈 (b) 周期 3 (c)  $3T$  吸引不变圈 (d)  $3T$  吸引不变圈爆破; (e)  $3T$  吸引不变圈完全破裂 (f) “轮胎型”概周期吸引子

## 4. 结 论

本文建立了振动筛系统模型以及 Poincaré 映

射, 研究了系统两类余维三分岔点附近的动力学行为. 这两类余维三分岔的共性是系统 Jacobian 矩阵都有两对复共轭特征值同时穿越单位圆, 因此系统除了简单的 Hopf 分岔形成的吸引不变圈吸引子外,

还存在  $1T^2$  或  $3T^2$  环面分岔形成的“轮胎型”、“五角星型”等奇怪周期吸引子和麦比乌斯混沌吸引子; 在混沌演化途径上, 分析了由环面爆破、环面倍化和  $T^2$  环面分岔过渡到一种特殊吸引子(规则几何形状)向混沌演化的三种非常规路线, 由此看出, 余维三分岔点附近的动力学行为远比余维二和余维一分岔点附近的动力学行为复杂的多, 通过对振动筛系

统的分岔分析, 可以获得系统周期运动的参数范围, 有利于提高系统的运动稳定性, 在实际给定的一部分参数的情况下, 通过稳定性和分岔分析, 可以优化其它系统参数, 因此对振动筛系统复杂分岔和混沌的研究具有一定的理论和实际意义, 对于系统余维三理论分析以及各种奇怪吸引子的维数等还有待进一步研究。

- [1] Papenbrock T, Weidenmüller H A 2007 *Rev. Mod. Phys.* **79** 997
- [2] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese) [张广军、徐健学 2005 物理学报 **54** 557]
- [3] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 (in Chinese) [孙晓娟、徐伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]
- [4] Yu J J, Cao H F, Xu H B, Xu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 29 (in Chinese) [于津江、曹鹤飞、徐海波、徐权 2006 物理学报 **55** 29]
- [5] Fu W B, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2899 (in Chinese) [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2899]
- [6] Liu F, Guan Z H, Wang H 2008 *Chin. Phys.* **17** 2045
- [7] Iooss G, Los J E 1988 *Math. Phys.* **119** 453
- [8] Xie J H 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 65
- [9] Wen G L 2001 *J. Sound Vib.* **242** 475
- [10] Ding W C D, Xie J H J. *Sound Vib.* **287** 101
- [11] Luo G W 2004 *Phys. Lett. A* **323** 210
- [12] Jin D P, Hu H Y 1997 *Acta Mech. Sin.* **13** 366
- [13] Ivanov A P 1996 *Chaos, Solitons & Fractals* **7** 1615
- [14] Ding W C, Xie J H, Sun Q G 2004 *J. Sound Vib.* **275** 27
- [15] Ding W C, Xie J H, Li G F 2004 *Engineering Mechanics* **6** 123 (in Chinese) [丁旺才、谢建华、李国芳 2004 工程力学 **6** 123]

## Two codimension-3 bifurcations and non-typical routes to chaos of a shaker system<sup>\*</sup>

Zhang Yong-Xiang<sup>1)†</sup> Kong Gui-Qin<sup>2)</sup> Yu Jian-Ning<sup>3)</sup>

1) *College of Science, Shenyang Agricultural University, Shenyang 110161, China*

2) *6354 Institute of China State Shipbuilding Corporation, Jiujiang 332000, China*

3) *School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*

(Received 1 August 2007; revised manuscript received 29 January 2008)

### Abstract

The dynamical model and Poincaré maps of a shaker are established. Two types of codimension-3 bifurcations of this system, including Flip-Hopf-Hopf bifurcation and Hopf-Hopf bifurcation in the third order strong resonant case, and three non-typical routes to chaos are investigated by using Poincaré maps. The system exhibits more complicated dynamic behaviors near the points of codimension-3 bifurcation. The results show that near the points of bifurcation there exist triangle attractor,  $3T^2$  torus bifurcation and “pentagonal-like”, “tire-like” attractors in projected Poincaré sections. The routes to chaos via torus explosion, torus-doubling bifurcation and  $T^2$  torus bifurcation are analyzed by numerical simulation. The system parameters of shaker may be optimized by studying the stability and bifurcation of periodic motion of the shaker.

**Keywords:** codimension-3 bifurcation, non-typical routes to chaos,  $T^2$  torus bifurcation

**PACC:** 0547

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant No. 3ZS051-A25-030).

<sup>†</sup> E-mail: zyx9701@126.com