

谐和与随机噪声联合作用 Duffing 单边约束系统的响应^{*}

戎海武^{1)†} 王向东¹⁾ 徐 伟²⁾ 方 同²⁾

1) (佛山大学数学系, 佛山 528000)

2) (西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2008 年 2 月 8 日收到, 2008 年 3 月 30 日收到修改稿)

研究了 Duffing 单边约束系统在谐和与随机噪声联合激励下的响应问题. 用谐波平衡法和摄动法分析了系统在确定性谐和激励和随机激励联合作用下的响应, 用随机平均法讨论了随机扰动项对系统响应的影响. 在一定条件下, 当约束距离较大时对应于不同的初始条件, 系统具有两个非碰撞的稳态响应, 而当约束距离不大时, 对应于不同的初始条件, 系统也可以有两个不同的稳态响应, 其中一个是发生碰撞的响应, 而另外一个则不发生碰撞. 数值模拟表明该方法是有用的.

关键词: Duffing 单边约束系统, 随机响应, 谐波平衡法, 摄动法

PACC: 0547

1. 引言

在航空航天、机械制造、土木工程等领域存在着由间隙而导致的冲击或碰撞振动, 例如飞船对接引起的碰撞、大型太阳能帆板因关节间隙产生的碰撞振动、飞行器稳瞄系统的非光滑性导致的碰撞振动、海洋平台桩脚受到海冰的往复挤压碰撞、机械手在作业中对产品的碰撞、电动冲击机械等等. 在相同的初始条件下, 动力学系统的长期响应会因为往复碰撞振动的积累而变得面目全非, 同时, 碰撞还会影响冲击机械产品的动态性能, 可以引起系统局部产生永久塑性形变, 使材料的力学性质发生本质改变, 以致引发灾难性后果^[1]. 目前, 用于描述碰撞过程的模型主要有三种^[2]: 瞬态冲击模型, 分段线性模型和碰撞中局部变形的模型. 由于这些模型向量场的不可微性, 导致系统呈现非光滑的特性, 可以产生丰富的动力学行为, 因此引起了学者们的广泛关注^[3,4]. 而在实际中, 这种非光滑系统总是或多或少的受到随机噪声的影响. 因而, 研究在随机噪声激励下非光滑系统的响应^[5-7]具有理论意义和实际应用价值. 总的说来, 关于非光滑系统特别是碰撞系

统在随机激励下系统响应的分析的研究处于起步阶段, 本文将在这方面作一尝试. 本文研究了 Duffing 单边约束系统在谐和与随机噪声联合激励下的响应问题. 本文采用瞬时冲击模型, 即假设冲击时间为零, 碰撞过程只考虑能量的损失, 碰撞前后的速度变化用恢复系数来描述. 用谐波平衡法和摄动法分析了系统在确定性谐和激励和随机激励联合作用下的响应, 用随机平均法讨论了随机扰动项对系统响应的影响. 并发现, 在一定条件下, 系统具有两个不同的稳态响应, 其中一个是不发生碰撞的响应, 而另外一个则可以是发生碰撞的响应, 也可以是不发生碰撞响应. 数值模拟表明本文提出的方法是有效的.

2. 模型的提出及理论分析

考虑同时受谐和与随机噪声激励的单自由度 Duffing 单边约束系统

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \epsilon\beta\dot{x} + \Omega^2x + \epsilon x^3 &= h\cos(\omega t + \varphi) \\ &+ \sqrt{\epsilon}\xi(t), \quad x < \Delta, \\ \dot{x}_+ &= -e\dot{x}_-, \quad x = \Delta, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 x 上方的圆点表示对时间 t 的导数, $\epsilon \ll 1$ 为小

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10772046)和广东省自然科学基金(批准号: 7010407)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ronghw@foshan.net

参数 β, Ω 分别为系统的阻尼系数和自然频率, $h, \omega > 0$ 是常数分别表示确定性谐和激励的振幅和频率, φ 是相位角, $\xi(t)$ 是零均值宽带随机过程, 谱密度为 $S(\omega)$, e 是碰撞恢复系数 $0 < e \leq 1$, Δ 为约束距离, $-$, $+$ 分别表示碰撞前后时刻.

2.1. Δ 较大时系统的响应

先考虑简单的情形, 设约束距离 Δ 充分大, 即在稳态运动时系统不发生碰撞, 此时方程 (1) 变为

$$\ddot{x} + \epsilon\beta\dot{x} + \Omega^2 x + \epsilon x^3 = h \cos(\omega t + \varphi) + \sqrt{\epsilon}\xi(t). \quad (2)$$

(2) 式表示的是同时受谐和与随机噪声激励的 Duffing 系统. 类似的模型由 Nayfeh 和 Serhan^[8] 用多尺度法进行了讨论, 但在他们的模型中要求确定性谐和激励的幅度较小, 即要求 h 是一个小量, 本文不要求 h 是一个小量. 由于和确定性谐和激励 $h \cos \Omega t$ 相比, 随机扰动项 $\sqrt{\epsilon}\xi(t)$ 是一个小量, 可不妨设 $\xi(t) = 0$ 先讨论在确定性谐和激励时系统的响应. 此时方程 (2) 变为

$$\ddot{x} + \epsilon\beta\dot{x} + \Omega^2 x + \epsilon x^3 = h \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

我们用谐波平衡法^[9]求解系统 (3) 的周期解. 为此, 设方程 (3) 的零阶近似解为

$$x_0 = a_0 \cos(\omega t + \gamma), \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (3) 式并利用公式

$$\begin{aligned} \cos^3(\omega t + \gamma) &= \frac{3}{4} \cos(\omega t + \gamma) \\ &+ \frac{1}{4} \cos[3(\omega t + \gamma)], \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} &\left(-a_0 \omega^2 + a_0 \Omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon a^3\right) \cos(\omega t + \gamma) \\ &- \epsilon \beta \omega a_0 \sin(\omega t + \gamma) + \frac{1}{4} \epsilon a_0^3 \cos[3(\omega t + \gamma)] \\ &= h \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

略去高次谐波 $\cos[3(\omega t + \gamma)]$, 令上式等式两边同次谐波系数相等, 得

$$\begin{aligned} &\left(a_0 \Omega^2 - a_0 \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_0^3\right) \cos \gamma - \epsilon \beta \omega a_0 \sin \gamma \\ &= h \cos \varphi, \\ &\left(a_0 \Omega^2 - a_0 \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_0^3\right) \sin \gamma + \epsilon \beta \omega a_0 \cos \gamma \\ &= -h \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

把方程 (5) 中两式平方相加, 便可得系统 (3) 的频率响应方程为

$$\left(a_0 \omega \Omega^2 - a_0 \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_0^3\right)^2 + \epsilon^2 \beta^2 \omega^2 a_0^2 = h^2. \quad (6)$$

从上式可见若 $\beta \neq 0$, 而 $h = 0$, 则振幅 $a_0 = 0$. 这说明对于耗散系统若没有外力作用, 除静止状态外不可能存在周期解. 由弗洛凯 (Floquet) 理论^[9] 知, 由 (4) 式定义的周期解稳定的充分必要条件是

$$\begin{aligned} &\left(\Omega^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_0^2\right) \left(\Omega^2 - \omega^2 + \frac{9}{4} \epsilon a_0^2\right) \\ &+ \epsilon^2 \beta^2 \omega^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式表明, 并不是所有由 (4) 式定义的周期响应都是稳定的. 如果由 (6) 式能解出三个解, 则大解 $a_0 = a_M$ 和小解 $a_0 = a_m$ 都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的. 这说明对于非线性系统 (3) 来说, 其受迫振动稳态解的振幅和频率与初始条件有关, 其振幅可具有多值性, 即在一定条件下同一干扰力频率对应着几个稳态周期运动, 物理上实现哪一个周期运动取决于初始条件. 同时存在着突跳和滞后现象, 当干扰力频率逐渐增加或减小时, 振幅开始沿响应曲线逐渐变化, 当到达临界点时振幅突然减小或增大. 然后又沿响应曲线变化, 并且在频率减小或增加的变化中, 跳跃总是滞后前一次跳跃点, 形成一个滞后环.

下面我们研究随机扰动项 $\sqrt{\epsilon}\xi(t)$ 对系统响应的影 响. 为此令

$$x = x_0 + Y = a_0 \cos(\omega t + \gamma) + Y, \quad (8)$$

式中 Y 是摄动项. 将 (8) 式代入 (2) 式并忽略非线性项可得如下线性化方程:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \epsilon[\beta\dot{Y} + 3a_0^2 \cos^2(\omega t + \gamma)Y] + \Omega^2 Y \\ = \sqrt{\epsilon}\xi(t). \end{aligned} \quad (9)$$

由于 ϵ 为小参数, 可用随机平均法^[10] 求解系统 (9) 的稳态响应. 引入变换

$$Y(t) = A(t) \cos \Phi,$$

$$\dot{Y}(t) = -A(t) \Omega \sin \Phi, \Phi = \Omega t + \Theta. \quad (10)$$

可将 (9) 式化为标准形式微分方程

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\epsilon}{\Omega} [-\beta A \Omega \sin \Phi + 3a_0^2 \cos^2(\omega t + \gamma) A \cos \Phi] \\ &\times \sin \Phi - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Omega} \sin \Phi \xi(t), \\ \dot{\Theta} &= \frac{\epsilon}{A \Omega} [-\beta A \Omega \sin \Phi + 3a_0^2 \cos^2(\omega t + \gamma) A \cos \Phi] \\ &\times \cos \Phi - \frac{\sqrt{\epsilon}}{A \omega} \cos \Phi \xi(t). \end{aligned} \quad (11)$$

对 (11) 式用随机平均法可得相应的伊滕随机微分方

程为

$$\begin{aligned} dA &= \left[-\frac{\beta A}{2} \varepsilon + \frac{\pi S(\Omega)}{2A\Omega^2} \varepsilon \right] dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi S(\Omega)}}{\Omega} \sqrt{\varepsilon} dW_1(t), \\ d\Theta &= \frac{3a_0^2}{4\Omega} \varepsilon dt + \frac{\sqrt{\pi S(\Omega)}}{A\Omega} \sqrt{\varepsilon} dW_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $W_1(t), W_2(t)$ 是独立的标准 Wiener 过程.

由 (12) 第一式不依赖于 Θ 知, $A(t)$ 本身是一个时齐扩散过程, 其稳态概率密度 $p(a)$ 由下面 FPK 方程支配:

$$\frac{d}{da} \left[\left(\frac{\beta a}{2} \varepsilon - \frac{\pi S(\Omega)}{2a\Omega^2} \varepsilon \right) p \right] + \frac{\pi S(\Omega)}{2\Omega^2} \varepsilon \frac{d^2 p}{da^2} = 0. \quad (13)$$

由 (13) 式可解得

$$p(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\pi S(\Omega)}{\beta\Omega^2}, \quad (14)$$

由上式可得 $A(t)$ 的一、二阶矩为

$$\begin{aligned} EA(t) &= \int_0^{+\infty} ap(a) da = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \\ EA^2(t) &= \int_0^{+\infty} a^2 p(a) da = 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (15)$$

式中 E 表示数学期望. 由 (8) (10) 和 (15) 式可得, 当 T 充分大时, 系统处于稳态响应, 有

$$\begin{aligned} \max_{T \leq t \leq T+2\Omega\pi} Ex^2 &= \max_t [a_0 \cos(\Omega t + \gamma) + A(t) \cos\Phi]^2 \\ &= a_0^2 + \frac{\pi S(\Omega)}{\beta\Omega^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

$\max_{T \leq t \leq T+2\Omega\pi} Ex^2$ 可以作为处于稳态时, 系统响应幅值大小的度量. 在一定的参数范围, 由 (4) 式定义的周期解的幅值 a_0 有三个解, 其中大解和小解都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的. 当 a_0 有三个解时, 由 (16) 式可知此时系统有三个均方响应值, 其中大的和小的都是稳定的, 而中间的那个是不稳定的.

2.2. Δ 不大时系统的响应

再考虑复杂的情形, 设 Δ 不大, 即在稳态运动时系统发生碰撞. 先考虑 $\xi(t) = 0$ 即系统只受到确定性谐和激励但 Δ 不大, 即在稳态运动时系统发生碰撞, 此时方程 (1) 变为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon\beta\dot{x} + \Omega^2 x + \varepsilon x^3 &= h \cos(\omega t + \varphi), \quad x < \Delta, \\ \dot{x}_+ &= -\varepsilon\dot{x}_-, \quad x = \Delta. \end{aligned} \quad (17)$$

由于 ε 是小参数, 可以先设 $\varepsilon = 0$, 系统 (17) 变为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega^2 x &= h \cos(\omega t + \varphi), \quad x < \Delta, \\ \dot{x}_+ &= -\varepsilon\dot{x}_-, \quad x = \Delta. \end{aligned} \quad (18)$$

碰撞系统 (18) 研究的比较成熟, 由文献 [1] 可以知道, 每过 $l \in Z$ 个激励周期系统发生一次碰撞的运动满足下面的条件:

$$x(0) = \Delta, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^+,$$

$$x\left(\frac{2\pi l}{\omega}\right) = \Delta, \quad \dot{x}\left(\frac{2\pi l}{\omega}\right) = \dot{x}^-. \quad (19)$$

式中 $\dot{x}^-, \dot{x}^+$ 分别表示碰撞前后的质点速度, $e = -\frac{\dot{x}^+}{\dot{x}^-}$ 为恢复系数. 可以求出满足条件 (19) 的解为

$$x(t) = x_0(t) = a_\Omega \cos\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) + a_\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (20)$$

式中

$$a_\Omega = \frac{\Delta - a_\omega}{\cos(\pi l / \zeta)}, \quad a_\omega = \frac{h}{\Omega^2 |1 - \zeta^2|}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\Omega}.$$

且可以求得碰撞前的速度为

$$\dot{x}^- = \frac{[1 \pm \sqrt{1 - (1 - a_\omega^2 / \Delta^2)(1 + B^2)}] \Delta \Omega}{(1 + B^2) D}, \quad (21)$$

式中

$$B = \frac{1}{\zeta} \frac{1 - e}{1 + e} \tan \frac{\pi l}{\zeta}, \quad D = -\frac{1}{2} (1 + e) \cot \frac{\pi l}{\zeta}. \quad (22)$$

由 (21) 式可以知道, 在一定的参数区域内, 系统 (18) 可以有双解. 下面我们用摄动法求解系统 (17) 的响应. 可以设系统 (17) 的解为

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t), \quad (23)$$

式中 $x_0(t)$ 由 (20) 确定, $\varepsilon x_1(t)$ 为小摄动项. 将 (23) 式代入 (17) 式, 比较两边 ε 一次方的系数, 可以得到如下关于 $x_1(t)$ 的方程:

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = -\beta \dot{x}_0 - x_0^3, \quad (24)$$

将 $x_0(t)$ 的表达式 (20) 代入 (24) 式, 并只保留频率为 $\frac{\Omega}{2\pi}, \frac{\omega}{2\pi}$ 的谐波项, 得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 &= -\left(\frac{3}{4} a_\Omega^3 + \frac{3}{2} a_\Omega a_\omega^2\right) \cos\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) \\ &\quad + \beta \Omega \sin\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) \\ &\quad - \left(\frac{3}{4} a_\omega^3 + \frac{3}{2} a_\Omega^2 a_\omega\right) \cos(\omega t + \varphi) \\ &\quad + \beta \Omega \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (25)$$

此方程的通解为

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t \\ &\quad + \left(\frac{3}{8\Omega} a_\Omega^3 + \frac{3}{4\Omega} a_\Omega a_\omega^2\right) t \sin\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{8\Omega} a_\omega^3 + \frac{3}{4\Omega} a_\Omega^2 a_\omega\right) t \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta t}{2} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) \\
& + \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\frac{3}{4} a_\omega^3 + \frac{3}{2} a_\Omega^2 a_\omega \right) \cos(\omega t + \varphi) \\
& - \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \beta \Omega \sin(\omega t + \varphi), \quad (26)
\end{aligned}$$

式中任意常数 C_1, C_2 可以由条件 $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1\left(\frac{2\pi l}{\omega}\right) = 0$ 确定。

然后我们考虑同时受到确定性谐和与随机激励的系统(1), 可以设系统(1)的响应为

$$x(t) = a_\Omega \cos\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) + a_\omega \cos(\omega t + \varphi) + Y, \quad (27)$$

式中 Y 是摄动项. 将(27)式代入(1)式并忽略非线性项可得如下线性化方程:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y} + \varepsilon \left\{ \beta \dot{Y} + 3 \left[a_\Omega \cos\left(\Omega t - \frac{\pi l}{\zeta}\right) + a_\omega \cos(\omega t + \varphi) \right]^2 Y \right\} + \Omega^2 Y = \sqrt{\varepsilon} \zeta(t). \quad (28)
\end{aligned}$$

由于 ε 为小参数, 2.1 节中展示的随机平均法可以用于求解系统(28)的稳态响应. 引入由(10)式定义的变换,

$$\begin{aligned}
Y(t) &= A(t) \cos \Phi, \\
\dot{Y}(t) &= -A(t) \Omega \sin \Phi, \\
\Phi &= \Omega t + \Theta,
\end{aligned}$$

经过计算可以得到, $EA(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$, $EA^2(t) = 2\sigma^2$, 式中 σ 由(14)式定义.

3. 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见文献[10—12] 本文数值模拟中设 $\zeta(t)$ 的谱密度为

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & 0 < \omega \leq 2\Omega, \\ 0, & \omega > 2\Omega, \end{cases} \quad (29)$$

则 $\zeta(t)$ 可取为如下形式^[10]:

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{4\Omega S_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{\Omega}{N}(2k-1)t + \varphi_k\right], \quad (30)$$

式中 φ_k 是 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布的独立同分布随机变量序列, N 是一个较大的整数.

在本文的数值模拟中, 取参数如下:

$\beta = \Omega = h = 1$, $e = 0.8$, $\varepsilon = 0.1$, $N = 1000$. 在没有碰撞时, 用四阶龙格库塔法可计算出系统(1)

的响应. 碰撞发生后, 只需根据公式 $\dot{x}^+ = -e\dot{x}^-$ 将速度改变后再用龙格库塔法进行计算. 先考虑 Δ 较大时的情形, 本文中先取 $\Delta = 6.0$, 这时系统的稳态运动不发生碰撞. 当 $\xi(t) = 0$ 即系统只受确定性谐和激励时, 对应于不同的激励频率 ω , 由(6)式给出的系统响应的振幅 a_0 的理论值与数值计算值的比较见图1. 由图1可见, 理论解与数值解符合得很好, 这说明用谐波平衡法求解方程(3)是有效的.

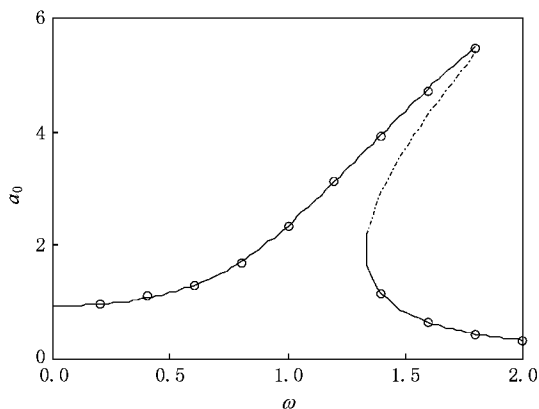


图1 系统(3)频率响应曲线(——稳定解, ---不稳定解, ○○○数值解)

下面研究随机扰动 $\zeta(t)$ 对系统响应的影响. 取 $\omega = 1.4$, 此时系统(3)将有两个稳定的稳态解, 由(6)式可以解得这两个解分别为 $a_0 = a_m = 1.15$ 和 $a_0 = a_M = 3.95$, 即对于不同的初始值, 确定性系统(3)有两种不同的稳态响应. 对于随机系统(1), 也有类似的多值现象. 当 $S_0 = 0.0025$, 对应于不同的初值系统(1)响应的时间历程图和相轨图分别见图2和图3. 图2中的初值是 $x(0) = -4.0$, $\dot{x}(0) = -5.5$, 图3中的初值是 $x(0) = -1.0$, $\dot{x}(0) = -1.5$, 图中 $y(t) = \dot{x}(t)$ 表示速度.

由图2、3可见, 当随机扰动 $\xi(t)$ 较小时, 对应于不同的初值系统(1)可有两个不同的稳态响应, 与前述理论分析的结果一致. 由于随机扰动 $\xi(t)$ 的存在, 系统响应从一周周期解变为一拟周期解, 系统的相轨也从一极限环变为一扩散的极限环. 计算表明, 随着 $\xi(t)$ 的增大, 此扩散极限环的宽度将增大. 当然, 由图2和图3表示的稳态解是系统(1)不发生碰撞时的解. 当 $S_0 = 0.0025$, 对应于不同的激励频率 ω , 由(16)式给出的系统均方响应的理论值与数值计算值的比较见图4.

计算表明, 当随机扰动 $\xi(t)$ 较小时, 类似于确

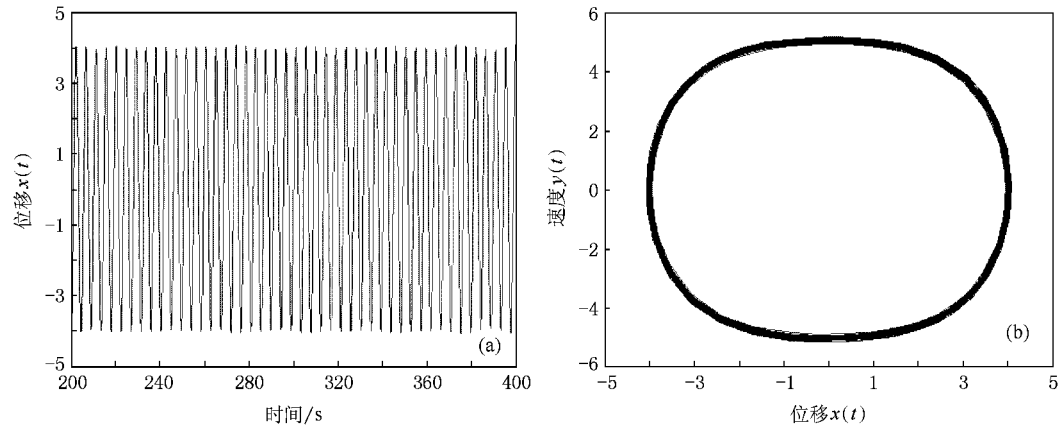


图 2 系统(1)的数值结果 ($\Delta=6.0$, $\mu S_0=0.0025$, $\kappa(0)=-4.0$, $\kappa'(0)=-5.5$) (a) $x(t)$ 的时间历程图 ;(b) 相轨图

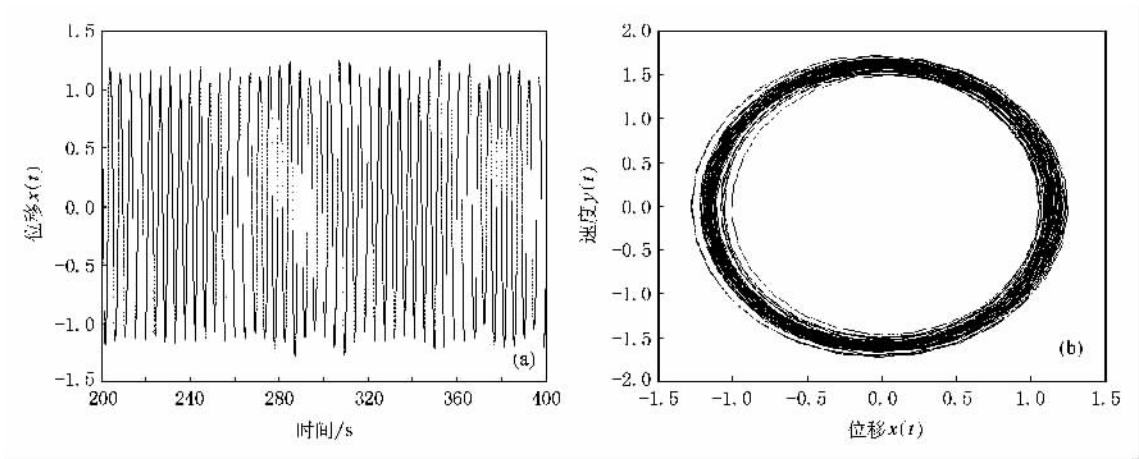


图 3 系统(1)的数值结果 ($\Delta=6.0$, $\mu S_0=0.0025$, $\kappa(0)=-1.0$, $\kappa'(0)=-1.5$) (a) $x(t)$ 的时间历程图 ;(b) 相轨图

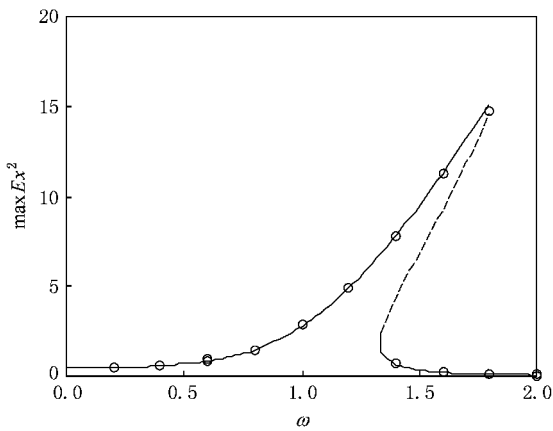


图 4 系统(1)频率响应曲线 ($\Delta=6.0$, $\mu S_0=0.0025$. ——稳定解 , ---不稳定解 , $\circ, \bullet$ 数值解)

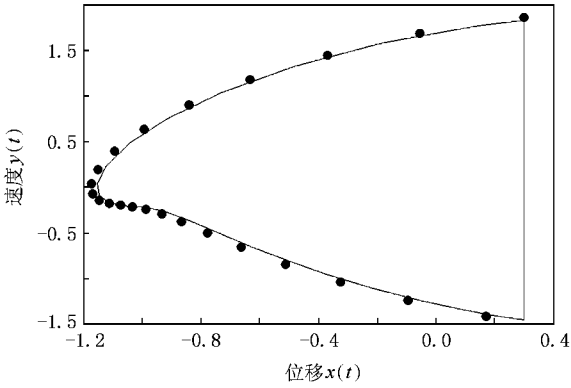


图 5 系统(17)响应相轨 ($\Delta=0.3$) (——理论解 , $\cdots$ 数值解)

定性系统中的跳跃和滞后现象仍存在. 当干扰力频率逐渐增加或减小时, 振幅开始沿响应曲线逐渐变化, 当到达临界点时振幅突然减小或增大. 然后又

沿响应曲线变化, 并且在频率减小或增加的变化中, 跳跃总是滞后前一次跳跃点, 形成一个滞后环. 本文的数值模拟系统中, 对应的系统临界频率为 $\omega_1=1.34$, $\omega_2=1.80$. 即当 $\omega<\omega_1$ 或 $\omega>\omega_2$ 时, 系统只

有一个均方响应; 当 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 时, 对应于不同的初值系统有两个均方响应. 跳跃将发生在 $\omega = \omega_1$, ω_2 处.

下面再研究当 Δ 较小, 即系统的稳态响应发生碰撞时的情形. 取 $\omega = 1.4$, 此时系统 (3) 将有两个稳定的稳态解, 由 (6) 式可以解得这两个解分别为 $a_0 = a_m = 1.15$ 和 $a_0 = a_M = 3.95$. 当约束距离 $\Delta < a_m$ 时, 显然系统 (1) 的稳态响应不可能由 (8) 式表示的解, 而只能是由 (27) 式表示的解. 当 $\Delta = 0.3$ 时, 由 (23) (26) 式得到的方程 (17) 理论解和数值解的比较见图 5, 由图 5 可见, 理论解与数值解符合得很好, 说明用摄动法求解非线性碰撞系统 (17) 是有效的. 相应的时间历程的数值解见图 6.

当 $a_m < \Delta < a_M$ 时, 对于不同的初始值, 系统可以有两个不同的稳态解. 即由 (8) 式确定的对应于 $a_0 = a_m$ 小的没有碰撞的稳态解及对应于 (27) 有碰

撞的稳态解. 当 $\omega = 1.4$ 时, $a_m = 1.15$, $a_M = 3.95$, 我们取 $\Delta = 2.3$, $s_0 = 0.0025$, 对于不同的初始值, 系统 (1) 响应的时程与相轨分别见图 7 和图 8.

由图 7、8 可见, 当随机扰动 $\xi(t)$ 较小时, 对应于不同的初值系统 (1) 可有两个不同的稳态响应, 图 7 代表的是没有碰撞的稳态解, 显然稳态解的最大振幅不超过约束距离 $\Delta = 2.3$. 图 8 代表的是有碰撞的稳态解. 这种不同初始条件下的双解现象是首次被发现, 这也表明了碰撞系统的复杂性. 由图 7, 图 8 可以看出, 由于随机扰动 $\xi(t)$ 的存在, 系统响应从一周解变为一拟周期解, 系统的相轨也从一极限环变为一扩散的极限环. 计算表明, 当 s_0 增大, 即噪声 $\xi(t)$ 的强度增大后, 不发生碰撞的稳态解将变得不稳定, 向发生碰撞的稳态解跃迁. 其中迁移的详细过程, 可以用胞映射的方法进行研究, 这是我们今后进一步研究的工作.

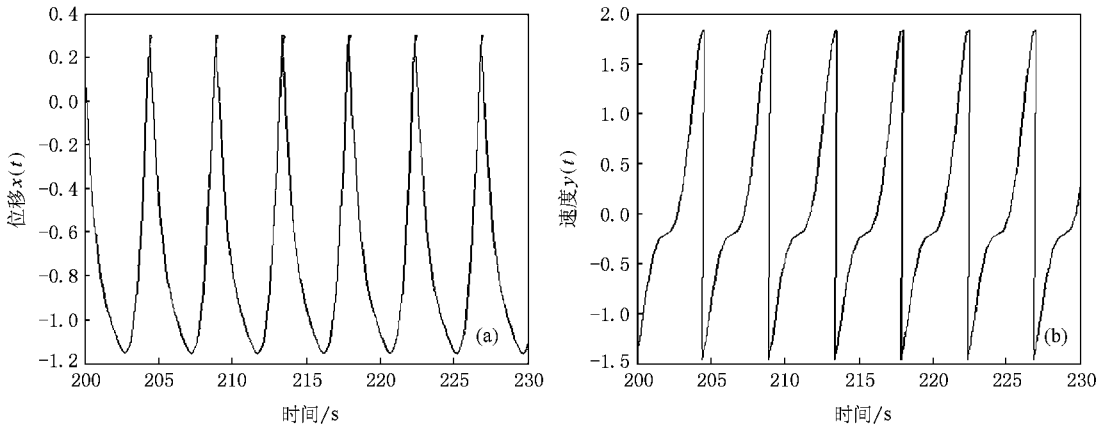


图 6 系统 (17) 响应的时程 ($\Delta = 0.3$)

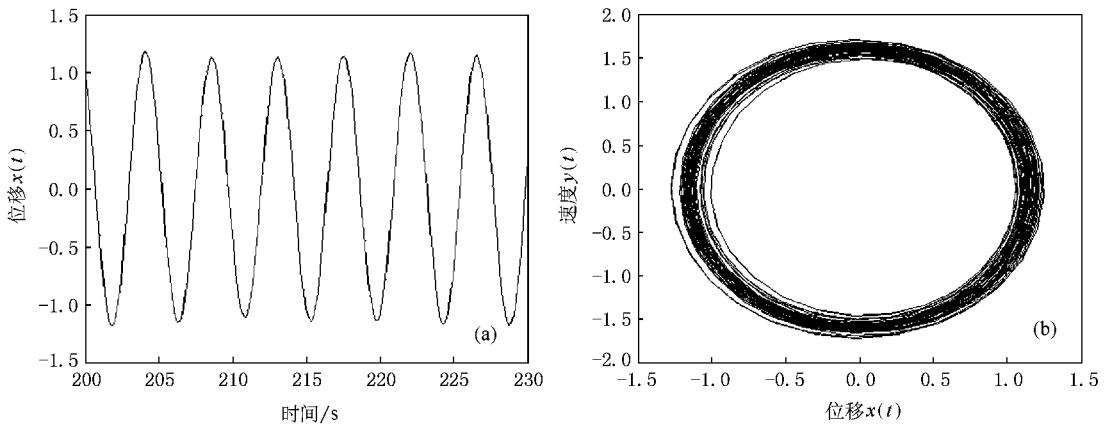


图 7 系统 (1) 的响应 ($\Delta = 2.3$, $s_0 = 0.0025$, $x(0) = -1.0$, $y(0) = -1.5$) (a) $x(t)$ 的时程图; (b) 相轨图

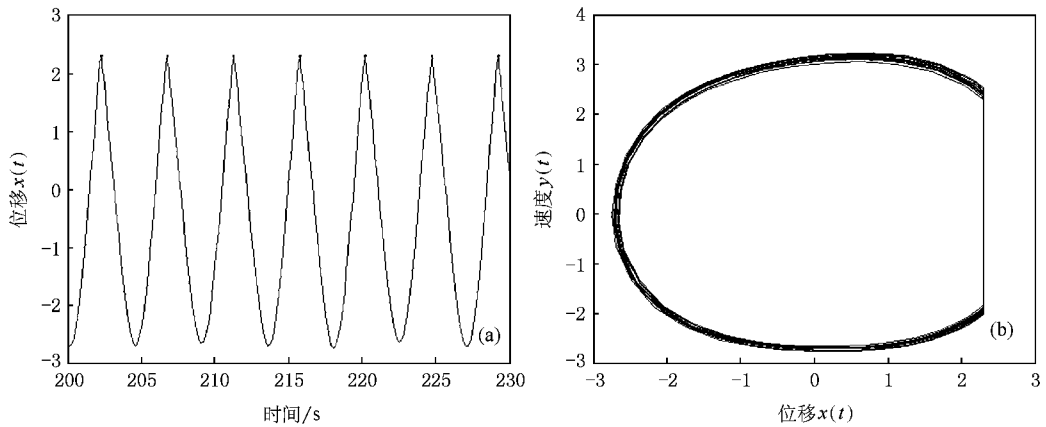


图8 系统(1)的响应 ($\Delta = 2.3$, $S_0 = 0.0025$, $x(0) = -4.0$, $\dot{x}(0) = -5.5$) (a) $x(t)$ 的时间历程图; (b) 相轨图

4. 结论与讨论

本文将谐波平衡法引入非线性随机碰撞系统的响应分析中,并结合摄动法和随机平均法研究了碰撞系统在确定性谐和激励和随机激励联合作用下系统的响应.由于所研究系统的复杂性(非线性、随机性和非光滑性),精确求解很困难甚至是不可能的.事实上,即使对于确定性的单自由度非线性系统,大部分也不可能求出精确的解析解.只能通过各种近似方法如小参数法、坐标变形法、多尺度法、慢变参数法、KBM法、等效线性化法、谐波平衡法等等.对于非线性随机系统,各种近似方法得到了广泛的应用,如等效线性化法和随机平均法等.随机系统的等效线性化法可看作是确定性系统的等效线性化法在随机系统中的推广,故确定性系统的其他近似方法如多尺度法^[13],谐波平衡法和多项式逼近法等^[14,15]都可推广到随机碰撞系统的分析中去.

理论分析和数值模拟表明,当随机扰动 $\xi(t)$ 较小时,对应于不同的初值系统(1)可有两个不同的稳态响应,这两个稳态响应可以都不是碰撞的响应,也可以一个是碰撞的稳态响应,而另外一个是不碰撞的稳态响应,这种现象是首次被发现,也说明了碰撞系统的复杂性.当约束距离 Δ 较大时,由于在稳态运动时系统不发生碰撞,系统(1)就成为在外力作用下的光滑 Duffing 系统.而众所周知,在一定的参数范围内,对于不同的初始条件, Duffing 系统可以有两个不同的解,即系统有两个吸引子 a_m 和 a_M ,每个吸引子都有自己的吸引域.当 Δ 较小即 $\Delta < a_m$ 时,稳态运动发生碰撞,显然系统不可能达到原来解 a_m

和 a_M ,这时系统只有一个发生碰撞的稳态解,即系统只有一个吸引子.当 $a_m < \Delta < a_M$ 时,显然系统不可能有稳态解 a_M ,这时对于不同的初始值,系统可以有两个不同的稳态解,一个是不发生碰撞的稳态解 a_m ,另外一个发生碰撞的稳态解,即系统有两个吸引子,每个吸引子都有自己的吸引域.要从物理上详细解析这些现象,需要用胞映射的方法研究参数变化时这些吸引子的变化情况,这是我们进一步要作的工作.

本文的结果是在 ϵ 为小参数及 $\xi(t)$ 为小强度噪声的情况下得到的,如果 ϵ 不是一个小量,或者 $\xi(t)$ 的强度较大,系统(1)的响应分析也是我们今后进一步的工作.

本文的方法对于其他类似的非线性碰撞系统也适用,例如对于确定性谐和与随机激励联合作用下的 Van der Pol-Duffing 振子

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\epsilon\beta\dot{u} + u + \epsilon\alpha_1 u^3 + \epsilon\alpha_2 \dot{u}^2 u \\ = h \cos \Omega t + \epsilon \xi(t), u < \Delta, \\ \dot{u}_+ = -\epsilon u_-, u = \Delta, \end{aligned} \quad (31)$$

也发现了系统的多解现象.对于不发生碰撞的稳态解,可以用多尺度法求出系统在确定性谐和激励下的响应,然后用摄动法和矩法研究随机扰动对于系统响应的影响.而对于发生碰撞时的稳态解,可以先用确定性非光滑系统的理论求出系统在确定性谐和激励下的碰撞响应,然后同样用摄动法和矩法研究随机扰动对于系统响应的影响.至于系统不同稳态解之间迁移的详细过程,即系统吸引子的变化情况可以用胞映射的方法进行研究.

- [1] Jin D P, Hu H Y 2005 *Vibration and Control of Collision* (Beijing : Science Press)(in Chinese)[金栋平、胡海岩 2005 碰撞振动与控制 (北京 科学出版社)]
- [2] Ding W C, Xie J H 2005 *Advances in Mech.* **35** 513 (in Chinese) [丁旺财、谢建华 2005 力学进展 **35** 513]
- [3] Silvio L T S, Ibero L C, Ricardo L V 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 745
- [4] June Y L, Jun Y 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **28** 136
- [5] Dimentberg M F, Ioutchenko D V 1999 *Prob. Eng. Mech.* **14** 323
- [6] Dimentberg M F, Ioutchenko D V 2004 *Nonlinear Dynamics* **36** 229
- [7] Feng J Q, Xu W, Wang R 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5733 (in Chinese)[冯进钤、徐 伟、王 蕊 2006 物理学报 **55** 5733]
- [8] Nayfeh A H, Serhan S J 1990 *Int. J. Non-Linear Mech.* **25** 493
- [9] Zhou J Q, Zhu Y Y 1998 *Nonlinear Vibration* (Xi 'an : Xi 'an Jiaotong University Press)(in Chinese)[周纪卿、朱因远 1998 非线性振动 (西安 西安交通大学出版社)]
- [10] Zhu W Q, 1992 *Random Vibration* (Beijing : Science Press)(in Chinese)[朱位秋 1992 随机振动 (北京 科学出版社)]
- [11] Shinozuka M 1971 *J. Sound Vib.* **19** 357
- [12] Shinozuka M 1972 *J. Sound Vib.* **25** 111
- [13] Rong H W, Wang X D, Xu W, Meng G, Fang T 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 2557 (in Chinese)[戎海武、王向东、徐 伟、孟 光、方 同 2005 物理学报 **54** 2557]
- [14] Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese)[马少娟、徐 伟、李 伟、靳艳飞 2005 物理学报 **54** 3508]
- [15] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 610 (in Chinese)[孙晓娟、徐 伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]

Response of Duffing one-sided constraint oscillator to combined deterministic harmonic and random excitation^{*}

Rong Hai-Wu¹† Wang Xiang-Dong¹ Xu Wei² Fang Tong²

¹ ‡ Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

² ‡ Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi 'an 710072 China)

(Received 8 February 2008 ; revised manuscript received 30 March 2008)

Abstract

The resonance of single-degree-of-freedom nonlinear impact oscillator to combined deterministic and random excitation is investigated. The method of harmonic balance, perturbation method and the method of stochastic averaging are used to determine the response of the system. The theoretical analyses are verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that when the intensity of the random excitation increases, the nontrivial steady state solution may change from a limit cycle to a diffused limit cycle. Under some conditions the system may have two steady state responses, one is a non-impact response, the other an impact response.

Keywords : Duffing one-sided constraint system, random responses, and method of harmonic balance, perturbation method

PACC : 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772046) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 7010407).

† Corresponding author. E-mail : ronghw@foshan.net