

具有时滞状态反馈的随机 Van der Pol 系统的动力学研究^{*}

邹少存¹⁾ 徐 伟^{1)†} 靳艳飞²⁾

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2008 年 4 月 22 日收到; 2008 年 8 月 11 日收到修改稿)

研究了时滞及时滞反馈控制参数对 Van der Pol 系统极限环幅值的影响. 运用自适应的平均场近似方法给出了系统的线性化近似及系统参数 Lyapunov 稳定性的边界条件, 同时给出了 Van der Pol 系统的关联时间和功率谱密度的数值模拟结果. 通过与平均场近似下的解析结果比较后发现, 数值模拟结果和理论结果符合. 进一步讨论了时滞反馈控制参数、噪声强度以及时滞对关联时间和功率谱密度的影响.

关键词: 平均场近似, 关联时间, Lyapunov 稳定性

PACC: 0547

1. 引 言

在自然和实际工程中, 许多问题的模型可以用非线性随机时滞微分方程来描述. 近年来, 对随机时滞系统复杂动力学行为和特征的研究正吸引国内外越来越多的学者注意, 并渐渐成为学术界关注的一个焦点问题. 目前, 随机时滞微分方程的理论还在进一步发展之中, 已有的方法只能适应某几种特殊的非线性系统^[1-4]. 很多学者应用一些近似方法研究了 Van der Pol 系统等非时滞系统^[5, 6], 但这些方法很难推广到时滞系统. 文献 [1] 给出了随机时滞微分方程的小时滞近似方法. 文献 [7] 研究了时滞对 Van der Pol 系统极限环幅值的影响. 文献 [8] 给出了具有时滞反馈的随机 Van der Pol 系统的平均场近似方法. 文献 [9, 10] 运用自适应的平均场近似方法研究了具有时滞速度反馈的随机 Van der Pol 系统的动力学行为. 因此, 非线性随机时滞微分方程产生复杂动力学行为的机理还需要作进一步的探讨.

本文将通过自适应的平均场近似方法^[8]来研究含有时滞位移和时滞速度反馈的随机 Van der Pol 系统的动力学行为.

2. 时滞 τ 及时滞反馈控制参数 β 对 Van der Pol 系统极限环幅值的影响

考虑如下含有时滞速度和时滞位移反馈的随机 Van der Pol 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) + F(t). \end{aligned} \quad (1)$$

这里 ω_0 为自然频率, β 为时滞反馈控制参数, τ 为系统时滞, $\xi(t)$ 为高斯白噪声, D 为零均值的高斯白噪声的噪声强度,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \delta(t - t'), \\ F(t) &= \beta [K_1(y(t - \tau) - y(t)) \\ &\quad + K_2(x(t - \tau) - x(t))]. \end{aligned}$$

根据 Hopf 分岔定理, ϵ 为 Hopf 分岔参数, 对于 $\beta = 0$ 和 $D = 0$, 在 $\epsilon = 0$ 时系统 (1) 发生超临界 Hopf 分岔. 在 $\epsilon < 0$ 时, 系统有一个稳定点 $(0, 0)$, 并且系统不会发生自激振荡. 在 $\epsilon > 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 成为不稳定的焦点, 并在其附近出现一渐近稳定的极限环. 这里研究 $\epsilon > 0$ 时时滞 τ 及时滞反馈控制参数 β 对极限环幅值的影响.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10702025, 10872165, 10772046)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

图 1 为极限环幅值 A 随时滞 τ 变化的数值模拟结果. 从图 1 可以看出, 极限环幅值 A 随着时滞 τ 的增加是不断起伏变化的. 当 $\tau \approx 2n\pi$ 时, 极限环

幅值 A 达到最大(约为 1.416). 当 $\tau \approx (2n - 1)\pi$ 时, 极限环幅值 A 最小, 并且随着时滞 τ 的增加最小极限环幅值逐渐增大.

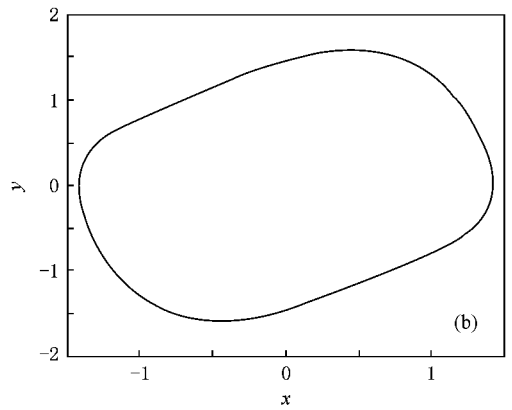
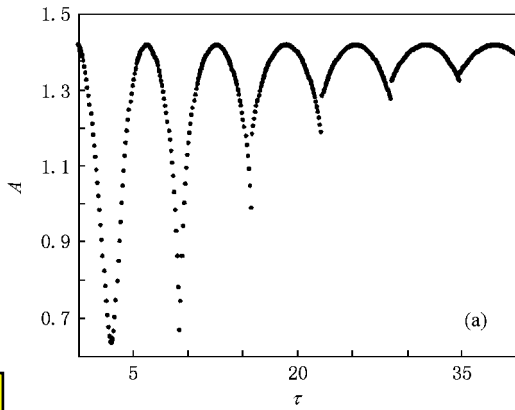


图 1 时滞 τ 对 Van der Pol 系统极限环幅值的影响以及 $\tau = 2\pi$ 时的相轨图 $\epsilon = 0.5, \omega_0 = 1, \beta = 1, D = 0.003$. (a) τ 对极限环幅值 A 的影响 (b) $\tau = 2\pi$ 时的相轨图

图 2 为极限环幅值 A 随时滞反馈控制参数 β 变化的数值模拟结果. 从图 2 可以看出, 极限环幅

值 A 随时滞反馈控制参数 β 的变化与系统分岔参数 ϵ 密切相关. 当 ϵ 从零增大到约 0.5 的过程中,

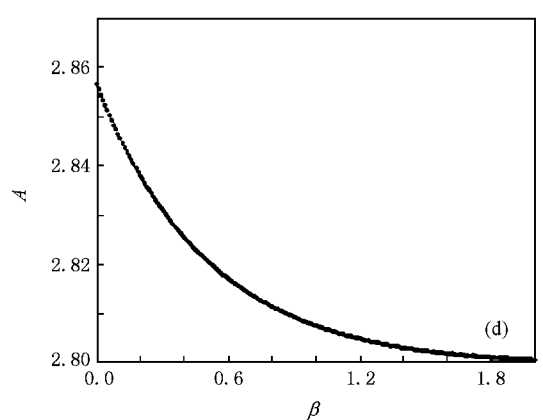
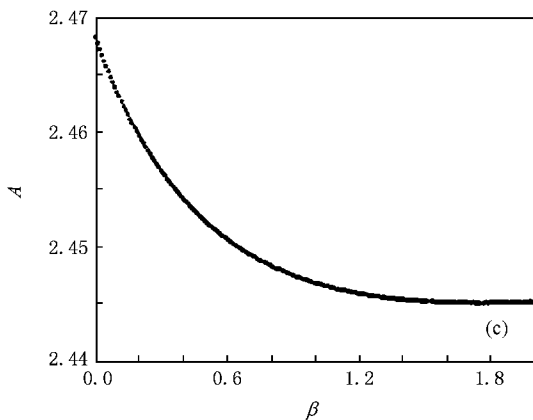
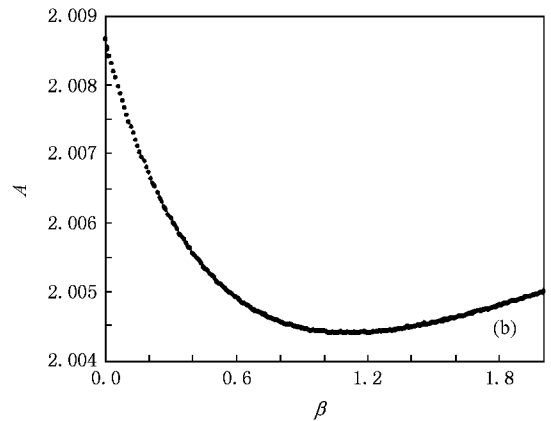
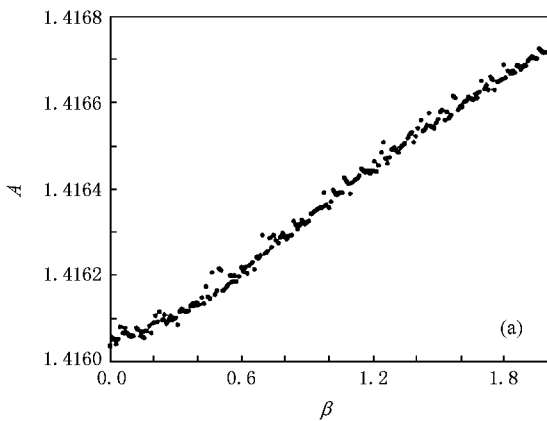


图 2 时滞反馈控制参数 β 对 Van der Pol 系统极限环幅值 A 的影响 $\omega_0 = 1, D = 0.003, \tau = 2\pi$. (a) $\epsilon = 0.5$, (b) $\epsilon = 1$, (c) $\epsilon = 1.5$, (d) $\epsilon = 2$

极限环幅值 A 随着 β 缓慢增加. 当 ϵ 继续增大到约 1.5 的过程中, 极限环幅值 A 随着 β 先减小后增加. 当 $\epsilon > 1.5$ 时, 极限环幅值 A 随着 β 缓慢减小.

3. Van der Pol 系统的线性稳定性分析

系统 (1) 是含有时滞的随机 Van der Pol 系统, 由于时滞和非线性的存在, 方程是非马尔科夫型的, 而现有的解析方法很难应用于具有非马尔科夫特性的非线性随机时滞方程. 因此, 在 $|\epsilon| \ll 1$ 时, 使用平均场近似方法^[8]可以得到

$$\begin{aligned} \epsilon - x^2 &\approx \epsilon - x^2 \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\epsilon}. \end{aligned} \quad (2)$$

从 (2) 式可以看出, 分岔参数 ϵ 被重新标度并且对于小噪声强度即 $D(\epsilon \omega_0) \rightarrow 0$ 时这种近似较准确^[8].

下面取 Hopf 分岔参数 $\epsilon = -0.01$. 考虑噪声强度 $D = 0$, 所以系统 (1) 可以写为一个线性的二阶时滞微分方程, 即

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \tilde{\epsilon} \dot{x} + \omega_0^2 x - \beta [K_1(\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)) \\ + K_2(x(t - \tau) - x(t))] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 使用 $x \propto \exp(\lambda t)$ 的指数拟设可以得到方程 (3) 对应的特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \tilde{\epsilon} \lambda + \omega_0^2 - \beta [K_1 \lambda (\exp(-\lambda \tau) - 1) \\ + K_2 (\exp(-\lambda \tau) - 1)] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

这是一个关于 λ 的超越方程, 特征方程 (4) 有无穷多个解, 系统是无穷维的. 为了得到系统的稳定性边界, 将 $\lambda = a + is$ 代入特征方程 (4) 并且分离实部和虚部可得

$$\begin{aligned} \alpha(a, s) &\equiv a^2 - s^2 + \omega_0^2 - a\tilde{\epsilon} \\ &\quad + \beta K_1 [a - a \exp(-a\tau) \cos(s\tau) \\ &\quad - s \exp(-a\tau) \sin(s\tau)] \\ &\quad + \beta K_2 [1 - \exp(-a\tau) \cos(s\tau)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta(a, s) &\equiv 2as - s\tilde{\epsilon} \\ &\quad + \beta K_1 [s + a \exp(-a\tau) \sin(s\tau) \\ &\quad - s \exp(-a\tau) \cos(s\tau)] \\ &\quad + \beta K_2 \exp(-a\tau) \sin(s\tau) \\ &= 0. \end{aligned}$$

根据 D 划分法^[11], 稳定性边界由 $a = 0$ 和 $\lambda = 0$ 确

定. 令 (5) 式中的 $a = 0$, 可得

$$\begin{aligned} -\beta K_1 s \sin(s\tau) + \beta K_2 [1 - \cos(s\tau)] &= s^2 - \omega_0^2, \\ \beta K_1 s [1 - \cos(s\tau)] + \beta K_2 \sin(s\tau) &= \tilde{\epsilon} s. \end{aligned} \quad (6)$$

求解 (6) 式就可以得到在参数平面 (K_1, K_2) 上的稳定性边界, 结果如图 3 所示.

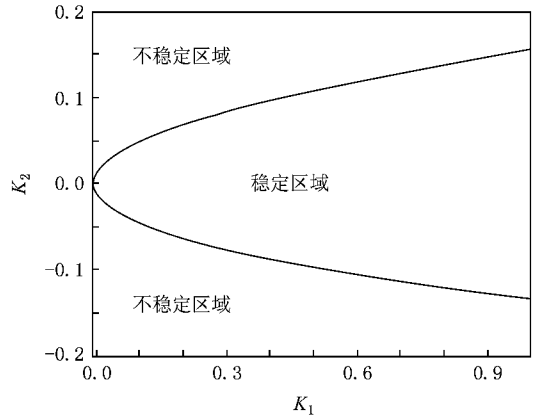


图 3 参数平面 (K_1, K_2) 上的稳定性边界 $\epsilon = -0.01, \omega_0 = 1, \beta = 1, D = 0.003$

4. 关联时间的近似解析分析及数值模拟结果

为了度量 Van der Pol 系统振子的运动, 引入下列关联时间 t_{cor} 的定义^[12]:

$$t_{\text{cor}} = \int_0^{\infty} |\psi_{yy}(s)| ds. \quad (7)$$

这里 $\psi_{yy}(s)$ 是 y 的正则自相关函数,

$$\psi_{yy}(s) = \frac{1}{\sigma_{yy}^2} (y(t-s) - y) (y(t) - y),$$

其中

$$\sigma_{yy}^2 = (y(t) - y)^2.$$

显然由关联时间 t_{cor} 的定义可以看出, 关联时间 t_{cor} 越大, Van der Pol 振子运动也就越规则.

在下面关联时间和功率谱密度的研究中, 取 $K_1 = 0.2, K_2 = 0.01$.

图 4 为 $K_1 = 0.2, K_2 = 0.01$ 时特征方程的特征根 $\lambda_j = a_j + is_j$ (j 为正整数) 的数值模拟结果. 为了更好地揭示时滞 τ 对特征根虚部 s_j 的影响, 在图 4 (b) 中用特征周期 $T_j = 2\pi/s_j$ 代替 s_j 作图. 令 $T = 2\pi/\omega_0$ 为基本周期, 从图 4 可以看出, 当 τ 约为基本周期的整数倍时, 即 $\tau \approx 2n\pi/\omega_0$ (n 为正整数), 特

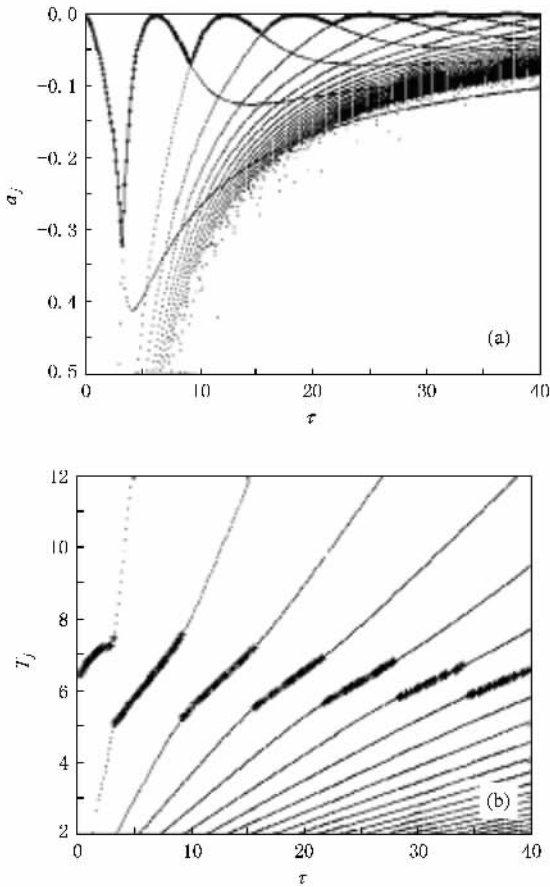


图4 特征方程(4)的特征根实部和特征周期随着时滞 τ 变化的数值结果 $\varepsilon = -0.01, \omega_0 = 1, \beta = 1, D = 0.003$. (a) 特征根的实部 a_j 以及最大实部 a_{\max} , (b) 特征周期 $T_j = 2\pi/s_j$ 以及与最大实部 a_{\max} 对应的 T_{\max}

征值具有 $\lambda = \delta_a + i(1 + \delta_s)\omega_0$ (其中 $|\delta_a|, |\delta_s| \ll 1$) 的形式. 令 $\Lambda = \delta_a + i\delta_s\omega_0$, 于是 $\lambda = \Lambda + i\omega_0$, 将其代入特征方程(4)经整理后可得

$$(2i\omega_0\Lambda - i\tilde{\varepsilon}\omega_0) + \beta K_1 \Lambda [1 - \exp(-i\omega_0\tau)] + (iK_1\omega_0 + \beta K_2) [1 - \exp(-i\omega_0\tau)] + \tau\Lambda \exp(-i\omega_0\tau) = 0.$$

当 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 时, 消去 δ_a 和 δ_s 的高阶项 $O(\delta_a^2), O(\delta_s^2)$ 和 $O(\delta_a\delta_s)$, 解之可得

$$\delta_a = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\frac{\beta^2 K_2^2 \tau^2}{\omega_0^2 (\beta K_1 \tau + 2)} + \beta K_1 \tau + 2}, \quad (8)$$

$$\delta_s = \frac{\beta K_2 \tau \tilde{\varepsilon}}{\beta^2 K_2^2 \tau^2 + \omega_0^2 (\beta K_1 \tau + 2)}.$$

由文献[8]可以知道, 关联时间 t_{cor} 的近似表达为

$$t_{\text{cor}} \approx -\frac{2}{\pi\delta_a}.$$

当 $\tau \approx 2n\pi/\omega_0$ 时, 将(8)式中的 δ_a 代入即可得到

$$t_{\text{cor}} = -\frac{2}{\pi\tilde{\varepsilon}} \left[\frac{\beta^2 K_2^2 \pi^2}{\omega_0^2 (\beta K_1 \tau + 2)} + \beta K_1 \tau + 2 \right]. \quad (9)$$

由图5可知, 所得结果与数值模拟结果符合很好. 从(9)式可以看出, 当 $K_2 \ll 1$ 时, 在 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处关联时间是随着 β 近似线性增加.

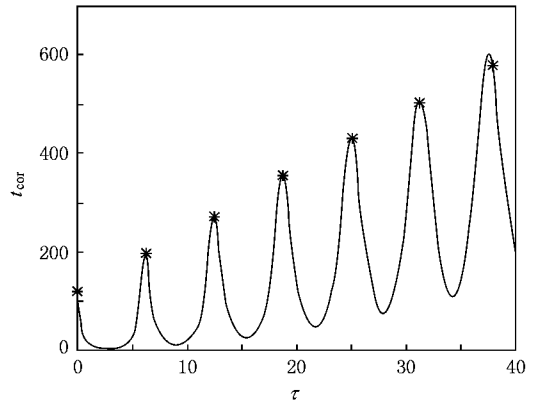


图5 关联时间 t_{cor} 随时滞 τ 的变化. 实线为数值模拟结果, 星号为(9)式的结果

由文献[8]自相容的平均场近似方法可知, 当 $|\varepsilon| \ll 1$ 时, 系统(1)可以被线性化为如下方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \tilde{\varepsilon}y - \omega_0^2 x + D\xi(t) + F(t), \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon - x^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}} \right). \end{aligned}$$

在 Fourier 空间中, 令 $\hat{x}(\omega), \hat{y}(\omega)$ 以及 $\hat{\xi}(\omega)$ 分别为 $x(t), y(t)$ 和 $\xi(t)$ 的 Fourier 变换. 对(10)式作 Fourier 变换可得

$$\begin{aligned} -i\omega\hat{x}(\omega) &= \hat{y}(\omega), \\ -i\omega\hat{y}(\omega) &= \tilde{\varepsilon}\hat{y}(\omega) - \omega_0^2\hat{x}(\omega) + D\hat{\xi}(\omega) \\ &\quad + [\beta K_1\hat{y}(\omega) + K_2\hat{x}(\omega)] \\ &\quad \times [\exp(i\omega\tau) - 1]. \end{aligned}$$

使用等式 $\xi(t)\xi(t') = \delta(t-t')$ 的 Fourier 变换

$$\hat{\xi}^*(\omega)\hat{\xi}(\omega') = \frac{1}{2\pi}\delta(\omega - \omega'),$$

以及维纳-辛钦定理

$$\hat{y}^*(\omega)\hat{y}(\omega') = \delta(\omega - \omega')S_{yy}(\omega),$$

可以得到功率谱

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{[\omega^2 - \omega_0^2 + A(\omega)]^2 + B^2(\omega)}, \quad (11)$$

式中

$$A(\omega) = \beta [K_1 \omega \sin(\omega \tau) + K_2 (\cos(\omega \tau) - 1)],$$

$$B(\omega) = \tilde{\varepsilon} \omega + \beta K_1 \omega [\cos(\omega \tau) - 1] - \beta K_2 \sin(\omega \tau).$$

从图 (a)(b) 中可以看出, 近似的解析结果与数值模拟结果基本符合。

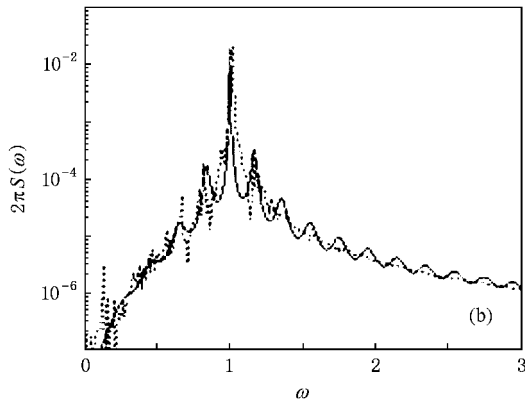
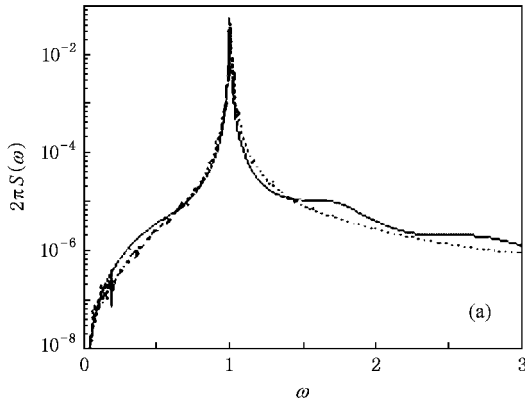


图 6 功率谱的数值模拟结果以及(11)式的解析结果。实线为(11)式的结果, 虚线为数值模拟结果。(a) $\tau = 2\pi$, (b) $\tau = 10\pi$

为了给出关联时间的近似解析表达式, 下面进行一些简单的分析。

在(11)式中令 $\beta = 0$, 这种情况对应着时滞 $\tau = 0$ 的情形, 则(11)式变为

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2(2\Gamma)^2},$$

式中 $\Gamma = -\tilde{\varepsilon}/2$ 。这是一个频率为 ω_0 , 半波宽为 Γ 的 Lorentz 型的功率谱。由维纳-辛钦定理可知, 功率谱的 Fourier 变换为自相关函数, 利用留数定理可得到正则自相关函数

$$\Psi(s) = \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}} \sin(s \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}) + \cos(s \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}) \right) \exp\left(-\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{2}s\right).$$

当 $|\tilde{\varepsilon}| \ll \omega_0$ 时可以得到近似正则自相关函数

$$\Psi(s) = \exp\left(-\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{2}s\right) \cos(\omega_0 s).$$

所以, 近似关联时间为

$$t_{\text{cor}} = \int_0^\infty |\Psi(s)| ds = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{2}s\right) |\cos(\omega_0 s)| ds.$$

令

$$\gamma = -\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{2\omega_0},$$

于是可得

$$t_{\text{cor}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{2 \left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + \exp\left(\frac{3\pi}{2}\gamma\right) \right] + \chi [1 - \exp(2\pi\gamma)]}{(1 + \gamma^2) [1 - \exp(2\pi\gamma)]}. \quad (12)$$

当 $|\tilde{\varepsilon}| \ll \omega_0$ 时,

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \approx 1 + \frac{\pi}{2}\gamma,$$

$$\exp\left(\frac{3\pi}{2}\gamma\right) \approx 1 + \frac{3\pi}{2}\gamma,$$

$$\exp(2\pi\gamma) \approx 1 + 2\pi\gamma,$$

代入(12)式即可得到

$$t_{\text{cor}} \approx \frac{1}{\omega_0} \frac{4(1 + \pi\gamma) - 2\pi\gamma^2}{(1 + \gamma^2) 2\pi\gamma} \approx -\frac{4}{2\pi\gamma\omega_0} = \frac{4}{\pi|\tilde{\varepsilon}|}. \quad (13)$$

图 7(a) 给出了关联时间作为噪声强度的函数的数值模拟结果以及(13)式的解析结果。从图 7(a) 可以看出, 大的噪声强度不利于系统的控制。在 $\tau = 0$ 时, 近似结果(13)式与数值模拟结果符合很好。

当 $\beta \neq 0, K_1 \neq 0, K_2 \neq 0$ 时, (11)式是一个多峰的功率谱密度。下面通过对主共振项用 ω_0 代替 ω 来给出功率谱密度的比较差的估计。当 $|\tilde{\varepsilon}| \ll \omega_0, \beta \ll 1$ 时, (11)式的功率谱的波宽为

$$2\Gamma = -\tilde{\varepsilon} + \beta K_1 (1 - \cos(\omega_0 \tau)) + \frac{\beta K_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau),$$

关联时间为

$$t_{\text{cor}} = \frac{4}{\pi \left[-\tilde{\varepsilon} + \beta K_1 (1 - \cos(\omega_0 \tau)) + \frac{\beta K_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \right]} \quad (14)$$

(14) 式给出了关联时间的一个近似. 这个近似描绘出了关联时间的一个周期性性质, 给出了关联时间在时滞 $\tau \approx 2n\pi/\omega_0$ 为最大, 在 $\tau \approx (2n-1)\pi/\omega_0$ 为最小的性质, 但是并没有正确给出关联时间在时滞 τ

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{\left[\omega^2 - \omega_0^2 + \omega \beta K_1 \omega_0 \tau \delta - \frac{\beta K_2}{2} (\omega_0 \tau \delta)^2 \right]^2 + \left[\tilde{\varepsilon} \omega - \frac{\beta K_1 \omega}{2} (\omega_0 \tau \delta)^2 - \beta K_2 \omega_0 \tau \delta \right]^2}.$$

将 $\omega = (1 + \delta)\omega_0$ 代入整理后可得

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi \left(1 + \frac{\beta K_1}{2} \tau \right)^2} \times \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\beta K_1}{2} \tau} \right)^2}.$$

由此可以看出这是频率为 ω_0 , 半波宽

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{2} |\tilde{\varepsilon}|}{\left(1 + \frac{\beta K_1}{2} \tau \right)}$$

的 Lorentz 谱. 因此可以得到在 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处的关联时间为

$$t_{\text{cor}} = \frac{4}{\pi |\tilde{\varepsilon}|} \left(1 + \frac{\beta K_1}{2} \tau \right). \quad (15)$$

这个结果与图 7(b) 的数值模拟结果基本符合.

在最小的关联时间即 $\tau = (2n-1)\pi/\omega_0$ 处, 对 (11) 式同样用 $\omega = (1 + \delta)\omega_0$ 展开, 于是 $\sin(\omega\tau) = -\omega_0 \delta \tau \cos(\omega\tau) = -1 + \frac{1}{2} (\omega_0 \delta \tau)^2$, 代入 (11) 式并整理后可得

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi \left(1 - \frac{\beta K_1}{2} \tau \right)^2} \times \frac{\omega^2}{\left[\omega^2 - \left(\omega_0^2 + \frac{4\beta K_2}{2 - \beta K_1 \tau} \right) \right]^2 + \omega^2 \left(\frac{2\tilde{\varepsilon} - 4\beta K_1}{2 - \beta K_1 \tau} \right)^2}.$$

显然这是一个频率

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4\beta K_2}{2 - \beta K_1 \tau}}$$

$= 2n\pi/\omega_0$ 时的精确值.

在最大关联时间即 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处, 用 $\omega = \omega_0(1 + \delta)$ 其中 $\delta \ll 1$ 展开 (11) 式, 于是可以得到

$$\sin(\omega\tau) \approx \omega_0 \tau \delta$$

和

$$\cos(\omega\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} (\omega_0 \tau \delta)^2,$$

代入 (11) 式可得

半波宽

$$\Gamma = \frac{|\tilde{\varepsilon}| + 2\beta K_1}{|2 - \beta K_1 \tau|}$$

的 Lorentz 型的功率谱. 因此在 $\tau = (2n-1)\pi/\omega_0$ 处关联时间为

$$t_{\text{cor}} = \frac{2}{\pi} \frac{|2 - \beta K_1 \tau|}{|\tilde{\varepsilon}| + 2\beta K_1}. \quad (16)$$

联立 (14)(15)(16) 式可以得出一个改进的关于连续时滞 τ 的关联时间

$$t_{\text{cor}} = \frac{4}{\pi \left[-\tilde{\varepsilon} + \beta K_1 (1 - \cos(\omega_0 \tau)) + \frac{\beta K_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \right]} \times \left| 1 + \frac{\beta K_1}{2} \tau \operatorname{sign}(\cos(\omega_0 \tau)) \right|, \quad (17)$$

式中 $\operatorname{sign}(\cdot)$ 为符号函数.

图 7 给出了噪声强度 D 、时滞 τ 以及时滞反馈控制参数 β 对关联时间的影响. 从图 7(a) 可以看出, 随着噪声强度 D 的增加, 关联时间是减小的, 因此噪声不利于系统运动的控制. 从图 7(a) 还可以看出, 在 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处, 关联时间较大. 从图 7(b) 可以看出, 最大关联时间发生在 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处, 最小关联时间发生在 $\tau = (2n-1)\pi/\omega_0$ 处. 这说明 Van der Pol 振子在 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 处运动比较规则, 较易控制; 在 $\tau = (2n-1)\pi/\omega_0$ 处运动不规则, 不太容易控制. 从图 7(c) 可以看出, 当 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 时, 随着 n 也就是时滞的增加以及时滞反馈控制参数 β 的增加, 关联时间在增大. 这就说明系统容易被控制. 从图 7 还可以看出, 近似的解析结果与数值模拟结果基本一致, 符合很好.

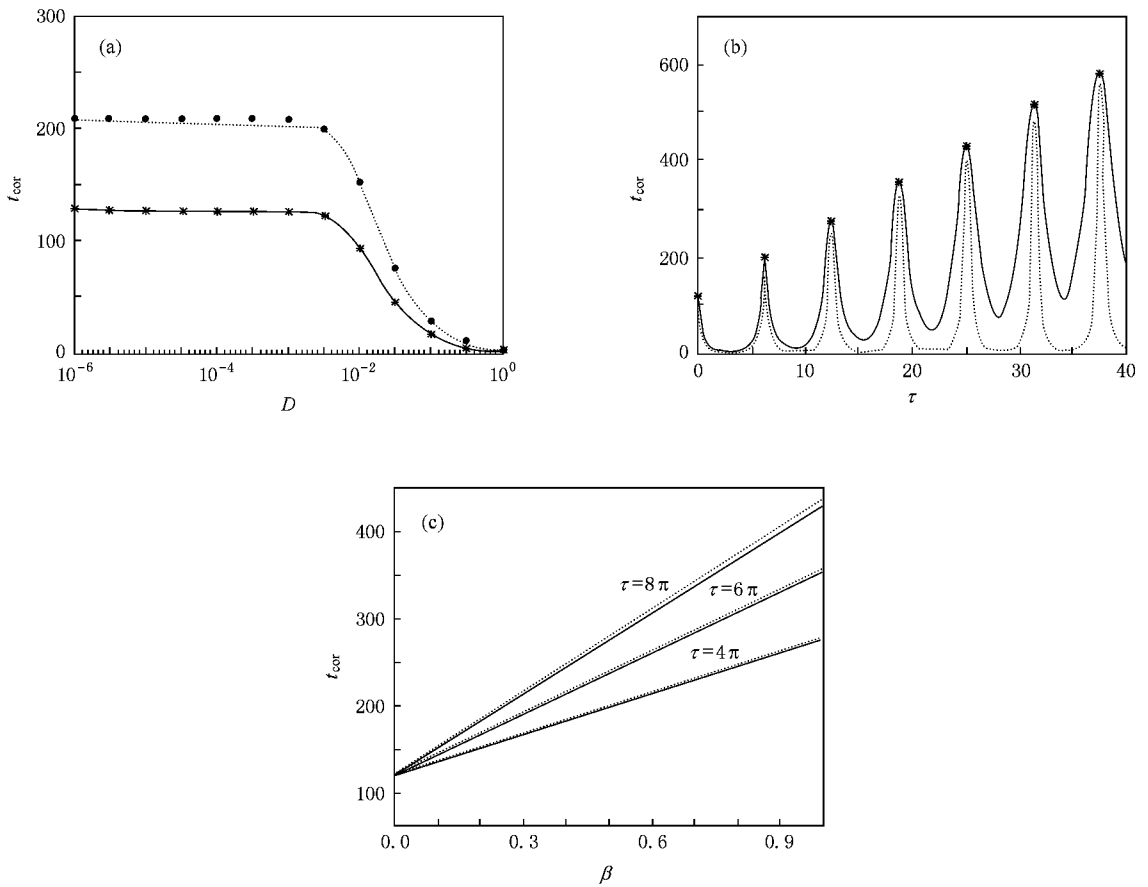


图 7 噪声强度 D 、时滞 τ 以及时滞反馈控制参数 β 对关联时间的影响 (a) 噪声强度 D 对关联时间 t_{cor} 的影响, 实线为(13)式的结果, 虚线为(9)式在 $\tau = 2\pi$ 时的结果, 星号和点分别为 $\tau = 0$ 与 $\tau = 2\pi$ 时的数值模拟结果; (b) 时滞 τ 对关联时间 t_{cor} 的影响, 实线为数值模拟结果, 虚线为(17)式的结果, 星号为(15)式的结果; (c) 时滞反馈控制参数 β 对关联时间 t_{cor} 的影响, 虚线为数值模拟结果, 实线为(9)式的结果

5. 结 论

研究了含有时滞位移和时滞速度反馈的非线性随机 Van der Pol 方程, 着重研究了时滞及时滞反馈控制参数对 Van der Pol 系统极限环幅值以及对关联时间的影响. 研究表明, 适当调节 Hopf 分岔参数 ϵ , 利用时滞 τ 和时滞反馈控制参数 β 可以很好控

制 Van der Pol 系统的极限环幅值. 研究还表明, 当时滞 $\tau = 2n\pi/\omega_0$ 时, 关联时间达到极大值, 并且随着时滞的增加关联时间呈线性增加, 而且关联时间随着时滞反馈控制参数增大而增大. 当时滞 $\tau = (2n-1)\pi/\omega_0$ 时, 关联时间达到极小值. 由于关联时间表征系统运动的规则程度, 关联时间越大系统运动就越规则. 这表明时滞与时滞反馈控制参数可以很好地用来控制系统的运动.

- [1] Guillouzac S, L'Heureux I, Longtin A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3970
 [2] Ohira T 1997 *Phys. Rev. E* **55** R1255
 [3] Ohira T, Yamane T 2000 *Phys. Rev. E* **61** 1247
 [4] Goldobin D, Rosenblum M, Pikovsky A 2003 *Phys. Rev. E* **67** 061119
 [5] Ma S J, Xu W, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese)
 [马少娟、徐伟、李伟 2005 物理学报 **54** 3508]

- [6] Ma S J, Xu W, Li W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1231 (in Chinese)
 [马少娟、徐伟、李伟 2006 物理学报 **55** 1231]
 [7] Qian C Z, Peng X 2005 *J. Dyn. Contr.* **3** 25 (in Chinese) [钱长照、彭献 2005 动力学与控制学报 **3** 25]
 [8] Pomplun J, Amann A, Schöll E 2005 *Europhys. Lett.* **71** 366
 [9] Schöll E, Balanov A G, Janson N B, Neiman A 2005 *Stochastics Dyn.* **5** 281

- [10] Pomplun J , Balanov A G , Schöll E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 040101 [12] Stratonovich R L 1963 *Topics in the Theory of Random Noise* (New York : Gordon and Breach) Vol. 1
- [11] Zhang L , Yang C Y , Chajes M J 1993 *J. Eng. Mech. Div. ASCE* **119** 1017

The study of stochastic Van der Pol system with delayed state feedback^{*}

Zou Shao-Cun¹⁾ Xu Wei^{1)†} Jin Yan-Fei²⁾

¹ *Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China*)

² *Department of Mechanics , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China*)

(Received 22 April 2008 ; revised manuscript received 11 August 2008)

Abstract

In this paper , we studied the amplitude control of the limit cycle in Van der Pol system with time-delay and time-delayed feedback strength. We show the critical stability boundary and the corresponding linearized equation of the Van der Pol system by mean-field approximation method. Mean-field approximate analytical expressions and numerical simulations for the power spectral density and the correlation time were given , and mean-field approximate analytical expressions in dependence upon noise intensity , delay time , and feedback strength are in good agreement with our numerical simulations. The time delayed feedback strength , noise intensity and time delay are taken as variable parameters to investigate their effects on the dynamics of the system , such as the power spectral density and the correlation time.

Keywords : mean-field approximation , correlation time , Lyapounov stability

PACC : 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10702025 , 10872165 , 10772046).

[†] Corresponding author. E-mail : weixu@nwpu.edu.cn