

H 桥正弦逆变器的快变和慢变稳定性 及混沌行为研究*

王学梅^{1)†} 张波¹⁾ 丘东元¹⁾

1) (华南理工大学电力学院, 广州 510640)

2) (湖南工业大学电气与信息工程学院, 株洲 412008)

(2008 年 7 月 30 日收到; 2008 年 9 月 5 日收到修改稿)

正弦逆变器是一个时变非线性系统, 存在快变和慢变两种尺度的稳定性. 以比例控制一阶 H 桥正弦逆变器为例, 引入了快变和慢变两种尺度, 建立了 H 桥正弦逆变器的快变和慢变离散模型. 针对快变稳定性, 提出了折叠图和功率谱分析方法, 针对慢变稳定性, 提出周期时变非线性离散系统慢变平衡点定义和慢变稳定性定理, 指出了慢变不稳定是周期时变系统混沌行为的有效判据. 研究表明, 所提出的方法能够很好地分析正弦逆变器出现的快变和慢变不稳定现象及混沌行为.

关键词: 周期时变离散系统, H 桥正弦逆变器, 快变不稳定, 慢变不稳定

PACC: 0545

1. 引言

逆变器是一种基本电力电子电路, 实际运行中发现了一些不规则现象, 如运行状态突变、间歇电磁噪声、系统运行频率不稳定以及无法按设计要求进行工作等问题^[1]. 以往研究总是试图采用各种线性化的方法来分析系统, 而忽视其非线性行为, 其非线性动力学行为至今都没有得到深入探索.

影响正弦波逆变器输出基波和谐波的是两个不同的频率, 一个是载波频率或开关频率, 频率较高; 一个是调制波频率, 频率较低. 因此, 可以按开关频率的尺度来分析逆变器的稳定性, 定义为快变稳定性, 也可以按调制波频率的尺度来分析逆变器的稳定性, 定义为慢变稳定性.

目前采用快变和慢变两种尺度来分析电力电子变换器的非线性现象仅在功率因数校正(PFC)电路的研究中有报道, 并表明电流控制模式 PFC 电路会出现的快变、慢变尺度下不稳定和混沌现象^[2-12]. 如 Orabi 等用平均模型分析了 PFC 电路的低频分岔和

混沌现象^[2], Wong 等用双平均方法研究了平均电流模式下 PFC 电路的慢变不稳定^[3]; Dai 等研究了单相隔离型 PFC 电路中出现的低频局部振荡现象^[4]. 但 PFC 电路实际上是一个 PWM 整流器, 与正弦波逆变器输入及控制上还有明显的不同, 无法直接引用.

为此, 从建模方法、描述方式等研究一阶 H 桥正弦逆变器的非线性行为是一个值得深入探索的课题, 具有重要的理论和实际意义. 本文在正弦波逆变器中引入快变和慢变尺度的概念, 建立了相应的快变和慢变离散模型. 提出了一阶周期时变离散系统通用的慢变平衡点和慢变稳定性概念, 研究了一阶 H 桥正弦逆变器快、慢变稳定性和混沌行为. 分析了慢变不稳定与混沌现象的关系, 指出慢变不稳定是一阶周期时变离散系统混沌行为的有效判据. 同时还分析了快变和慢变稳定性的特点及相互联系.

2. 快变和慢变离散模型

2.1. 状态方程及输出

电流控制 H 桥逆变器的电路如图 1 所示. 由电

* 国家自然科学基金(批准号: 60474066)、广东省自然科学基金(批准号: 8251064101000014)和国家高技术研究发展计划(批准号: 2007AA05Z229)资助的课题.

† E-mail: wang_xuemei@mail.scut.edu.cn

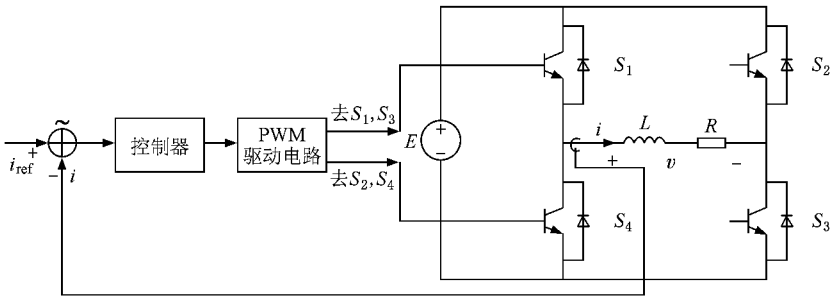


图 1 正弦 PWM 型 H 桥逆变器

压源 E , 开关管 S_1 — S_4 (带反并联二极管), 感性负载 R 和 L 组成. 负载电流与参考电流 i_{ref} 比较后送至以 k 为比例的控制器, 再通过脉冲宽度调制 (PWM) 电路控制开关管的工作.

该逆变器存在两种工作模式. 模式 1, S_1 和 S_3 导通, S_2 和 S_4 截止, 电感电流指数上升; 模式 2, S_2 和 S_4 导通, S_1 和 S_3 截止, 电感电流指数下降. 模式 1 的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}, \\ v &= E. \end{aligned} \quad (1)$$

模式 2 的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{E}{L}, \\ v &= -E. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 i 是电感电流, v 是负载电压.

在外部控制器作用下, 系统在两种模式间切换, $T_s = 1/f_s$ 为控制器开关的时钟周期, 工作波形如图 2 所示. t_n 为模式 1 的工作时间, $(T_s - t_n)$ 为模式 2 的工作时间, $d = t_n/T_s$ 为占空比. 当参考电流 i_{ref} 为正弦波时 ($i_{ref} = A\sin 2\pi f_1 t$, 且 $f_s \gg f_1$), 占空比按正弦规律变化, 实现正弦逆变.

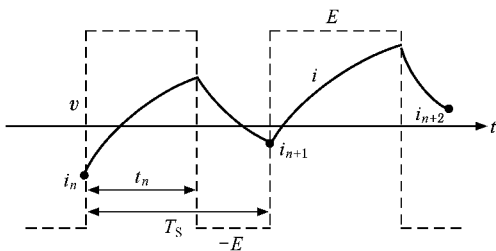


图 2 负载电流波形 (实线) 和电压波形 (虚线)

根据以上工作规律, 选择逆变器参数如下: $E = 100 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $T_s = 200 \mu\text{s}$, $D = 0.4$, i_{ref}

$= 5\sin 40\pi t$ 即 $f_s = 5 \text{ kHz}$, $f_1 = 20 \text{ Hz}$. 根据系统状态方程, 采用精确的周期-周期计算机仿真, 可以得到图

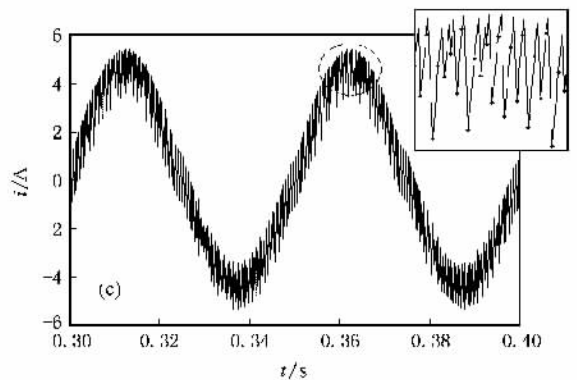
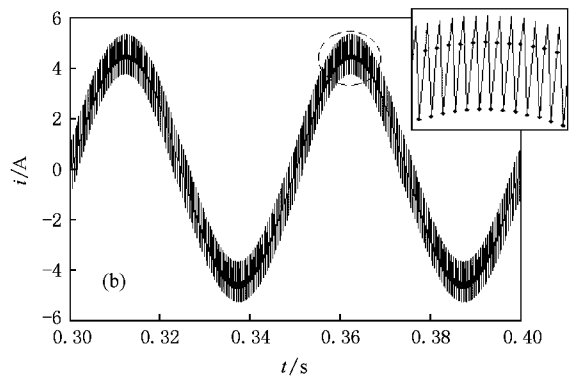
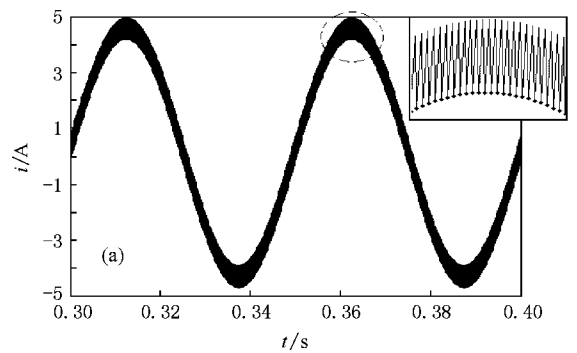


图 3 不同反馈系数下电感电流 i 的时域波形和局部放大图 (a) $k=0.4$ (b) $k=0.53$ (c) $k=0.7$

3 的时域波形. 图 3 右上方为虚线部分的放大 (t 为 0.36—0.365 s), 图中圆点是以固定采样时间 ($t = nT_s$) 进行采样得到的采样点. 我们发现, 对于不同反馈系数 k , 逆变器出现了从稳定到不稳定的现象. 图 3(a) 是 $k = 0.4$ 的时域波形, 逆变器的工作周期等于时钟周期, 系统运行于稳定状态. 从图 3(b) 可见 $k = 0.53$ 时, 系统的工作周期是时钟周期的两倍, 出现了倍周期现象. 图 3(c) 是 $k = 0.7$ 的时域波形, 工作周期显得杂乱无章, 系统工作处于一种完全不稳定状态.

2.2. 快变离散模型

快变离散模型采用在 DC-DC 变换器中常用的频闪映射方法建模, 其主要思想是以开关时钟周期 T_s 作为频闪采样间隔, 将状态变量在 $n+1$ 时刻的采样值用 n 时刻的采样值表示. 对于正弦逆变器, 以载波周期为频闪采样间隔, 由状态方程 (1) 和 (2) 可推出 H 桥正弦逆变器的电感电流 i 的快变离散模型

$$i_{n+1} = (i_n - \alpha) e^{-T_s/\tau} + 2\alpha e^{(d_n-1)T_s/\tau} - \alpha, \quad (3)$$

其中 $\alpha = \frac{E}{R}$, $\tau = \frac{L}{R}$, d_n 为第 n 个开关周期的占空比.

当控制器为比例控制时, 占空比 d_n 有特殊的饱和性, 可按式确定:

$$d_n = D + k(i_{\text{refn}} - i_n), \quad (4)$$

$$d_n = \begin{cases} 0 & (d_n < 0), \\ 1 & (d_n > 1), \\ d_n & (\text{其他}), \end{cases} \quad (5)$$

其中 D 为常数, k 为比例系数, i_{refn} 为参考正弦波在每个开关时刻的值 ($i_{\text{refn}} = A \sin 2\pi f_1 n T_s$).

由于 i_{refn} 随 n 做周期变化, 快尺度下的非线性离散映射 (3) 式实际上是一个变参数系统. 据此, 定义一类一阶时变离散系统

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_n), \quad (6)$$

其中 x_n 是离散状态变量, μ_n 是时变参数. 当 μ_n 以整数周期 N 缓慢变化, 即 $\mu_n = \mu_{n+N}$ 时, $n = 1, 2, \dots, N$ 系统 (6) 就是一类周期时变离散系统 (discrete-time periodically varying system). 正弦逆变电路的快变离散模型 (3) 式就是一个一阶非线性周期时变离散模型.

2.3. 慢变离散模型

假设周期时变离散非线性系统 (6) 中的 μ_n 变

化周期为 N , 那么每隔周期 N 考察一次离散系统 (6), 系统参数 μ_n 又可以看作是时不变的, 这时的离散系统就是一个时不变系统. 因此, 可建立另一种慢变尺度下的时不变离散模型.

每迭代 N 次采样一次快变离散映射 (6) 式, 就是慢变离散映射. 对于一阶周期时变离散系统, 其慢变离散模型可以表示为

$$x_{m+1, n} = f^{(N)}(x_{m, n}, \mu_n) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{N \text{ 次}}(x_{m, n}, \mu_n), \quad (7)$$

其中 $x_{m, n}$ 是第 m 个慢尺度周期中第 n 个采样时刻的状态变量, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots$.

对于正弦逆变电路, N 依赖系统的开关频率 f_s 和参考正弦频率 f_1 的比率, 其慢变离散映射可按如下方式获得:

(1) 若 f_s/f_1 是整数, 则级联 (连续迭代) 映射 (3) 式 $N = f_s/f_1$ 次. 例如 $f_s = 5000 \text{ Hz}$, $f_1 = 50 \text{ Hz}$, 则 $N = 100$.

(2) 若 f_s/f_1 不是整数, f_s 和 f_1 有最小公倍数 (GLM), 则级联 (连续迭代) 映射 (3) 式 $N = \text{GLM}(f_s, f_1)/f_1$ 次. 如 $f_s = 5000 \text{ Hz}$, $f_1 = 30 \text{ Hz}$, $\text{GCM}(f_s, f_1) = 15000$, 则 $N = 500$.

不失一般性, 我们只考虑第一种情况, H 桥正弦逆变器的慢变离散模型为

$$i_{m+1, n} = f^{(N)}(i_{m, n}, i_{\text{refn}}) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{N \text{ 次}}(i_{m, n}, i_{\text{refn}}), \quad (8)$$

其中 $i_{m, n}$ 是第 m 个正弦波中第 n 个采样时刻的采样值, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots$.

3. 快尺度和慢尺度下的稳定性分析

3.1. 快变稳定性

在图 3 中, 以开关频率为观察点, 可以看到逆变器输出出现的不稳定和分岔现象, 这说明在快尺度上会出现不稳定行为. 研究系统在快尺度上的不稳定, PFC 电路中已有很多研究成果^[5-12]. 基本上沿用 DC-DC 变换器中雅可比矩阵方法来判断稳定性和分岔点的位置, 但由于给定正弦波参考信号是时变的, 这种方法仍存在一定的误差^[5,7].

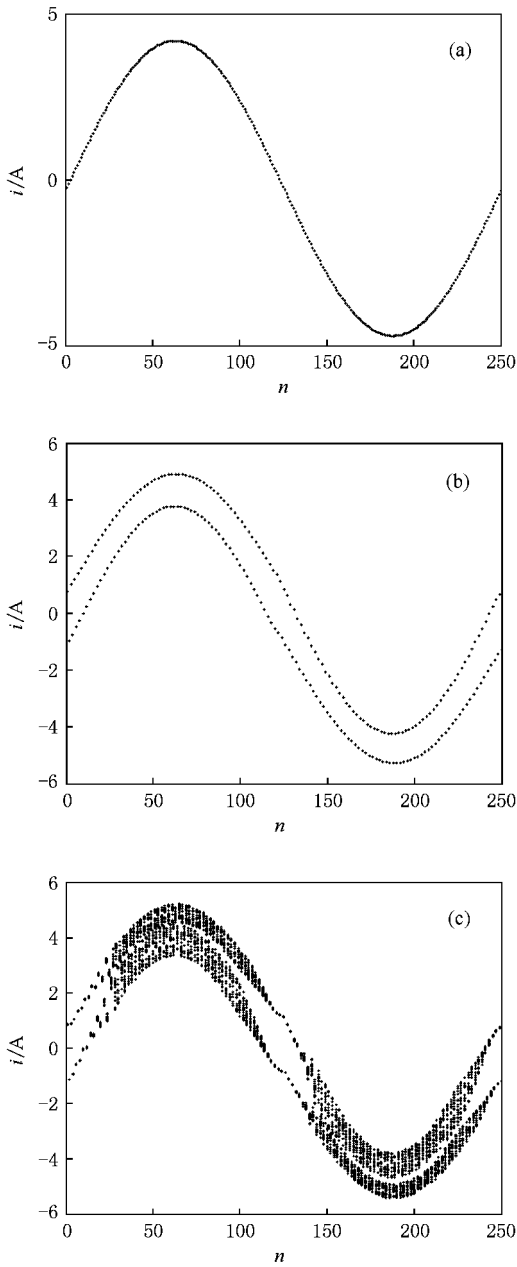


图4 折叠图(折叠20个正弦周期) (a) $k=0.4$ (b) $k=0.53$, (c) $k=0.7$

3.1.1. 折叠图稳定性分析方法

折叠图的方法可以直观地判断系统出现的分岔和混沌现象^[7],它避免了雅可比矩阵方法依赖于平衡点的缺点.具体步骤如下:选取任一初值代入(3)式并开始迭代,略去过渡过程,将稳定后的20个正弦周期按采样时刻对齐后折叠.依此步骤重绘图3,得到折叠图(图4).其中横坐标为采样点数,一个正弦周期共采样 $N(N=f_s/f_1=250)$ 个点.图4(a)是 $k=0.4$ 的折叠图,20个正弦波的每一个采样点都是

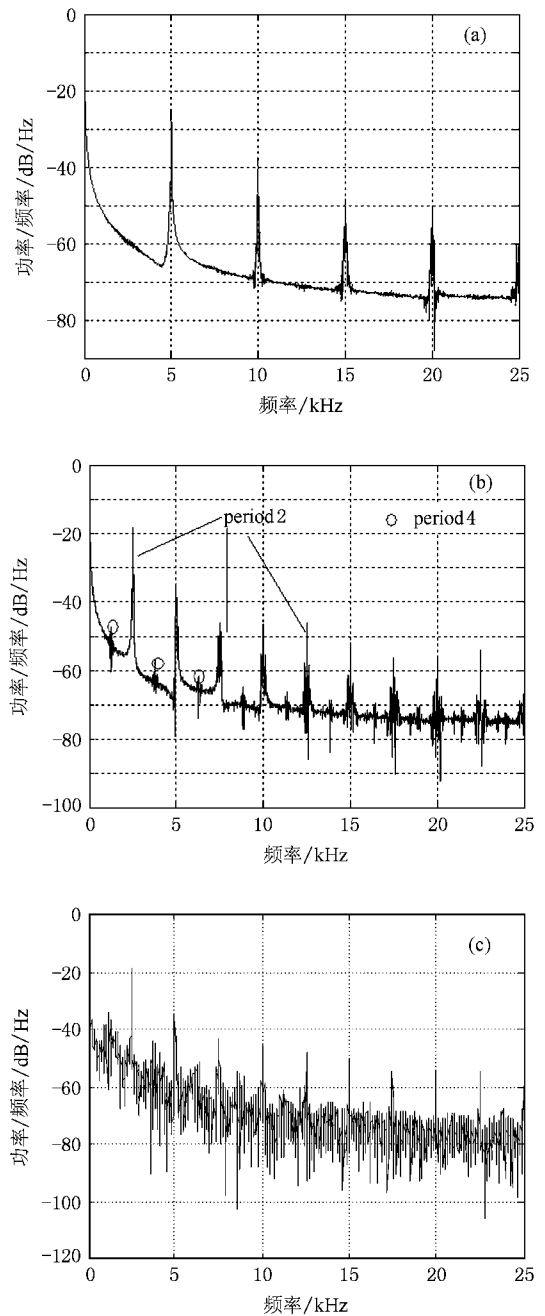


图5 功率谱密度图(加周期窗,采样频率50 kHz) (a) $k=0.4$, (b) $k=0.53$ (c) $k=0.7$

完全重合的,连成了一条光滑的正弦曲线,系统显然是快变稳定的.图4(b)是 $k=0.53$ 的折叠图,采样点也完全重合,但呈现两条正弦曲线,说明系统是快变不稳定的,且是一种在整个正弦周期内出现的全局快变不稳定.图4(c)是 $k=0.7$ 的折叠图,除在过零点附近是两条轨线外,波形的大部分区域都形成了采样点的密集填充,说明出现了混沌现象.

3.1.2. 功率谱稳定性分析

功率谱分析方法可以直接描述频率 f 与相应的功率 $E(f)$ 之间的指数关系. 在功率谱图中, 周期运动在功率谱中对应单峰或若干个峰, 混沌的特征是谱中出现噪声背景和宽峰, 即无明显峰值或峰连成一片^[13]. 对图 3 的时序波形进行功率谱分析, 得到相应的功率谱密度图(图 5). 图 5(a) 是 $k = 0.4$ 的功率谱密度图, 仅在开关频率(5 kHz)的整数倍处出现了尖峰, 说明系统运行稳定. 图 5(b) 是 $k = 0.53$ 的功率谱密度图, 出现了二分频和在折叠图中不易察觉的四分频, 表明系统出现了快变不稳定引起的次谐波. 图 5(c) 是 $k = 0.7$ 的功率谱密度图, 图中峰值连成了一片, 出现噪声背景, 表明出现了混沌现象.

3.2. 慢变稳定性

3.2.1. 慢变平衡点和慢变稳定性定理

快变稳定性分析是以开关频率为观察点观察逆变器输出的分岔和混沌现象, 而慢变稳定性分析是指以调制波为周期研究其稳定性.

从慢变离散映射(7)式可以看出, 系统又是一个时不变系统, 如果从系统任一点开始经过 N 次迭代后都能够返回到原来的状态, 系统就是慢变稳定的. 这样, 系统就相当于一个周期 N 的稳定轨道, N 个周期点 $x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,N}$ 中的任一点都是复合函数 $f^N(x_{m,n}, \mu_n)$ 的不动点(平衡点).

定义 一阶非线性方程

$$x_{m+1,n} - f^N(x_{m,n}, \mu_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

的解或零点称为系统的慢变平衡点.

慢变稳定性定理 对于一阶周期时变离散映射, 如果满足

$$S \equiv \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{n=1}^N f'(\mu_n, x_n) \right| \leq 0, \quad (10)$$

那么系统是慢变稳定的, 其中 S 称为慢变稳定性指标.

证明 根据复合函数的链式求导法则,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f \circ g \circ h(x) &= \left. \frac{df(y)}{dy} \right|_{y=g \circ h(x)} \left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=h(x)} \\ &\times \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_x. \end{aligned} \quad (11)$$

注意到慢变离散映射模型(7)是一个由同一个函数嵌套而成的复合函数 f^N , 有

$$\frac{\partial f^N(\mu, x)}{\partial x} = \prod_{n=1}^N f'(\mu_n, x_n), \quad (12)$$

即取每个离散点的一阶导数的连乘. 由于慢变稳定

实际上是将系统看成一个周期 N 的轨道, 根据周期 N 轨道的稳定条件

$$\left| \prod_{n=1}^N f'(\mu_n, x_n) \right| \leq 1, \quad (13)$$

则必有(10)式成立.

对于一个一般离散系统, 如果周期 N 轨道是稳定的, 那么意味着经过一个周期的演化, 轨道中的每一个点都能回到原来的位置, 慢变稳定性指标 $S < 0$. 如果周期 N 轨道是不稳定的, 那么轨道中的某些点不能回到原来的位置, 慢变稳定性指标 $S > 0$. 进一步, 如果轨道中的某些点每次回到位置都不相同, 但又局限在一定的区域内并形成了密集的填充, 那么这时系统是混沌的. $S = 0$ 是系统从慢变稳定过渡到慢变不稳定的分界点, 亦即周期态过渡到混沌态的分界点.

根据(10)式, 针对不同 k 计算正弦逆慢变稳定性指标 S , 结果如图 6 所示. 当 $k < 0.562$, $S < 0$, 系统是慢变稳定的; 当 $k = 0.501$, $S = 0$, 表明系统出现了分岔; 当 $k > 0.562$, $S > 0$, 系统是慢变不稳定且混沌出现. k 值越大, S 就越大, 表明稳定性越差. 联系系统的折叠图, 如果折叠图的采样点完全重合, 系统是慢变稳定的, 如图 4(a)(b)所示; 如果折叠图的采样点不完全重合, 系统是慢变不稳定的, 如图 4(c)所示.

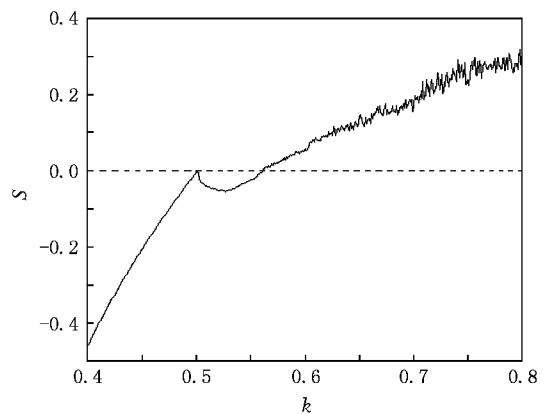


图 6 慢变稳定性指标 S (仿真步长 $k = 0.001$)

3.2.2. 慢变分岔图

为进一步验证慢变稳定性与混沌间的必然联系, 我们连续采样 50 个正弦周期的同一固定位置, 如 $1/2\pi$ 或 $3/2\pi$ 附近(从折叠图看, 峰值位置的不稳定性最强), 画出以比例增益 k 为分岔参数的慢变分岔图(图 7). 从图 7 可以看到, 当 $k < 0.5$ 时, 采样结果重合成一个点, 系统是稳定的周期 1; 当 $0.5 < k$

< 0.57 时, 采样结果变成两个点, 出现了倍周期分岔现象; 当 $k > 0.57$ 时, 出现了采样点在一定区域密集且具有自相似的层次结构——混沌运动。由此可见, 慢变分岔图与慢变稳定性指标 S 的分析结果是基本一致的, 慢变稳定性指标 S 是一个分析这类周期时变系统出现混沌的有效判据。

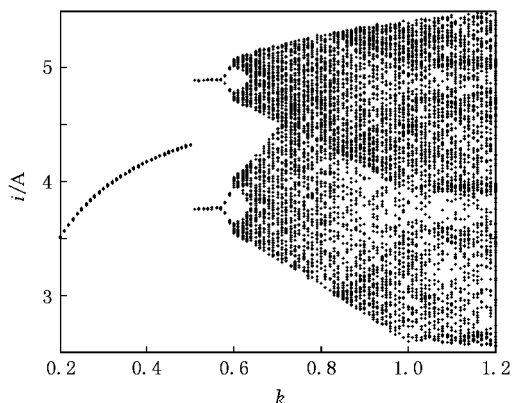


图 7 $\theta = 1/2\pi$ 的慢变分岔图(仿真步长 $k = 0.01$)

为了准确分析混沌的出现位置, 进一步分析其 Lyapunov 指数。根据 Lyapunov 指数定义^[13], 连续计算 1000 个正弦周期, 得到固定点($1/2\pi$)的 Lyapunov 指数, 部分结果列于表 1。从表 1 可以看出, $k = 0.562$ 时, Lyapunov 指数 $L > 0$, 此时混沌出现。这个结果与用慢变稳定性指标 S 得到的混沌出现位置完全符合。显然, 慢变稳定性的计算量(只需计算一

表 1 固定点采样($1/2\pi$)的 Lyapunov 指数

| k | 0.559 | 0.560 | 0.561 | 0.562 | 0.563 | 0.564 |
|------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| L | -4.056 | -4.468 | -1.932 | 3.971 | 5.155 | 7.379 |
| 工作状态 | 周期态 | 周期态 | 周期态 | 混沌态 | 混沌态 | 混沌态 |

个正弦周期)远远小于 Lyapunov 指数的计算量, 对于周期时变系统是一种有效、准确的混沌判别

方法。

3.3. 快变与慢变稳定性的关系

以上采用快变和慢变离散映射, 分析了 H 桥正弦逆变器出现了倍周期分岔和混沌现象, 同时, 快变和慢变稳定性之间存在以下联系:

1) 快变稳定性是严格的稳定性, 揭示了系统的精细而完全的动力学行为。

2) 慢变稳定性是系统出现混沌的有效判据, 描述了系统粗糙和整体的动力学行为。

3) 若系统是快变稳定, 则必然也是慢变稳定的。

4) 若系统是慢变不稳定, 则快变也一定是不稳定的。

4. 结 论

H 桥正弦逆变器在工程实践中得到了广泛的应用, 以往研究总是试图采用各种线性化的方法来分析系统, 而忽视其非线性行为, 对其非线性动力学行为至今都没有进行深入探索。本文研究了比例控制下一阶 H 桥正弦逆变电路的非线性动力学行为, 指出在该系统中同时存在快变和慢变不稳定及混沌行为。建立了系统的快变和慢变非线性离散模型, 提出了变参数非线性离散系统通用的慢变平衡点和慢变稳定性概念, 进一步指出慢变不稳定是分析这类时变系统混沌现象的有效方法。本文的研究还将开关变换器的非线性研究从直流变换器扩展到正弦逆变电路, 揭示了其不稳定现象及产生机理, 是非线性研究在电力电子领域中的一个重要突破, 对 H 桥正弦逆变器的工程设计也有重要的指导意义。

[1] Zhang B, Qi Q 2002 *Proc. CSEE* **22** 18 (in Chinese) [张波、齐群 2002 中国电机工程学报 **22** 18]

[2] Orabi M, Ninomiya T 2003 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **50** 1116

[3] Wong S C, Tse C K, Orabi M, Ninomiya T 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **53** 454

[4] Dai D, Li S, Ma X, Tse C K 2007 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **54** 1724

[5] Wu X, Tse C K, Dranga O, Lu J 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **53** 204

[6] Lu H H C, Zhou Y, Tse C K 2003 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **31** 611

[7] Zou J, Ma X, Tse C K, Dong D 2006 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **34** 251

[8] Wang F, Zhang H, Ma X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1522 (in Chinese) [王发强、张浩、马西奎 2008 物理学报 **57** 1522]

[9] Zhang H, Ma X, Xue B, Liu W 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 431

[10] Wu X, Tse C K, Wong S C, Lu J 2006 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **34** 341

[11] Mazumder S K, Nayfeh A H, Boroyevich D 2003 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **18** 1063

[12] Mazumder S K, Nayfeh A H, Boroyevich D 2001 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **16** 201

[13] Lü J H , Lu J A , Chen S H 2002 *Analysis and Applications of Chaos Time Series* (Wuhan : Wuhan University Press) p47 (in Chinese)

[吕金虎、陆君安、陈士华 2002 混沌时间序列的分析及其应用 (武汉 武汉大学出版社) 第 47 页]

The fast- and slow-scale stabilities and chaotic motion of H-bridge sine inverter^{*}

Wang Xue-Mei^{1)2)†} Zhang Bo¹⁾ Qiu Dong-Yuan¹⁾

1) (College of Electric Power , South China University of Technology , Guangzhou 510640 , China)

2) (College of Electrical and Information Engineering , Hunan University of Technology , Zhuzhou 412008 , China)

(Received 30 July 2008 ; revised manuscript received 5 September 2008)

Abstract

Sine inverter is a time varying nonlinear system , for which two scales , namely the fast and slow-scale , can be used to analyse its stability . Based on this , fast- and slow-scale discrete model of H-bridge sine inverter under proportional control are derived respectively . For the fast-scale stability , folded diagram and spectrum analysis are introduced . For the slow-scale stability , slow-scale fixed points and a theorem of slow-scale instability of a discrete-time periodically varying system are proposed . It is shown that slow-scale instability is an effective criterion for chaos motions of discrete-time periodically varying system . Research shows that proposed methods can be used to analyse the fast- and slow-scale instability and chaotic behavior of H-bridge sine inverter .

Keywords : discrete-time periodically varying system , H-bridge sine inverter , fast-scale instability , slow-scale instability

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60474066) , the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No. 8251064101000014) and the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2007AA05Z229) .

[†] E-mail : wang.xuemei@mail.scnt.edu.cn