

腔壁弹性对水下小型圆柱形亥姆霍兹 共振器共振频率的影响^{*}

王泽锋[†] 胡永明 熊水东 罗 洪 孟 洲 倪 明

(国防科学技术大学光电科学与工程学院,长沙 410073)

(2008 年 10 月 8 日收到 2008 年 12 月 4 日收到修改稿)

理论和实验研究了腔壁弹性对水下小型圆柱形亥姆霍兹共振器共振频率的影响. 基于电-声类比理论, 建立了小型共振器的简化模型. 利用电路分析方法得到了便于计算的共振频率一般表达式. 分别仿真分析了共振器壁厚和材料对共振频率的影响, 得到了不同尺寸的小型共振器的近似刚性条件. 在充水驻波罐中对不同壁厚、不同材料的小型圆柱形亥姆霍兹共振器的共振频率进行了测量, 实验结果较好地验证了理论分析和近似刚性条件的正确性. 所得结果对小型圆柱形亥姆霍兹共振器的设计和水下应用具有较好的参考价值.

关键词: 亥姆霍兹共振器, 共振频率, 传递函数, 辐射阻抗

PACC: 4320, 4330, 4350

1. 引 言

由于亥姆霍兹共振器具有结构简单、声学特性显著等特点, 被广泛用于各种空气噪声的控制和消除^[1-4]. 最近, 为了解决光纤水听器阵列的高频混叠问题, 我们将其用于构成机械抗混叠滤波光纤水听器, 并取得了一定的效果^[5, 6]. 但是, 目前的理论分析和实验都是基于壁面刚性假设的, 没有考虑壁面弹性对其声学特性的影响. 实际上, 在水中当壁面不是很厚时, 共振器壁面的形变与液体的压缩性可以相比拟, 必须考虑壁面弹性的影响^[7-12]. 共振频率是亥姆霍兹共振器最重要的特性参数, 如何精确计算共振频率一直是研究的热点^[13-19]. 我们曾基于电-声类比理论, 建立了水下圆柱形亥姆霍兹共振器的低频集中测量模型, 利用电路分析方法对其声学特性进行了详细的理论研究^[20]. 但是, 由于模型考虑的因素很多, 共振频率与各参量的关系非常复杂, 无法给出一个便于计算的具体表达式, 也没有对仿真分析得到的共振器近似刚性条件进行实验验证.

本文基于文献 [20] 的研究结果, 对水下小型圆

柱形亥姆霍兹共振器的低频集中参量模型进行简化, 得到了简化的等效电路图. 利用电路分析方法给出了一个通用的便于计算的水下小型圆柱形亥姆霍兹共振器的共振频率表达式. 理论和实验研究了共振器腔壁厚度和材料对共振频率的影响, 得到了一些对于圆柱形亥姆霍兹共振器的设计和应用有指导意义的结论. 在充水驻波罐中对自制的亥姆霍兹共振器的共振频率进行了测试, 实验结果较好地验证了理论分析的正确性.

2. 理 论

基于电-声类比理论, 我们曾建立了图 1(a)所示的水下圆柱形亥姆霍兹共振器的低频集中参量模型, 并对各部分的等效声阻抗进行了详细的理论推导. 结果表明, 当声波频率 ω 较低且共振器结构尺寸较小时, 有 $\omega^2 M_{Ca} C_{Ca} \ll 1$, R_{rp} , ωM_{rp} , $\omega M_p \ll 1/(\omega C_p)$, R_{rcy} , ωM_{rcy} , $\omega M_{cy} \ll 1/(\omega C_{cy})$ ^[20], 其中 C_{Ca} 和 M_{Ca} 是腔体的声容和声质量, C_p , M_p , R_{rp} 和 M_{rp} 分别是端面圆板的弹性声容、弹性声质量、辐射声阻和辐射声质量, C_{cy} , M_{cy} , R_{rcy} 和 M_{rcy} 分别是圆柱壳的弹

^{*} 国家高技术研究发展计划(批准号:2006AA09Z121)、教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号:NCET-06-0925)和国防科学技术大学优秀研究生科技创新基金(批准号:0623)资助的课题.

[†] E-mail: hotrosemaths@163.com

性声容、弹性声质量、辐射声阻和辐射声质量。由此可知,腔体、端面圆板和侧面柱壳低频时主要表现为容性,其声阻抗可分别用一个等效声容来表示,而等效声质量和共振器壁面的辐射声阻抗可以忽略。因此,可以得到水下小型圆柱形亥姆霍兹共振器的简化低频集中参量模型,对应的声学等效电路如图 1(b)所示。图 1 中 p_1 和 p_2 分别是开口处和腔内的声压; C_{P1} 和 C_{P2} 分别是两端面的等效声容; R_a 和 M_a 是分别小孔的声阻和声质量。

别是柱面内径、长度和厚度; h 是圆板厚度(两端面厚度相同); ρ 和 c 分别为水的密度和水中声速; E 和 σ 分别是共振器材料的杨氏模量和泊松比。

将(3)(4)式代入(2)式可得小型圆柱形亥姆霍兹共振器共振器的一般表达式为

$$\omega_0 = \frac{\omega_{\text{rigid}}}{\sqrt{1 + \frac{R}{L} \left[\alpha \left(\frac{R}{h} \right)^3 + \beta \frac{L}{t} - \gamma \left(\frac{R}{t} \right)^{1/2} \right]}} \quad (5)$$

式中 $\omega_{\text{rigid}} = c [S(V l_c)]^{-1/2}$ 是刚性壁面时的共振频率, S 和 V 分别为小孔面积和腔体体积, $l_c = l + 1.7a$ 是小孔的有效长度,系数 α 、 β 、 γ 分别为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\chi(1 - \sigma^2)\rho c^2}{16E}, \\ \beta &= \frac{2\rho c^2}{E}, \\ \gamma &= \frac{4\rho c^2}{E[\chi(1 - \sigma^2)]^{1/4}}. \end{aligned} \quad (6)$$

表 1 材料的力学常数表

材料	密度 $\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	杨氏模量 $E/10^{10}\text{Pa}$	泊松比 σ
钢	7800	21.60	0.30
铜	8900	12.30	0.35
铝	2700	6.85	0.34
有机玻璃	1200	0.40	0.35

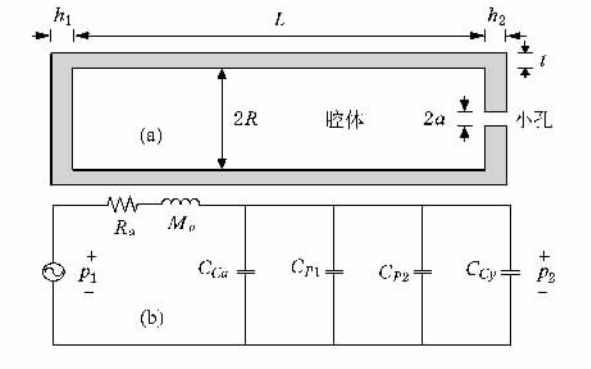


图 1 水下小型圆柱形亥姆霍兹共振器 (a) 结构示意图 (b) 声学等效电路图

在图 1(b)中,利用电路分析方法可得系统的声压传递函数为

$$T(j\omega) = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{1 + j\omega R_a C_{\text{eff}} - \omega^2 M_a C_{\text{eff}}}, \quad (1)$$

式中 $C_{\text{eff}} = C_{Ca} + C_{Cy} + C_{P1} + C_{P2}$ 是腔体总的等效声容。由于系统的损耗很小,共振频率由方程 $1 - \omega^2 M_a C_{\text{eff}} = 0$ 确定为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{M_a(C_{Ca} + C_{P1} + C_{P2} + C_{Cy})}}. \quad (2)$$

当共振器的结构尺寸较小且壁面厚度比柱面长度小得多时,(2)式中各参量的低频表达式可分别写成^[20,21]

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{\rho(l + 1.7a)}{\pi a^2}, \\ C_{Ca} &= \frac{\pi R^2 L}{\rho c^2}, \\ C_P &= \frac{\pi R^6(1 - \sigma^2)}{16Eh^3} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} C_{Cy} &= \frac{2\pi LR^3}{Et} \left(1 - \frac{2}{\beta L} \right), \\ \beta L &= [\chi(1 - \sigma^2)]^{1/4} \frac{L}{\sqrt{Rt}}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 l 和 a 分别是小孔的长度和半径; R 、 L 和 t 分

别是柱面厚度、长度和厚度; h 是圆板厚度(两端面厚度相同); ρ 和 c 分别为水的密度和水中声速; E 和 σ 分别是共振器材料的杨氏模量和泊松比。将(3)(4)式代入(2)式可得小型圆柱形亥姆霍兹共振器共振器的一般表达式为

由(5)式可知,只有当共振器的各壁面(包括端面和柱面)厚度都趋于无穷大时共振频率 ω_0 才等于刚性壁面时的值 ω_{rigid} ,因此实际上 ω_0 总是小于 ω_{rigid} 。利用(5)式分别仿真了不同柱面半径、柱面长度和共振器材料时壁面厚度对共振频率的影响,如图 2—4 所示。图 2—4 中的(a)和(b)分别为柱面厚度 t 和端面圆板厚度 h 对共振频率的影响。仿真结果中,柱面半径 $R = 10\text{ mm}$ (图 2 除外),柱面长度 $L = 80\text{ mm}$ (图 3 除外)(a)图中 $h = 4\text{ mm}$ (b)图中 $t = 4\text{ mm}$ 。水的密度 $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$,水中声速 $c = 1500\text{ m/s}$ 。各种共振器材料的力学参量如表 1 所列,图 2 和图 3 对应的材料为铝。

从图 2(a)可见,若其他参量不变,共振频率随着柱面厚度的变大而增加。当柱面厚度小于 2 mm 时,共振频率随着厚度的增加而迅速增大;当厚度达到 2 mm 以后,共振频率增加的速率变小;当厚度达到 4 mm 以后,共振频率基本上不再受圆柱壳厚度的影响, $\omega_0/\omega_{\text{rigid}}$ 趋近于一个常数。共振器柱面内径不同时,共振频率随柱面厚度的变化具有大致相同的形式,只是 $\omega_0/\omega_{\text{rigid}}$ 趋近的常数不同,常数由(5)式

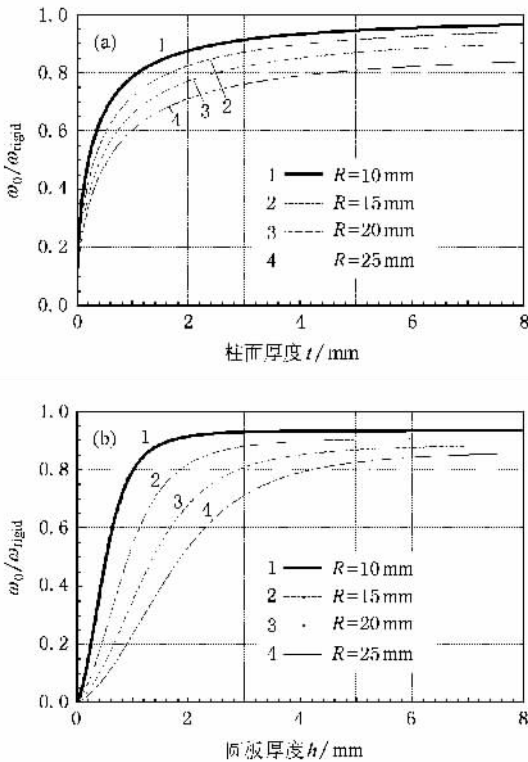


图2 柱面半径 R 不同时壁面厚度对共振频率的影响 (a)随柱面厚度 t 的变化 (b)随端面厚度 h 的变化

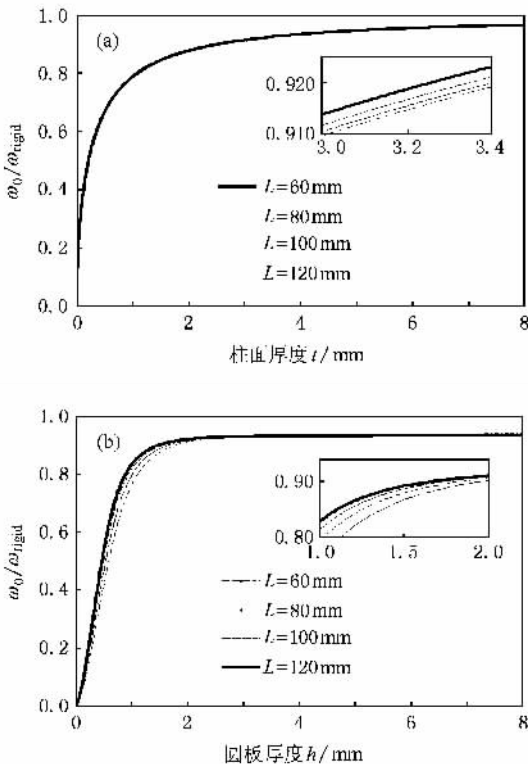


图3 柱面长度 L 不同时壁面厚度对共振频率的影响 (a)随柱面厚度 t 的变化 (b)随端面厚度 h 的变化

确定.从图 2(b)可见,若其他参量不变,共振频率 ω_0 随着端面厚度 h 的变大而增加.当 h 较小时,共振频率与 h 近似呈线性关系,随着 h 的进一步变大,共振频率增加的速度逐渐变小,最后趋近于一个常数.当柱面厚度 t 不变时,共振频率 ω_0 随 h 的变化形式受柱面内径 R 的影响较大,随着 R 的增大,近似线性区的范围和圆板的近似刚性厚度都以大致相同的倍数增加.如图 2(b)所示, $R=10, 15, 20, 25$ mm 时,对应的线性区分别约为 1, 1.5, 2, 2.5 mm, 近似刚性厚度分别约为 2, 3, 4, 5 mm.

从图 3 可见,柱面长度 L 对共振器的壁面弹性贡献很小,当改变 L 时,相对共振频率 $\omega_0/\omega_{\text{rigid}}$ 随壁面厚度的变化曲线基本不变,只有将曲线局部放大之后才能看到它们的细微区别,如内插图所示.从图 2(a)可见,当小于 2 mm 时,柱面厚度对共振频率影响很大,随着厚度的增大共振频率增加的速率逐渐变缓,当达到 4 mm 以后,共振频率基本上不再受圆柱壳厚度的影响.从图 3(b)可见,当 h 小于 1 mm 时,共振频率随着圆板厚度的增大迅速往高频方向移动,与 h 近似呈线性关系,随着 h 的进一步变大,共振频率增加的速度逐渐变小,当 h 大于 2 mm 后, $\omega_0/\omega_{\text{rigid}}$ 趋近于一个常数.

从图 4 可见,由于金属材料的杨氏模量 E 和泊松比 σ 相差不大,因此由它们构成的共振器的特性比较接近.三种金属材料中,由于钢的杨氏模量最大,因此相应的共振频率高于铜和铝对应的值.有机玻璃的泊松比与金属相当,但杨氏模量比金属小一到两个数量级,因此它构成的共振器特性与金属相差很大,从图 4 可见,有机玻璃对应的共振频率比金属材料对应的值小得多.

3. 实 验

为了验证上述理论分析,我们设计了图 5 所示的驻波罐测试系统.文献 [20] 的实验结果及分析表明,压电水听器对测量结果的影响很大.因此,为了尽量减少实验误差,本文使用了两个声压相位灵敏度均为 -183 dB (0 dB = 1 rad/ μ Pa) 的芯轴结构 Michelson 干涉型光纤水听器取代压电水听器进行测量,由于灵敏度很低,光纤水听器的等效声容比腔体的声容小得多^[20],对测量的影响可以忽略.两个光纤水听器的频响一致性非常好,在测试频带 50—2500 Hz 上差异在 2 dB 以内,如图 6 所示.

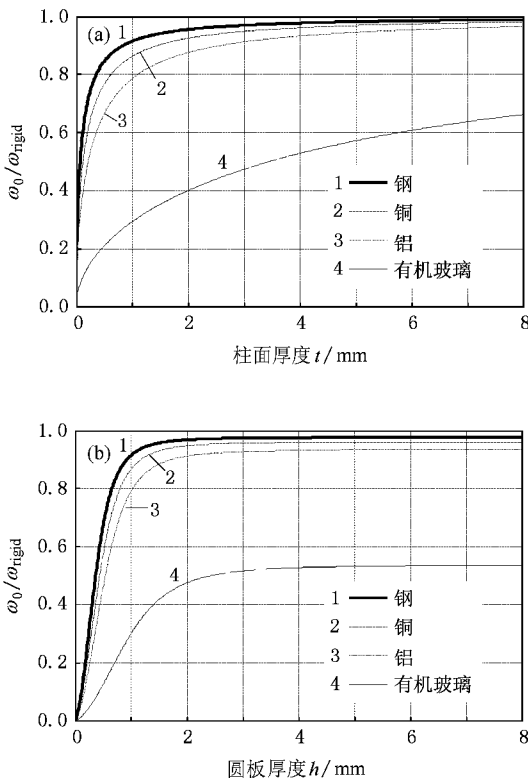


图 4 不同材料时壁面厚度对共振频率的影响 (a) 随柱面厚度 t 的变化 (b) 随端面厚度 h 的变化

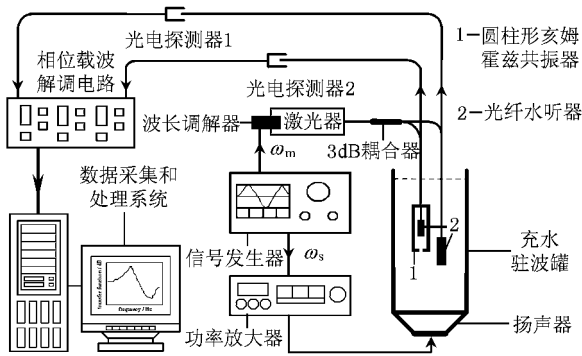


图 5 亥姆霍兹共振器的驻波罐测试系统示意图

光纤水听器信号检测采用基于光源频率调制的相位载波解调方案. 为了提高信噪比, 激发信号采用单频正弦信号. 型号为 AFG3022 的信号发生器(美国 Tektronix 公司生产) 输出频率为 ω_s 的单频连续正弦信号, 经型号为 YE2706 的功率放大器(江苏联能公司生产) 进行功率放大后驱动扬声器, 在驻波罐中产生测量用的准平面声波, 利用 AFG3022 的可编程功能可以实现连续自动测量. 同时, AFG3022 型信号发生器输出一个频率为 ω_m 的正弦信号到光源的波

长调节器用以产生解调用的载波信号. 光源输出的激光经一个 3 dB 耦合器分成两路, 分别进入两个测量光纤水听器的输入光纤. 在声波的作用下光纤水听器产生受到调制的干涉信号, 分别经光电探测器 1 和 2 转换成电压信号, 并输送到相位载波解调器进行信号解调. 解调得到的两路声信号同时经数据采集系统输送到计算机进行傅里叶变换、数字滤波、传递函数和共振频率的计算等相关处理. 本实验采用了比较测量方法, 由于位于共振器外面的光纤水听器的声中心与小孔位于同一深度, 因此可以认为它测得的声压等于共振器开口处的声压, 利用位于共振器里面的光纤水听器可测得腔内的声压, 二者相比即可得到圆柱形亥姆霍兹共振器的声压传递函数.

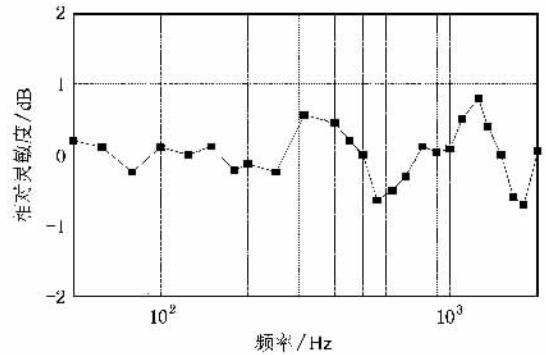


图 6 实验中使用的两个光纤水听器的一致性测量结果

我们设计并制作了 11 个不同壁厚的小型圆柱形亥姆霍兹共振器, 其中铝的 7 个, 钢的 3 个, 有机玻璃的 1 个, 所有共振器均具有相同的内半径 R 、内长度 L 、小孔长度 l 和半径 a , 且 $R = 10 \text{ mm}$, $L = 80 \text{ mm}$, $l = 2 \text{ mm}$, $a = 0.8 \text{ mm}$, 对应的刚性共振频率 ω_{rigid} 均为 1165 Hz. 在图 5 所示的实验系统中对它们的共振频率进行了测量, 并与理论结果进行了比较, 如图 7 所示, 其中粗实线、短划线和细实线分别为钢、铝和有机玻璃三种材料的共振器对应的理论曲线, 空心圆圈、方块、三角形标注的点为测量结果, 分别对应钢、铝和有机玻璃三种材料的共振器. 图 7 (a) 对应的端面厚度 $h = 2 \text{ mm}$, 图 4 (b) 对应的柱面厚度 $t = 4 \text{ mm}$.

从图 7 可见, 测量结果与理论曲线具有大致相同的变化趋势, 随着腔壁厚度的增加共振频率的变化速度逐渐变缓. 图 7 (a) 中正方形标注的 4 个点分别对应铝柱面厚度 $t = 0.6, 2.0, 4.0, 5.0 \text{ mm}$, 相应的共振频率测量值分别为 435, 805, 954, 975 Hz, 圆

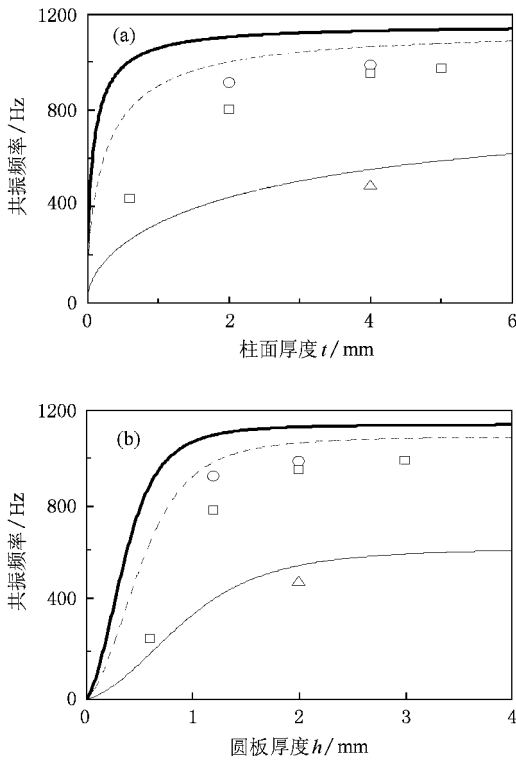


图7 共振频率的测量结果与理论值的比较 (a)改变柱面厚度 t (b)改变端面厚度 h

圈标注的2个点分别对应钢柱面厚度 $t = 2.0, 4.0$ mm, 相应的共振频率测量值分别为 915, 988 Hz. 图 7(b)中正方形标注的4个点分别对应铝端面厚度 $h = 0.6, 1.2, 2.0, 3.0$ mm, 相应的共振频率测量值分别为 250, 785, 954, 990 Hz; 圆圈标注的2个点分别对应钢柱面厚度 $h = 1.2, 2.0$ mm, 相应的共振频率测量值分别为 925, 988 Hz. 有机玻璃共振器的柱面厚度 $t = 4$ mm, 端面厚度 $h = 2.0$ mm, 共振频率为 485 Hz, 比相同结构尺寸的钢和铝共振器的共振频率低得多. 由此可见, 相同结构尺寸时钢质共振器的共振频率最高, 铝的次之, 有机玻璃的最小, 与理论

结果一致. 所有共振频率的测量值都小于理论值, 引起这种偏差的主要原因可能有以下三个方面: 其一, 简化模型只考虑了腔体和壁面的等效声容, 而忽略了它们的等效声质量, 因此系统实际的等效声质量要大于 M_a , 由(2)式可知共振频率与声质量成反比, 这使得实际的共振频率要小于其理论值. 其二, 简化模型忽略了光纤水听器的弹性, 实际上由于传感轴表面有一层很薄的弹性材料, 可以用一个等效声容来描述^[22], 使得系统实际的等效声容比理论值大, 同样由(2)式可知实际的共振频率要小于其理论值. 其三, 测量中光纤水听器的输入输出光纤使得共振器小孔的有效直径变小, 由(3)式可知小孔的声质量与孔径成反比, 因此共振频率与孔径成正比, 孔径的减小同样使得实际的共振频率小于对应的理论值.

4. 结 论

基于已报道的研究结果, 对水下小型圆柱形亥姆霍兹共振器的低频集中参量模型进行了简化, 得到了便于计算的共振频率一般表达式, 该表达式还可用于计算圆柱形亥姆霍兹共振器在其他液体中的共振频率. 理论和实验研究了共振器壁面厚度对共振频率的影响, 结果表明, 当壁厚较小时它对共振频率的影响非常大, 随着厚度的增加影响逐渐变小, 最后共振频率趋近于一个常数, 不再受壁厚的影响. 特别是对于柱面长度和内径分别为 80 和 20 mm 的共振器, 当柱面厚度大于 4 mm 且端面厚度大于 2 mm 时, 共振频率基本与腔壁厚度无关, 此时可近似认为共振器是刚性的. 此近似刚性条件为基于圆柱形亥姆霍兹共振器的机械抗叠滤波光纤水听器的设计提供了重要的理论基础. 本文的研究结果对于小型水下圆柱形亥姆霍兹共振器的设计和应用具有很好的参考价值.

[1] Cheng L Q 1992 *Phys. Bull.* **11** 37 (in Chinese) [陈立群 1992 物理通报 **11** 37]
 [2] Tang S K, Cheng J S F 1998 *Appl. Acoust.* **53** 193
 [3] Nagaya K, Hano Y, Suda A J 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 289
 [4] Esteve S J, Johnson M E 2005 *J. Sound Vib.* **288** 1105
 [5] Wang Z F, Hu Y M, Meng Z, Ni M 2008 *Opt. Lett.* **33** 37
 [6] Wang Z F, Hu Y M, Meng Z, Luo H, Ni M 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1606
 [7] Cotton J C 1934 *J. Acoust. Soc. Am.* **5** 208

[8] Henriquez T A, Young A M 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **67** 1555
 [9] Photiadis D M 1991 *J. Acoust. Soc. Am.* **90** 1188
 [10] Norris A N, Wickham G 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **93** 617
 [11] Horowitz S B, Nishida T, Cattafesta L N, Sheplak M 2002 *Int. J. Aeroacoust.* **1** 183
 [12] Zhou C G, Liu B L, Li X D, Tian J 2007 *Acta Acoust.* **32** 426 (in Chinese) [周城光、刘碧龙、李晓东、田静 2007 声学学报 **32** 426]
 [13] Ingard U 1953 *J. Acoust. Soc. Am.* **25** 1037

- [14] Panton R L , Miller J M 1975 *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 1533 (in Chinese)[王泽锋、胡永明、孟 洲、倪 明 2008 物理学报 **57** 338]
- [15] Howe M S 1976 *J. Sound Vib* **45** 427
- [16] Chanaud R C 1997 *J. Sound Vib.* **204** 829 [21] Wang Z F , Hu Y M 2008 *Acta Acoust.* **33** 184 (in Chinese)[王泽锋、胡永明 2008 声学学报 **33** 184]
- [17] Selamet A , Ji Z L 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 2360 [22] Wang Z F , Hu Y M , Meng Z , Luo H , Ni M 2008 *Acta Opt. Sin.* **28** 1883 (in Chinese)[王泽锋、胡永明、孟 洲、罗 洪、倪 明 2008 光学学报 **28** 1883]
- [18] Selamet A , Lee I J 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 1975
- [19] Selamet A , Xu M B , Lee I J , Huff N T 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 725
- [20] Wang Z F , Hu Y M , Meng Z , Ni M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 338

Influence of cavity wall elasticity on resonant frequency of small underwater cylindrical Helmholtz resonator^{*}

Wang Ze-Feng[†] Hu Yong-Ming Xiong Shui-Dong Luo Hong Meng Zhou Ni Ming

(College of Photoelectric Science and Engineering , National University of Defense Technology , Changsha 410073 , China)

(Received 8 October 2008 ; revised manuscript received 4 December 2008)

Abstract

Influence of cavity wall elasticity on resonant frequency of small underwater cylindrical Helmholtz resonator is studied theoretically and experimental. Based on the theory of electro-acoustic analogy , the simplified low frequency lumped-parameter model of the Helmholtz resonator is constructed. A general , convenient for calculation expression of the resonant frequency is given by circuit analysis. The influence of the thickness and the material of the resonator on the resonant frequency is investigated by numerical method. And the approximate rigid conditions for small underwater cylindrical Helmholtz resonators of different sizes are given. Small cylindrical Helmholtz resonators of different wall thickness and material were tested in a standing-wave tube filled with water. Experimental results well testified the theoreticl results and the approximate rigid condition. This paper is useful for the design and application of the underwater cylindrical Helmholtz resonators.

Keywords : Helmholtz resonators , resonant frequency , transfer function , radiation impedance

PACC : 4320 , 4330 , 4350

^{*} Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2006AA09Z121) , the Program for the New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education , China (Grant No. NECT-06-0925) and the Science and Technology Innovation Foundation for Graduate Students of National University of Defense Technology , China (Grant No. 0623).

[†] E-mail : hotrosemaths@163.com