

分数阶共轭 Chen 混沌系统中的混沌 及其电路实验仿真^{*}

张若洵^{1)†} 杨世平²⁾

1) 邢台学院初等教育学院, 邢台 054001)

2) 河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

(2008 年 10 月 17 日收到, 2008 年 11 月 3 日收到修改稿)

研究了分数阶共轭 Chen 混沌系统的混沌行为, 给出了分数阶共轭 Chen 系统存在混沌吸引子的必要条件. 并设计了一种传递函数的新电路单元用来实现分数阶共轭 Chen 混沌系统, 利用 Multisim2001 电子工作平台进行了电路实验仿真. 数值模拟和电路实验仿真结果相符, 证实了分数阶共轭 Chen 系统确实存在混沌现象和所设计电路单元的有效性.

关键词: 分数阶, 共轭 Chen 混沌系统, 电路单元, 电路仿真

PACC: 0545

1. 引 言

1963 年, Lorenz 通过计算机仿真实现了第一个混沌吸引子——Lorenz 吸引子^[1]. 1999 年, Chen 等利用反控制的方法发现了一种与 Lorenz 系统对偶的混沌系统, 称为 Chen 系统^[2]. 2002 年, Lü 等相继发现了 Lü 系统和连接以上三个混沌系统的统一混沌系统^[3,4]. Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统有着相似的动力学行为, 但是它们并不是拓扑等价的. 迄今为止, 人们对现有的混沌系统进行了大量的理论研究, 其间, 提出了 Lorenz 系统族^[4]和广义 Lorenz 规范型^[5,6]. 文献 [7] 提出了共轭 Lorenz 型系统和一个统一的 Lorenz 型系统. 近年来, 分数阶混沌系统引起人们广泛的兴趣和深入地研究, 并在 Chua 'a 电路^[8]、Chen 系统^[9,10]、Lü 系统^[11]、Liu 系统^[12,13]和混沌电子振荡器^[14]中, 通过数值仿真, 发现当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象. 以上研究成果促进了混沌理论的研究以及分数阶微积分理论的发展. 共轭 Chen 系统^[7]是一个新型三维自治混沌系统, 属于共轭 Lorenz 型系统, 对其分数阶系统的研

究具有重要的理论意义和实际价值.

本文应用分数阶微积分理论, 研究了分数阶共轭 Chen 混沌系统. 根据分数阶系统稳定理论, 得到了分数阶共轭 Chen 系统存在吸引子的必要条件. 基于波特图的频域近似方法, 设计了实现分数阶 $1/s^\alpha$ 的新单元电路和分数阶共轭 Chen 混沌系统电路, 并给出了数值模拟和电路实验仿真结果.

2. 分数阶共轭 Chen 混沌系统

共轭 Chen 混沌系统^[7]的动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x - a_2y, \\ \dot{y} &= dx - cy + xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\quad (1)$$

这里 $a_1, a_2, b, c, d \in R^+$ 并且 $c > \frac{a_2d}{a_1}$, 取 $a_1 = a_2 = a, d = c - a$ 且 $c > a$ 时, 系统 (1) 可以写成

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x - y), \\ \dot{y} &= (c - a)x - cy + xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\quad (2)$$

当 $a = 28, b = 3, c = 35$ 时, 共轭 Chen 系统 (2) 有一个典型吸引子, 如图 1 所示.

^{*} 河北省自然科学基金 (批准号: A2008000136) 资助的课题.

[†] E-mail: xtzhrx@126.com

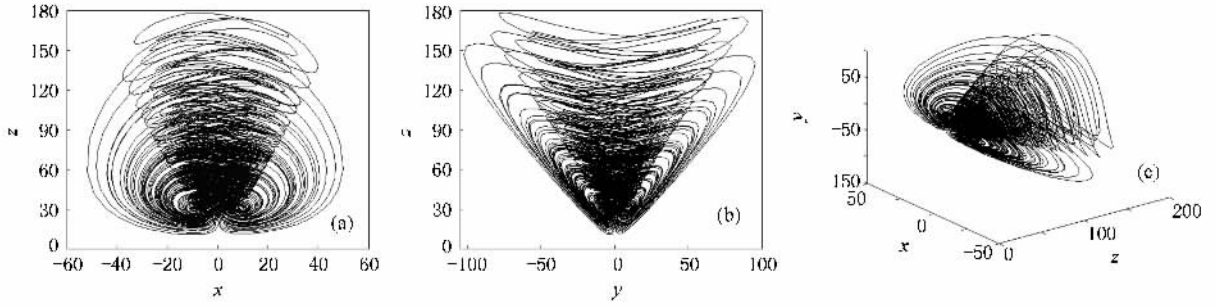


图 1 共轭 Chen 混沌系统(2)典型吸引子 ($a=28, b=3, c=35$) (a) $x-z$ 平面 (b) $y-z$ 平面 (c) $z-x-y$ 空间

现在,我们考虑分数阶共轭 Chen 混沌系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= \alpha(x-y), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= (c-a)x - cy + xz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $0 < \alpha < 1$, 当 $a=28, b=3, c=35$ 时, 系统(3)的三个平衡点和对应的特征值分别为

$$\begin{aligned} S_0(0, 0, 0): \lambda_1 &= 24.7179, \\ \lambda_2 &= -31.7179, \lambda_3 = -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,2}(\pm 2\sqrt{21}, \pm 2\sqrt{21}, 28): \lambda_1 &= -22.2922, \\ \lambda_{2,3} &= 6.1461 \pm 13.1622i. \end{aligned}$$

根据文献 [15], 我们得到, S_0 是指数为 1 的鞍点, $S_{1,2}$ 是指数为 2 的鞍点. 若系统 $\dot{x} = f(x)$ 出现混沌, 则分数阶系统 $d^\alpha x/dt^\alpha = f(x)$ 仍保持混沌的必要条件是平衡点的稳定性保持不变, 也就是说系统指数为 2 的不稳定特征值 λ 满足

$$|\arg(\lambda)| < 0.5\pi\alpha,$$

其中 $\arg(\lambda)$ 表示特征值 λ 的幅角. 即

$$\alpha > \frac{2}{\pi} |\arg(\lambda)|,$$

因此, 分数阶共轭 Chen 系统存在吸引子的必要条件是

$$\begin{aligned} \alpha &> \frac{2}{\pi} |\arg(\lambda)| \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan \frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{\operatorname{Re}(\lambda)} \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan \frac{13.1622}{6.1461} \\ &\approx 0.72. \end{aligned}$$

根据预估-校正法^[16,17], 利用 Matlab 进行数值模拟, $\alpha=0.9$ 和 $\alpha=0.73$ 时的模拟结果分别如图 2 和图 3 所示. 从图中可以看出, 当 $\alpha=0.9$ 和 $\alpha=0.73$, 系统(3)处于混沌状态.

若我们选取 $\alpha=0.71$, 则分数阶共轭 Chen 系统是非混沌的, 指数为 2 的鞍点变为稳定点, 数值模拟结果如图 4 所示.

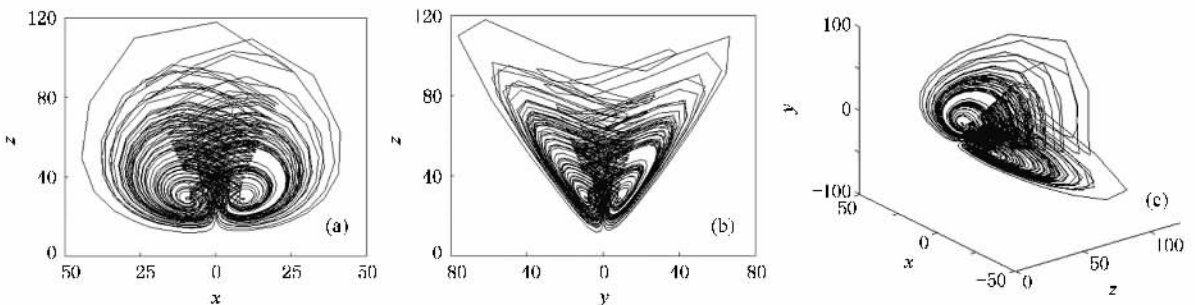


图 2 $\alpha=0.9$ 时的分数阶共轭 Chen 系统的吸引子

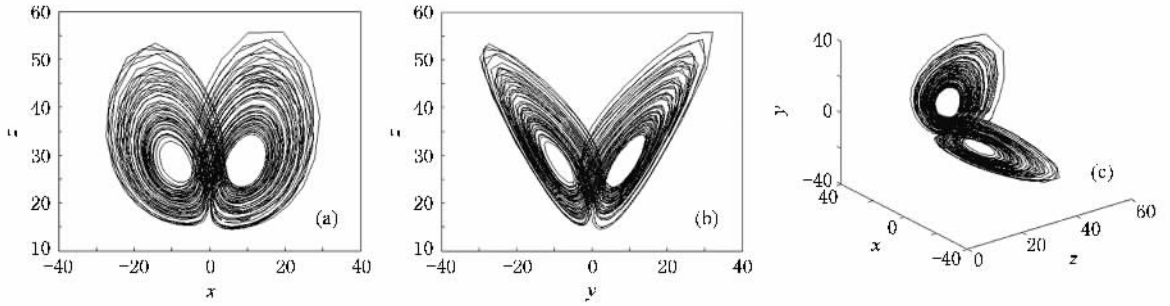


图 3 $\alpha = 0.73$ 时的分数阶共轭 Chen 系统的吸引子

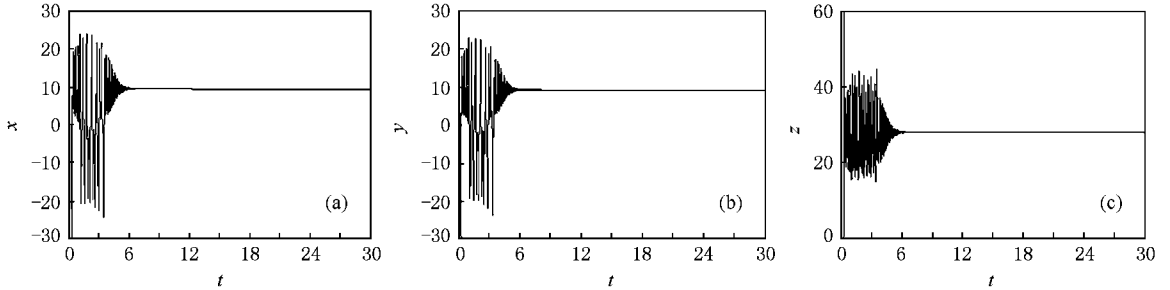


图 4 $\alpha = 0.71$ 时的分数阶共轭 Chen 系统的非混沌状态

3. 分数阶共轭 Chen 混沌系统的电路实现

在分数阶微积分的研究过程中，对微分和积分概念提出了许多种定义，但在应用研究中使用较多的是 Riemann-Liouville (R-L) 定义，R-L 微分定义为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (4)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数， $n-1 \leq \alpha < n$ ， α 为分数， n 为整数。R-L 分数阶微分的拉氏变换为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{\alpha-1-k} f(t)}{dt^{\alpha-1-k}} \right]_{t=0}. \quad (5)$$

若时域函数 $f(t)$ 的初始值均为零，则(5)式可表示为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}. \quad (6)$$

由此 α 阶的分数阶积分算子可转化到频域计算，传递函数为 $H(s) = 1/s^\alpha$ 。由于分数阶微积分的标准定义不能在时域中直接进行分数阶算子的运算，文献 [18] 提出了一种基于波特图的频域近似方法，应用这种方法，文献 [19] 推导出 $1/s^\alpha$ ($\alpha = 0.1-0.9$ ，步长为 0.1) 的近似式(误差 2 dB)，文献 [20] 推导出 $1/s^{0.95}$ 的近似式(误差 1 dB)。本文的传递函数电路单元采用文献 [19-20] 中 $1/s^\alpha$ 的近似式进行设计。

根据电路理论，图 5 中 A 与 B 之间等效电路的复频域可以实现文献 [19-20] 中 $1/s^\alpha$ 的近似式 ($\alpha = 0.1-0.9$ ，步长为 0.1 及 $\alpha = 0.95$)。

选取 $\alpha = 0.9$ 为例设计传递函数单元电路并对分数阶系统 (3) 进行电路实验仿真。根据文献 [19]，可知 $1/s^{0.9}$ 的近似式为

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{2.267(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}. \quad (7)$$

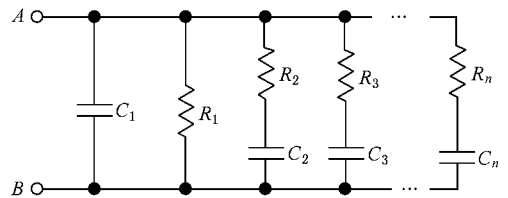


图 5 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 的单元电路

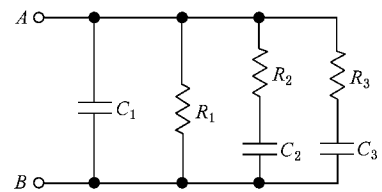


图 6 分数阶 $\frac{1}{s^{0.9}}$ 的单元电路

当 $\alpha = 0.9$ 时，电路单元如图 6 所示。图 6 中 A 和 B 之间的传递函数 $H(s)$ 为

$$\begin{aligned}
 H(s) &= R_1 // \frac{1}{sC_1} // \left(R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) // \left(R_3 + \frac{1}{sC_3} \right) \\
 &= \frac{\frac{1}{C_0} \cdot \frac{C_0}{C_1} \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right)}{s^3 + \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) R_3 C_3 + R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3} s^2 + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_3 + R_3 C_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3} s + \frac{1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 C_0 为单位参数, 令 $C_0 = 1 \mu\text{F}$, $F(s) = H(s) \cdot C_0 = \frac{1}{s^{0.9}}$. 将(8)式与(7)式相比较, 可得图6所示电路单元的电阻电容值为 $R_1 = 63.10 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 1.598 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 0.01581 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 0.4410 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.4870 \mu\text{F}$, $C_3 = 0.2937 \mu\text{F}$. 同理, 当 $\alpha = 0.1 \sim 0.8$ (步长为 0.1) 和 $\alpha = 0.95$ 时, 可以得到分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 的电路单元电阻、电容值分别如表1、表2所示.

根据分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 的电路单元, 运用电路理论和文献[21, 22]的电路设计方法, 我们设计了实现 2.7 阶分数阶共轭 Chen 混沌系统的电路, 如图7所示. 其

中, AD633 是乘法器, LM741 为运算放大器, $R_1 = 63.10 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 1.598 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 0.01581 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 0.4410 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.4870 \mu\text{F}$, $C_3 = 0.2937 \mu\text{F}$, $R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 28 \text{ k}\Omega$, $R_7 = R_{15} = R_{17} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_8 = R_{15} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_9 = 14.3 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = 2.86 \text{ k}\Omega$, $R_{13} = R_{14} = R_{19} = R_{20} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{18} = 33.3 \text{ k}\Omega$. 利用 Multisim 2001 对 2.7 阶分数阶共轭 Chen 混沌系统进行电路仿真, 得相图如图8所示. 由于 Multisim 2001 电子工作平台采用的是实际电路元件模型, 所以其仿真实验与实际实验应该是基本符合的. 由图8和图2可以看出, 电路实验仿真结果与数值模拟结果是基本相符的. 所以电路实验仿真结果是有效的.

表1 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 电路单元电阻值(2 dB)

α	n	$R_1/\text{M}\Omega$	$R_2/\text{M}\Omega$	$R_3/\text{M}\Omega$	$R_4/\text{M}\Omega$	$R_5/\text{M}\Omega$	$R_6/\text{M}\Omega$
0.95 (1 dB)	3	694.6	32.82	0.3260			
0.9	3	63.10	1.598	0.01581			
0.8	5	39.80	9.839	0.9330	0.09319	0.009555	
0.7	6	25.13	9.793	2.860	0.5600	0.1215	0.02776
0.6	6	15.85	12.32	3.500	1.091	0.3486	0.1203
0.5	6	9.997	9.694	3.467	1.363	0.5494	0.2434
0.4	6	6.310	7.026	2.990	1.375	0.6461	0.3351
0.3	5	3.983	4.908	2.401	1.248	0.7100	
0.2	4	2.512	3.394	1.865	1.104		
0.1	3	0.5849	2.382	1.432			

表2 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 电路单元电容值(2 dB)

α	n	$C_1/\mu\text{F}$	$C_2/\mu\text{F}$	$C_3/\mu\text{F}$	$C_4/\mu\text{F}$	$C_5/\mu\text{F}$	$C_6/\mu\text{F}$
0.95 (1 dB)	3	0.7794	0.2699	0.2133			
0.9	3	0.4410	0.4870	0.2937			
0.8	5	0.1884	0.7619	0.4520	0.2545	0.1396	
0.7	6	0.1068	1.5834	0.6048	0.3448	0.1770	0.08660
0.6	6	0.09261	1.749	0.9036	0.4254	0.1954	0.08311
0.5	6	0.06310	2.591	1.148	0.4631	0.1820	0.06510
0.4	6	0.02818	3.715	1.281	0.4091	0.1277	0.03616
0.3	5	0.02512	4.898	1.117	0.2399	0.04704	
0.2	4	0.01259	5.239	0.5362	0.05094		
0.1	3	0.0006310	2.517	0.02509			

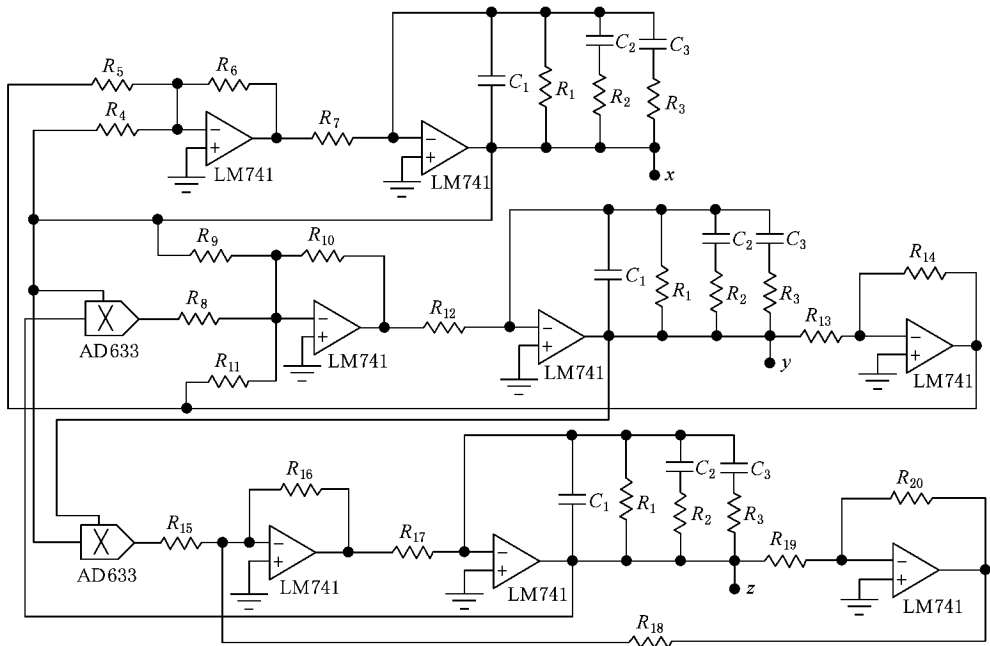


图 7 2.7 阶分数阶共轭 Chen 混沌系统的电路原理图

把图 7 中的 $\alpha = 0.9$ 的单元电路换用 $\alpha = 0.7$ 的单元电路对 2.1 阶分数阶共轭 Chen 系统进行电路仿真, 结果如图 9 所示, 表明系统处于非混沌状态。

通过上述理论分析和仿真实验验证, 证实了分数阶共轭 Chen 系统中的确存在混沌, 存在混沌的最低阶为 2.19。且能用分数阶电路来实现。

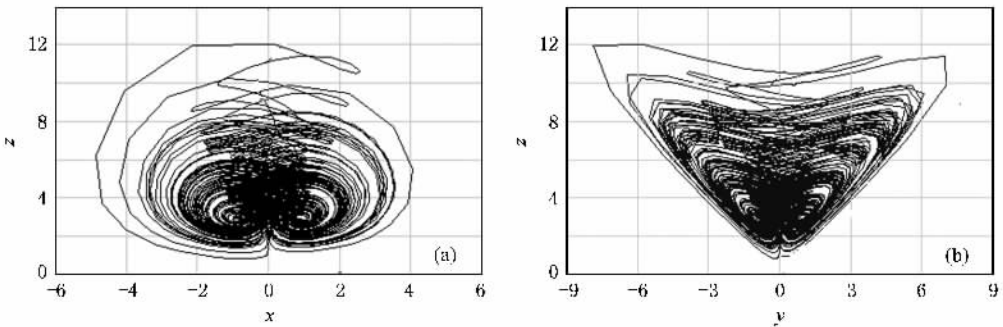


图 8 2.7 阶分数阶共轭 Chen 混沌系统的 Multisim2001 实验仿真相图

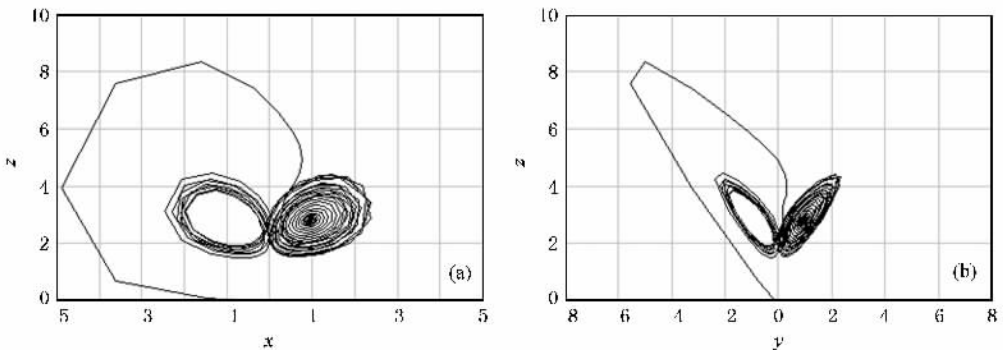


图 9 2.1 阶分数阶共轭 Chen 系统的 Multisim2001 实验仿真相图(非混沌状态)

4. 结 论

本文研究了分数阶共轭 Chen 系统中的混沌行为,得到了分数阶共轭 Chen 系统存在吸引子的必要条件. 基于波特图的频域近似方法,设计了新的单元电路实现了分数阶共轭 Chen 混沌系统. 所设

计的分阶单元电路中的电容值较已有单元电路^[21, 22]中的电容值小,易于集成,工程上具有较高的实用价值. 数值模拟和电路实验仿真结果证实了分数阶共轭 Chen 系统中确实存在混沌和所设计电路单元的有效性. 此外,本文所提出的电路单元具有普适性,可用于其他分数阶混沌系统和超混沌系统的电路实现当中.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 113
- [2] Chen G R, Ueta T Y 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovskiy S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [5] Celikovskiy S, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1789
- [6] Celikovskiy S, Chen G R 2005 *Chaos Solitons and Fractals* **26** 1271
- [7] Yang Q G, Chen G R, Zhou T S 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 2855
- [8] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [9] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **22** 549
- [10] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos Solitons and Fractals* **27** 685
- [11] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [12] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese)
- [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [13] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [14] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [15] Mohammad S T, Mohammad H 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102
- [16] Diethelm K, Ford N J, Freed A D 2002 *Nonlinear Dynamics* **29** 3
- [17] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Soliton and Fractals* **22** 443
- [18] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, Onaral B 1992 *IEEE Trans. Auto. Control.* **37** 9
- [19] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Soliton and Fractals* **16** 339
- [20] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [21] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [22] Chen X R, Liu C X, Wang F Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1664

Chaos in the fractional-order conjugate Chen system and its circuit emulation^{*}

Zhang Ruo-Xun^{1)†} Yang Shi-Ping²⁾

¹⁾ College of Elementary Education, Xingtai University, Xingtai 054001, China)

²⁾ College of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

(Received 17 October 2008 ; revised manuscript received 3 November 2008)

Abstract

This paper studies the chaotic behaviors of the fractional-order conjugate Chen system. The necessary condition for the existence of chaotic attractors in the fractional-order conjugate Chen chaotic system is obtained. Furthermore, a new circuit unit is proposed to realize the fractional-order chaotic system. The results between numerical emulation and circuit experimental simulation are in agreement with each other and prove that chaos actually exists in the fractional-order conjugate Chen system.

Keywords : fractional-order, conjugate Chen chaotic system, circuit unit, circuit emulation

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2008000136).

[†] E-mail : xtzhrx@126.com