

单频外激励弹簧摆的鞍结分岔控制^{*}

萧 寒¹⁾ 唐驾时²⁾ 梁翠香²⁾

1) 宁波大学建筑工程与环境学院, 宁波 315211)

2) 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

(2008 年 9 月 20 日收到, 2008 年 10 月 31 日收到修改稿)

对弹簧摆的振动幅值控制进行研究, 设计了反馈控制器, 对弱非线性系统用近似解析方法求出了控制系统的幅值控制方程, 得到了控制参数与幅值的函数关系, 使多自由度非线性系统的鞍结分岔得到控制. 这项工作可以推广到其他多自由度非线性系统的分岔控制.

关键词: 外激励弹簧摆, 鞍结分岔, 振动幅值, 反馈控制

PACC: 0547, 1120D

1. 引 言

混沌控制和分岔控制的研究成果日益增多^[1-3], 关于鞍结分岔的研究报告也逐日增加^[4-9], 然而针对多自由度非线性系统的鞍结分岔控制的研究成果却依旧很少. 分岔泛指动力学系统中当控制参量改变并经过某些临界值时, 其相图发生拓扑结构上的突变, 即系统的性态发生了突变. 一般静态分岔有三种基本形式: 叉形分岔、跨临界分岔以及鞍结分岔^[10]. 鞍结分岔可使一个平衡态分岔转变为一个稳定态和一个不稳定态, 例如可以出现一对周期相同的轨道, 其中一条是稳定的, 另一条是不稳定. 它是一种常见的静态分岔类型. 在一些工程问题中, 由于某些非线性因素的存在, 会产生鞍结分岔, 导致“跳跃”等破坏性动力学行为的出现, 给工程结构带来极大的危害. 研究鞍结分岔, 特别是研究鞍结分岔的控制, 不仅对突变理论等其他非线性领域的相关学科的深入研究有重大作用, 对实际工程更具有重要的理论意义和应用价值. 本文研究一个添加单频外激励的弹簧摆系统, 对系统的振动幅值进行分析并采用反馈控制方法加以控制, 得到了一些有益的结论, 在分岔控制的理论和应用上都有一定的研究价值, 对现有的鞍结分岔理论作了补充.

2. 多自由度平方非线性系统的鞍结分岔与控制

摆动弹簧的自由运动可以用一个二自由度含平方非线性项的方程组表示^[11], 给这个系统添加一个外激励. 讨论单频外激励的情况, 即对于所讨论问题有如下系统:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= -2\hat{\mu}_1 \dot{u}_1 + u_1 u_2 + F_1 \cos(\Omega t + \tau_1), \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= -2\hat{\mu}_2 \dot{u}_2 + u_1^2 + F_2 \cos(\Omega t + \tau_2), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\omega_2 > \omega_1$. 可知系统(1)有跳跃现象, 即存在鞍结分岔, 如图 1 所示.

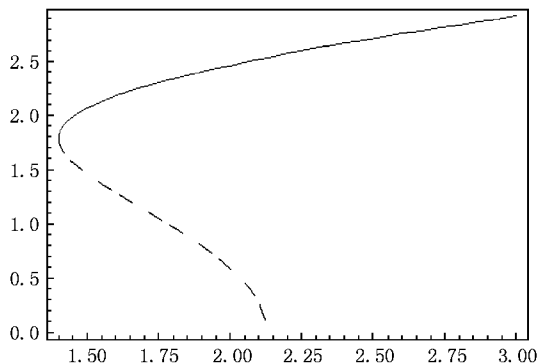


图 1 系统(1)的振幅随外激励发生跳跃现象

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10672053)资助的课题.

图 1 中点划线所示部分为不稳定扰动,实线所示的为稳定扰动.这种现象在实际中可能产生极大危害,应该设法避免或减轻.这里讨论系统(1)的振动幅值问题,可以通过设计一个反馈控制器对鞍结分岔加以控制,以达到对振幅的控制效果.

用多尺度法对方程(1)进行摄动求其一次近似解^[12],令

$$u_1 = \epsilon u_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \dots, \quad (2)$$

$$u_2 = \epsilon u_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \dots,$$

其中 ϵ 为一幅值相关的小参数, $T_n = \epsilon^n t$, 通过定义阻尼系数在扰动方程里实现衰减和非线性, 即 $\hat{\mu}_n = \epsilon \mu_n$. 当 $\Omega = \omega_n$ 时, 系统产生主共振.

2.1. 情况 1 $\Omega = \omega_2$ 时的鞍结分岔控制

考虑 $\Omega = \omega_2$, 令 $F_1 = \epsilon f_1, F_2 = \epsilon^2 f_2$, 并且有 $\hat{\mu}_n = \epsilon \mu_n$, 将(2)式代入(1)式, 展开后令 ϵ 的同次幂系数为零, 得到各阶近似的线性偏微分方程组

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1), \quad (3)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0;$$

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + u_{11} u_{21},$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + u_{11}^2 + f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2). \quad (4)$$

(3) 式的解为

$$u_{11} = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + \Lambda \exp[i(\Omega T_0 + \tau_1)] + c.c., \quad (5)$$

$$u_{21} = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + c.c.,$$

其中 $\Lambda = f_1 / 2(\omega_1^2 - \Omega^2)$, A_1 和 A_2 为满足这一阶精度要求的待定函数.

下文将对 A_1 和 A_2 进行详细的讨论. 把(5)式代入(4)式, 得到

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0) + A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0] + \bar{A}_1 A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_1)T_0] + \Lambda A_2 \exp[i(\omega_2 + \Omega)T_0 + i\tau_1] + \Lambda \bar{A}_2 \exp[i(\Omega - \omega_2)T_0 + i\tau_1] - 2i\mu_1 \Omega \Lambda \exp[i\Omega T_0 + \tau_1] + c.c.,$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0) + A_1^2 \exp(2i\omega_1 T_0) + \bar{A}_1 A_1 + \Lambda^2 + 2A_1 \Lambda \exp[i(\omega_1 + \Omega)T_0 + i\tau_1] + 2\bar{A}_1 \Lambda \exp[i(\Omega - \omega_1)T_0 + i\tau_1]$$

$$+ \Lambda^2 \exp[2i(\Omega T_0 + \tau_1)] + \frac{1}{2} f_2 \exp[i(\omega_2 T_0 + \sigma_1 T_1 + \tau_2)] + c.c., \quad (6)$$

其中

$$\Omega = \omega_2 + \epsilon \sigma_1. \quad (7)$$

考虑系统发生内共振的情况, 此时有 $\omega_2 \approx 2\omega_1$. 将反馈控制器设计为

$$O_1(u_1, u_2) = K_1 u_1 u_2, O_2(u_1, u_2) = K_2 u_1^2,$$

其中 $K_n = \epsilon^2 k_n$. 于是原系统(1)变为控制系统

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\hat{\mu}_1 \dot{u}_1 + u_1 u_2 + F_1 \cos(\Omega t + \tau_1) + K_1 u_1 u_2,$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\hat{\mu}_2 \dot{u}_2 + u_1^2 + F_2 \cos(\Omega t + \tau_2) + K_2 u_1^2. \quad (8)$$

用(2)式对控制系统(8)进行摄动^[13, 14], 得到两个近似线性偏微分方程

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1), \quad (9)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0;$$

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + u_{11} u_{21} + k_1 u_{11} u_{21},$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + u_{11}^2 + f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) + k_2 u_{11}^2. \quad (10)$$

从上面的讨论可以知道, 对于(9)式, 有解

$$u_{11} = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + \Lambda \exp[i(\Omega T_0 + \tau_1)] + c.c., \quad (11)$$

$$u_{21} = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + c.c.,$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 \exp(-\mu_1 T_1 + i\theta_1),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2 \exp(-\mu_2 T_1 + i\theta_2) - \frac{1}{4} i f_2 \omega_2^{-1} (-\mu_2 + i\sigma_1)^{-1} \times \exp[i(\sigma_1 T_1 + \tau_2)], \quad (12)$$

其中 a_n 和 θ_n 为常数, 当 $t \rightarrow \infty$ 即 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, 有

$$A_1 \rightarrow 0,$$

$$A_2 \rightarrow -\frac{1}{4} i f_2 \omega_2^{-1} (\mu_2 + i\sigma_1)^{-1} \exp[i(\sigma_1 T_1 + \tau_2)]. \quad (13)$$

将(11)式代入(10)式, 得到

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0) + (1 + k_1) A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0]$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + k_1) \bar{A}_1 A_2 \exp[\chi(\omega_2 - \omega_1)T_0] \\
& + (1 + k_1) \Delta A_2 \exp[\chi(\omega_2 + \Omega)T_0 + i\tau_1] \\
& + (1 + k_1) \Delta \bar{A}_2 \exp[\chi(\Omega - \omega_2)T_0 + i\tau_1] \\
& - 2i\mu_1 \Omega \Delta \exp[i\Omega T_0 + \tau_1]] + \text{c.c.},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = & - 2i\omega_2 (A_2' + \mu_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0) \\
& + (1 + k_2) A_1^2 \exp(2i\omega_1 T_0) \\
& + (1 + k_2) \bar{A}_1 A_1 + (1 + k_2) \Delta^2 \\
& + \chi(1 + k_2) \Delta_1 \Delta \exp[\chi(\omega_1 + \Omega)T_0 + i\tau_1] \\
& + \chi(1 + k_2) \bar{\Delta}_1 \Delta \exp[\chi(\Omega - \omega_1)T_0 + i\tau_1] \\
& + (1 + k_2) \Delta^2 \exp[2\chi(\Omega T_0 + \tau_1)] \\
& + \frac{1}{2} f_2 \exp[\chi(\omega_2 T_0 + \sigma_1 T_1 + \tau_2)] \\
& + \text{c.c.}, \quad (14)
\end{aligned}$$

这里 $\omega_2 \approx 2\omega_1$. 为避免久期项出现, 对(14)式要求有

$$\begin{aligned}
& - 2i\omega_1 (A_1' + \mu_1 A_1) + (1 + k_1) \bar{A}_1 A_2 \\
& \times \exp(-i\sigma_2 T_1) = 0, \\
& - 2i\omega_2 (A_2' + \mu_2 A_2) + (1 + k_2) A_1^2 \\
& \times \exp(i\sigma_2 T_1) + \frac{1}{2} f_2 \exp[\chi(\sigma_1 T_1 + \tau_2)] = 0. \quad (15)
\end{aligned}$$

引入极坐标变换 $A_n = \frac{1}{2} a_n \exp(i\theta_n)$, 代入(15)式, 将实部与虚部分开, 可以得到 a_n 与 θ_n 的一阶常微分方程

$$\begin{aligned}
a_1' & = -\mu_1 a_1 + \frac{1}{4} \omega_1^{-1} (1 + k_1) a_1 a_2 \sin\gamma_2, \\
a_2' & = -\mu_2 a_2 - \frac{1}{4} \omega_2^{-1} (1 + k_2) a_1^2 \sin\gamma_2 \\
& + \frac{1}{2} f_2 \omega_2^{-1} \sin\gamma_1, \\
a_1 \theta_1' & = -\frac{1}{4} \omega_1^{-1} (1 + k_1) a_1 a_2 \cos\gamma_2, \\
a_2 \theta_2' & = -\frac{1}{4} \omega_2^{-1} (1 + k_2) a_1^2 \cos\gamma_2 \\
& + \frac{1}{2} f_2 \omega_2^{-1} \cos\gamma_1, \quad (16)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma_1 & = \sigma_1 T_1 - \theta_2 + \tau_2, \\
\gamma_2 & = \theta_2 - 2\theta_1 - \sigma_2 T_1. \quad (17)
\end{aligned}$$

稳定状态下有 $\alpha_n' = \gamma_n' = 0$, 即

$$\begin{aligned}
\alpha_1' & = \alpha_2' = 0, \\
\gamma_1' & = \gamma_2' = 0,
\end{aligned}$$

可以得到两个稳定解, 其中一个解的表述如(13)式所示, 它只和系统的线性部分相关. 另一个解为

$$\begin{aligned}
a_1 & = \chi(1 + k_1)^{-1/2} (1 + k_2)^{-1/2} \\
& \times \left[-\Gamma_1 \pm \left(\frac{1}{4} f_2^2 - \Gamma_2^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$a_2 = 2\omega_1 (1 + k_1)^{-1} [4\mu_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]^{1/2} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 & = 2\omega_1 \omega_2 [\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1) + 2\mu_1 \mu_2] \\
\Gamma_2 & = 2\omega_1 \omega_2 [2\sigma_1 \mu_1 - \mu_2(\sigma_2 - \sigma_1)]. \quad (20)
\end{aligned}$$

到此, 我们得到了控制参数和振幅的关系表达式. 这里我们注意到 a_2 和外激励振幅 f_2 无关. 根据(2)式(5)式(18)式(19)式和(20)式, 最终得到添加反馈控制器后系统振幅的表达式

$$\begin{aligned}
u_1 & = F_1 (\omega_1^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t + \tau_1)^{1/2} \\
& + 2\epsilon (1 + k_1)^{-1/2} (1 + k_2)^{-1/2} \\
& \times \left[-\Gamma_1 \pm \left(\frac{1}{4} f_2^2 - \Gamma_2^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\
& \times \cos\left[\frac{1}{2} (\Omega t + \tau_2 - \gamma_1 - \gamma_2) \right] \\
& + \alpha(\epsilon^2), \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 & = 2\epsilon \omega_1 (1 + k_1)^{-1} [4\mu_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]^{1/2} \\
& \times \cos(\Omega t + \tau_2 - \gamma_1) + \alpha(\epsilon^2). \quad (22)
\end{aligned}$$

还可以得到控制后振幅与外激励幅值的关系, 将它和未控制系统的振幅, 以及外激励幅值的关系曲线画在同一幅图中, 如图2所示. 可以在满足系统稳定扰动条件下, f_2 的变化对振幅 a_1 的影响可以通过控制参数加以控制, 改变控制参数 k_1, k_2 的正负可以得到不同的对比曲线.

图2中虚线为控制系统的振幅随外激励变化关系曲线, 实线为未控制系统的振幅随外激励变化关系曲线. 图3和图4分别对比了控制系统(8)取一组较大和一组较小的控制参数时, 控制系统与未控制系统振幅随外激励变化的关系曲线, 结果表明, 通过取较大或较小的控制参数, 可以实现对振幅的控制, 从而达到减小振幅振荡产生的危害或根据实际需要扩大振幅振荡.

2.2. 情况2 $\Omega = \omega_1$ 时的鞍结分岔控制

考虑 $\Omega = \omega_1$ 时系统(1)的运动情况. 同样令 $F_1 = \epsilon^2 f_1, F_2 = \epsilon f_2$, 代入未控制系统(1), 展开得到

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} & = 0, \\
D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} & = f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2); \quad (23) \\
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} & \\
& = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11})
\end{aligned}$$

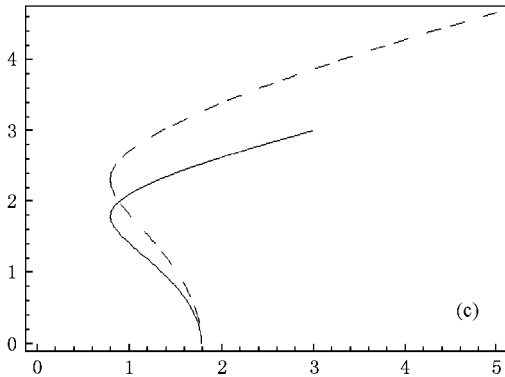
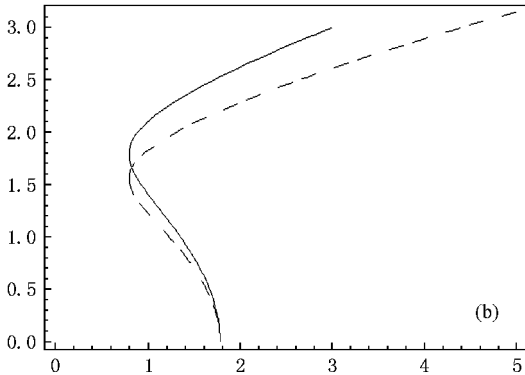
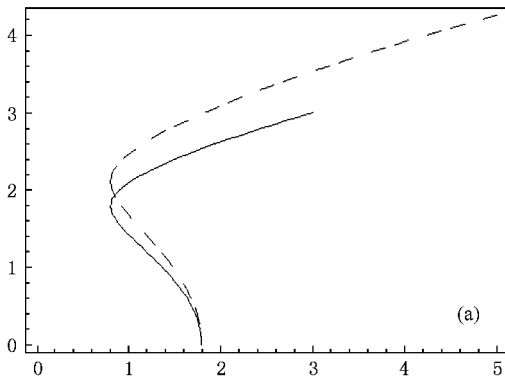


图2 控制系统(8)的振幅随外激励变化与原系统对比图 (a) $k_1 = -0.1 < 0, k_2 = -0.2 < 0$ (b) $k_1 = 0.1 > 0, k_2 = 0.2 > 0$ (c) $(k_1 = -0.5 < 0, k_2 = 0.2 > 0)$

$$\begin{aligned}
 &+ u_{11} u_{21} + f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1), \\
 &D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} \\
 &= -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + u_{11}^2. \quad (24)
 \end{aligned}$$

(23)式有解

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + c.c., \\
 u_{21} &= A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) \\
 &+ \Lambda \exp[i(\Omega T_0 + \tau_2)] + c.c., \quad (25)
 \end{aligned}$$

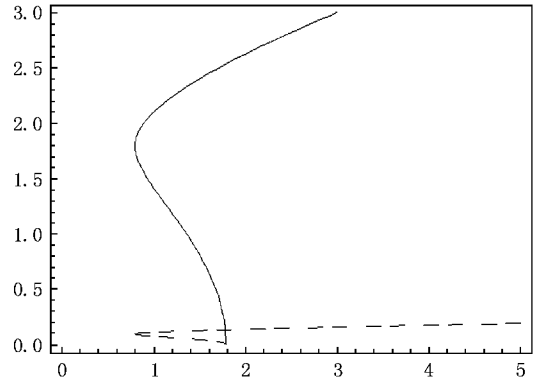


图3 控制系统(8)的振幅随外激励变化与原系统对比图 ($k_1 = 5 > 0, k_2 = 60 > 0$)

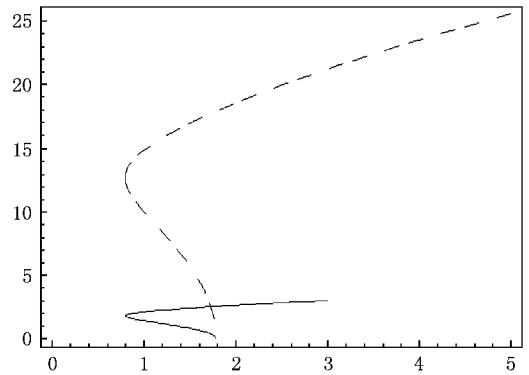


图4 控制系统(8)的振幅随外激励变化与原系统对比图 ($k_1 = -0.8 < 0, k_2 = -0.9 < 0$)

其中 $\Lambda = f_2 / 2(\omega_2^2 - \Omega^2)$, A_1 和 A_2 为满足这一阶精度要求的待定函数. 将(25)式代入(24)式化简得

$$\begin{aligned}
 &D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} \\
 &= -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0) \\
 &+ A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0] \\
 &+ \bar{A}_1 A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_1)T_0] \\
 &+ \Lambda A_1 \exp[i(\omega_1 + \Omega)T_0 + i\tau_2] \\
 &+ \Lambda \bar{A}_1 \exp[i(\Omega - \omega_1)T_0 + i\tau_2] \\
 &+ \frac{1}{2} f_1 \exp[i(\omega_1 T_0 + \sigma_1 T_1 + \tau_1)] + c.c., \\
 &D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} \\
 &= -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0) \\
 &+ A_1^2 \exp(2i\omega_1 T_0) \\
 &+ \bar{A}_1 A_1 - 2i\mu_2 \Omega \Lambda \exp[i(\Omega T_0 + \tau_2)] + c.c. \quad (26)
 \end{aligned}$$

考虑系统发生内共振的情况, 此时有 $\omega_2 \approx 2\omega_1$. 考虑计算要求, 设计一组线性反馈控制器

$$O_1(u_1, u_2) = K_1 u_1, O_2(u_1, u_2) = K_2 u_2,$$

其中 $K_n = \varepsilon^2 k_n$. 于是原系统 (1) 变为控制系统

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= -2\hat{\mu}_1 \dot{u}_1 + u_1 u_2 \\ &\quad + F_1 \cos(\Omega t + \tau_1) + K_1 u_1, \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= -2\hat{\mu}_2 \dot{u}_2 + u_1^2 \\ &\quad + F_2 \cos(\Omega t + \tau_2) + K_2 u_2. \end{aligned} \quad (27)$$

对控制系统 (27) 进行摄动, 得到

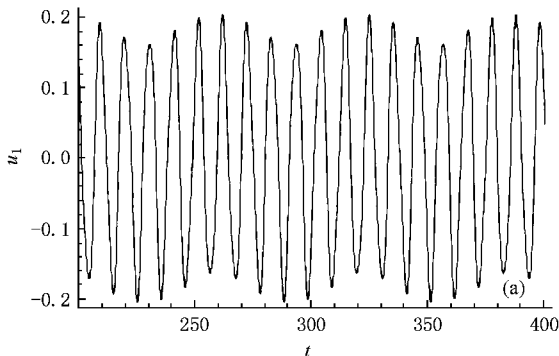
$$\begin{aligned} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0) \\ &\quad + k_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) \\ &\quad + A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0] \\ &\quad + \bar{A}_1 A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_1)T_0] \\ &\quad + \Delta A_1 \exp[i(\omega_1 + \Omega)T_0 + i\tau_2] \\ &\quad + \Delta \bar{A}_1 \exp[i(\Omega - \omega_1)T_0 + i\tau_2] \\ &\quad + \frac{1}{2} f_1 \exp[i(\omega_1 T_0 + \sigma_1 T_1 + \tau_1)] + \text{c.c.}, \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0) \\ &\quad + k_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) + A_1^2 \exp(2i\omega_1 T_0) \\ &\quad + \bar{A}_1 A_1 + k_2 \Delta \exp[i(\Omega T_0 + \tau_2)] \\ &\quad - 2i\mu_2 \Omega \Delta \exp[i(\Omega T_0 + \tau_2)] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= f_2 / (\omega_2^2 - \Omega^2), \\ A_1 &= \frac{1}{2} a_1 \exp(-\mu_1 T_1 + i\theta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} i f_1 \omega_1^{-1} (-\mu_1 + i\sigma_1)^{-1} \exp[i(\sigma_1 T_1 + \tau_1)], \\ A_2 &= \frac{1}{2} a_2 \exp(-\mu_2 T_1 + i\theta_2). \end{aligned} \quad (29)$$

为了避免久期项的产生, 对 (29) 式, 要求

$$\begin{aligned} 2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) - k_1 \bar{A}_1 - \bar{A}_1 A_2 \\ = \frac{1}{2} f_2 \exp[i(\sigma_1 T_1 + \tau_2)], \end{aligned}$$



$$2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) - k_2 \bar{A}_2 - A_1^2 = 0. \quad (30)$$

令

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \theta_1 + \tau_1, \quad (31)$$

引入极坐标之后, 得到控制参数 k_1, k_2 与振幅 a_1, a_2 的关系表达式

$$\begin{aligned} a_1' &= -\mu_1 a_1 + \frac{1}{4} \omega_1^{-1} (1 + k_1) a_1 a_2 \sin \gamma_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} f_2 \omega_2^{-1} \sin \gamma_1, \\ a_2' &= -\mu_2 a_2 - \frac{1}{4} \omega_2^{-1} (1 + k_2) a_1^2 \sin \gamma_2, \\ a_1 \theta_1' &= -\frac{1}{4} \omega_1^{-1} (1 + k_1) a_1 a_2 \cos \gamma_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} f_2 \omega_2^{-1} \cos \gamma_1, \\ a_2 \theta_2' &= -\frac{1}{4} \omega_2^{-1} (1 + k_2) a_1^2 \cos \gamma_2, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\gamma_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_2$ 均与上一小节一样. 控制系统稳定状态下有 $a_n' = \gamma_n' = 0$, 即

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2' = 0, \\ \gamma_1' &= \gamma_2' = 0. \end{aligned}$$

于是有

$$a_1 = 2 \left[\frac{\omega_2 a_2}{(1 + k_1) \Gamma} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

其中

$$\Gamma = [\mu_2^2 + (\sigma_2 + 2\sigma_1)^2]^{1/2}. \quad (34)$$

将 (32) 式 (33) 式代入 (34) 式可以得到一个关于 a_2 与 k_1, k_2 的关系表达式, 通过调整控制参数达到控制的目的.

2.3. 单频外激励弹簧摆系统 (1) 的时间历程

通过上面的分析, 还可以得到这个单频外激励弹簧摆系统 (1) 的时间历程图, 以及添加反馈控制器后, 控制系统 (8) 的时间历程图, 分别如图 5 和图 6 所示.

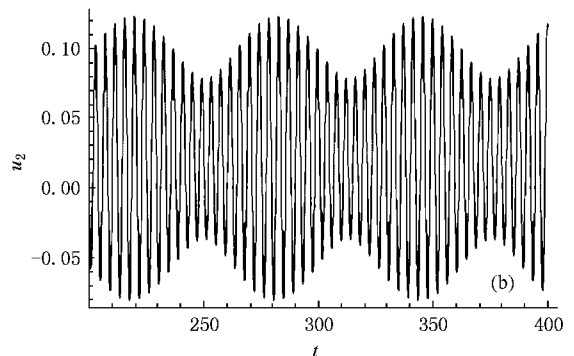


图 5 单频外激励弹簧摆系统 (1) 扰动的时问历程图

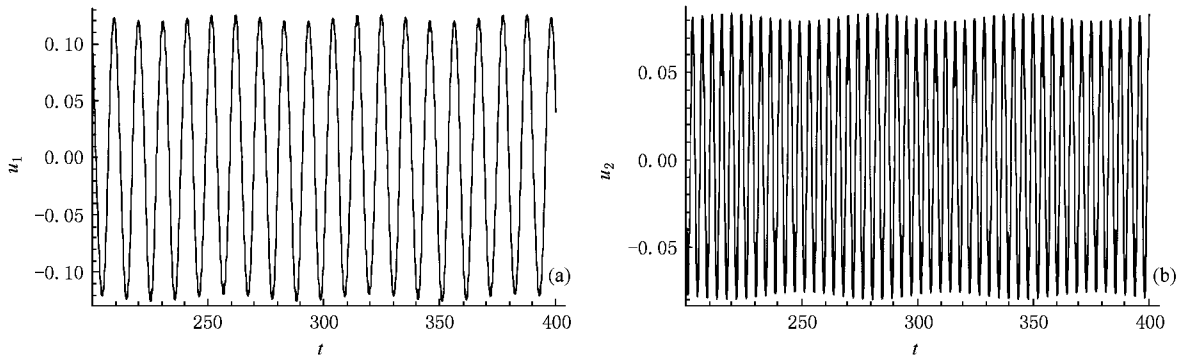


图6 受控单频外激励弹簧摆系统(8)扰动的时间历程图($k_1 = -0.8 < 0, k_2 = -0.9 < 0$)

对比图5与图6,可见在添加了所需的反馈控制器后,此时弹簧摆的扰动趋近于一个稳定的周期运动,结果令人满意.

3. 结 论

研究一个有单频外激励的摆动弹簧的运动,它的运动规律可以用一个耦合的二自由度含平方非线性

项系统来表示.一般来说要获得控制参数与幅值的函数关系是比较困难的,需借助于数值分析,设计控制器,确定适合的控制参数.本文设计了简单可行的反馈控制器,不仅能使系统的振幅得到有效的控制,还可以将弹簧摆的扰动控制到一条稳定的周期运动轨道上,而且可近似解析方法获得控制参数与振动幅值的函数关系.该研究工作可推广到其他多自由度非线性系统的分岔控制.

- [1] Chen G, Moiola J L, Wang H O 2000 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10** 511
- [2] Alvarez J, Curiel L E 1997 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **7** 1811
- [3] Wang H O, Abed E H 1995 *Automatica* **31** 1213
- [4] Liu C X, Zhou Y P 2007 *Yunnan Water Power* **23** 87 (in Chinese) [刘彩霞、周艳平 2007 云南水力发电 **23** 87]
- [5] Hua C C, Liu Y Z, Lu Q S 2002 *Journal of Shanghai Jiaotong University* **36** 391 (in Chinese) [化存才、刘延柱、陆启韶 2002 上海交通大学学报 **36** 391]
- [6] Fotios G, Andreas Z 2001 *Physica D* **159** 215
- [7] Bálint N 2008 *Applied Mathematical Modelling* **32** 1587
- [8] Josep S 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **35** 313
- [9] Henk B, Carles S, Renato V 2008 *Physica D* **237** 1773
- [10] Liu Y Z, Chen L Q 2001 *Nonlinear Vibration* (Beijing: Higher Education) 179 (in Chinese) [刘延柱、陈立群 2001 非线性振动 (北京:高等教育出版社) 第179页]
- [11] Nayfeh A H, Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillations* (New York: Wiley) 420
- [12] Billings S A, Gray J O, Owens D H 1984 *Nonlinear system design* (UK: Peter Peregrinus Ltd)
- [13] Tang J S, Xiao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 101 (in Chinese) [唐驾时、萧寒 2007 物理学报 **56** 101]
- [14] Xiao H, Yin X B 2008 *Journal of Dynamics and Control* **6** 31 (in Chinese) [萧寒、尹小波 2008 动力学与控制学报 **6** 31]

Saddle-node bifurcation control of a spring pendulum with single-frequency excitation *

Xiao Han¹⁾ Tang Jia-Shi²⁾ Liang Cui-Xiang²⁾

1 *Faculty of Architectural Civil Engineering and Environment , Ningbo University , Ningbo 315211 ,China)*

2 *Department of Engineering Mechanics , Hunan University , Changsha 410082 ,China)*

(Received 20 September 2008 ; revised manuscript received 31 October 2008)

Abstract

Spring pendulum under single-frequency excitation can be described by a group of very complicated nonlinear equations. The paper studies the amplitude of the spring pendulum , and feedback controllers are designed. Analytic method is used to obtain the control equation of amplitude , the relationship function between control parameter and amplitude is also obtained , which may act as an implementation of feedback control method for saddle-node bifurcation control , and also brings multi-scale method to numerical calculation of multiple-degree-of-freedom nonlinear systems.

Keywords : excitation spring pendulum , saddle-node bifurcation , amplitude , feedback control

PACC : 0547 , 1120D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10672053).