

基于小波分析的高斯脉冲成形的递归实现*

陈世国^{1)†} 吉世印²⁾ 刘万松¹⁾ 宋泽运¹⁾ 庞礼军¹⁾

1) 贵州师范大学物理与电子科学学院, 贵阳 550001)

2) 黔南民族师范学院物理与电子科学系, 都匀 558000)

(2008 年 9 月 24 日收到, 2009 年 1 月 13 日收到修改稿)

基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形滤波器, 可以进一步表示为高斯函数及其导数的线性组合. 以高斯函数及其导数的递归近似实现算法为基础, 研究了基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形的递归近似实现算法. 仿真指数衰减信号和实际采样指数衰减信号的高斯脉冲成形表明, 递归近似高斯脉冲成形与直接卷积高斯脉冲成形符合得非常好, 体现了基于小波分析的高斯脉冲成形的特点. 研究成果为进一步研究高斯脉冲成形在数字芯片上的实现提供了必要的数字算法基础.

关键词: 高斯脉冲成形, 递归实现, 小波分析

PACC: 2970, 2980

1. 引言

核能谱测量中, 噪声、弹道亏损、脉冲堆积是影响能量分辨率的几个重要因素^[1]. 高斯脉冲成形在抑制噪声、弹道亏损等方面具有良好的综合表现, Goulding 等^[2]指出, 高斯脉冲成形是在给定的分辨时间下接近于获得最好能量分辨率的脉冲成形技术. 真正的高斯脉冲成形具有反因果部分, 模拟系统难以实现. 在高性能模拟核能谱分析仪中广泛使用近似高斯脉冲成形(pseudo-gaussian)^[3]技术. 随着数字电子技术的高度发展^[4]及其在核分析仪器中的应用^[5], 数字脉冲成形技术的研究引起了科研工作者的密切关注^[6,7]. 陈世国等^[8]研究了基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形. 本文在文献[8]的基础上进一步研究高斯脉冲成形的递归实现算法.

2. 高斯脉冲成形滤波器的高斯函数表示

文献[8]选用的小波函数和尺度函数分别是

$$\psi(t) = -2\pi t e^{-\pi t^2}, \quad (1)$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\pi} e^{-\pi t^2}, \quad (2)$$

对应的小波基函数和尺度基函数分别为

$$\psi_s(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{-2\pi}{s} \cdot \frac{t}{s} \cdot e^{-\pi\left(\frac{t}{s}\right)^2}, \quad (3)$$

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{s} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{\pi}{s} e^{-\pi\left(\frac{t}{s}\right)^2}. \quad (4)$$

文献[8]研究给出的指数衰减信号高斯脉冲成形滤波器, 是小波基函数 $\psi_s(t)$ 和尺度基函数 $\varphi_s(t)$ 的线性组合,

$$h_{\text{gaus}}(t) = \psi_s(t) + \frac{s}{\tau_0 \sqrt{\pi}} \varphi_s(t), \quad (5)$$

令

$$\theta_s(t) = \frac{1}{s} \theta\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1}{s} e^{-\pi\left(\frac{t}{s}\right)^2}, \quad (6)$$

其中 $\theta(t) = e^{-\pi t^2}$ 为高斯函数. 小波基函数 $\psi_s(t)$ 和尺度基函数 $\varphi_s(t)$ 可进一步表示为 $\theta_s(t)$ 的函数形式,

$$\psi_s(t) = s \frac{d\theta_s(t)}{dt}, \quad \varphi_s(t) = \sqrt{\pi} \theta_s(t). \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式可得

$$\begin{aligned} h_{\text{gaus}}(t) &= \psi_s(t) + \frac{s}{\tau_0 \sqrt{\pi}} \varphi_s(t) \\ &= s \left[\frac{d\theta_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \cdot \theta_s(t) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

* 贵州省科学技术基金(批准号: 黔科合 J 字[2007]2213 号), 贵州师范大学博士启动基金和贵州师范大学青年教师科研发展基金资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: csg0995@sina.com; csg0995@hotmail.com

可见,基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形滤波器,是高斯函数 $\theta_s(t)$ 及其导数的线性组合. 实现指数衰减信号高斯脉冲成形,关键是实现高斯函数 $\theta_s(t)$ 及其一阶导数 $\frac{d\theta_s(t)}{dt}$. $\theta_s(t)$ 的傅里叶变换为

$$\hat{\theta}_s(\omega) = e^{-\frac{s^2\omega^2}{4\pi}}. \quad (9)$$

3. 高斯脉冲成形的递归近似实现

3.1. 高斯函数的线性相位递归近似实现

本文利用 Vliet 等^[9]提出的高斯函数的线性相位递归近似实现方法实现高斯函数 $\theta_s(t)$,以便充分发挥高斯脉冲成形提取辐射粒子的能量信息和辐射事件发生的时间信息的优势.

3.1.1. 递归近似传递函数

Vliet 等^[9]根据高斯函数的实偶函数特性,构造了如下传递函数形式:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{d_i - 1}{d_i - z^{-1}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1 - d_i}{z - d_i} = H_+(z) \cdot H_-(z). \quad (10)$$

因果子系统 $H_+(z)$ 和反因果子系统 $H_-(z)$ 为完全递归结构,且 $H_-(z) = H_+(z^{-1})$. $H(z)$ 的级联结构形式如图 1 所示,其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^N \frac{d_i - 1}{d_i - e^{-j\omega}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1 - d_i}{e^{j\omega} - d_i}. \quad (11)$$

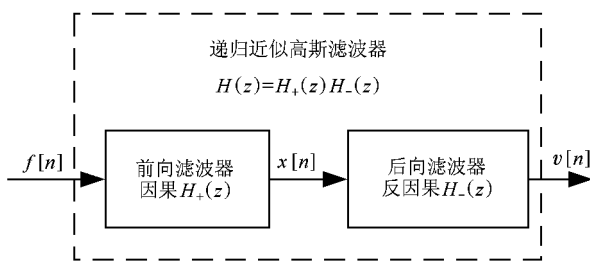


图 1 递归近似高斯滤波器

通过选择合适的极点 d_i , 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 可以近似高斯函数的频率响应 $\hat{\theta}_s(\omega)$. 极点 d_i 可以通过最小化 $H(e^{j\omega})$ 和真实高斯函数频率响应 $\hat{\theta}_s(\omega)$ 之间的误差得到.

图 1 中,令 $f[n]$ 的 z 变换为 $F(z)$, $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$, $v[n]$ 的 z 变换为 $V(z)$, 则图中算法可表

示为

$$X(z) = F(z)H_+(z), \quad (12)$$

$$V(z) = X(z)H_-(z) = F(z)H_+(z)H_-(z^{-1}). \quad (13)$$

最后输出的频率响应为

$$V(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})H_+(e^{j\omega})H_+(e^{-j\omega}) = F(e^{j\omega})|H_+(e^{j\omega})|^2. \quad (14)$$

可见,采用前向滤波器(因果子系统)和后向滤波器(反因果子系统)的级联实现方式,前向滤波器引起的相位偏移,后向滤波器在反方向引起同样大小的相位偏移,因而最后的输出信号相对于输入信号具有零相位,使 $H(z)$ 呈现线性相位特性.

3.1.2. 递归近似差分方程

两个子系统 $H_+(z)$ 和 $H_-(z)$ 对应的差分方程如下.

前向滤波器:

$$x[n] = \alpha f[n] - \sum_{i=1}^N b_i x[n-i] \quad \Downarrow z \quad (15)$$

$$H_+(z) = \frac{\alpha}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}$$

后向滤波器:

$$v[n] = \alpha x[n] - \sum_{i=1}^N b_i v[n+i] \quad \Downarrow z \quad (16)$$

$$H_-(z) = \frac{\alpha}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^i},$$

其中 α, b_i 是 d_i 的函数^[9].

3.2. 高斯脉冲成形的递归近似实现

文献 8 给出了指数衰减信号高斯脉冲成形的小波实现算法,

$$g(t) = W_s f(t) + \frac{s}{\tau_0 \sqrt{\pi}} L_s f(t). \quad (17)$$

下面分别讨论小波变换 $W_s f(t)$ 和尺度函数低通滤波 $L_s f(t)$ 的递归近似实现.

3.2.1. 小波变换 $W_s f(t)$ 的递归近似实现

利用(7)式和

$$f(t) * \frac{d\theta_s(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} * \theta_s(t)$$

可得

$$W_s f(t) = f(t) * \psi_s(t) = s \left[\frac{df(t)}{dt} * \theta_s(t) \right]. \quad (18)$$

对采样信号 $f[n]$, Vliet 等^[9]建议用以下差分近似表示其一阶导数：

$$\frac{1}{2}(f[n+1] - f[n-1]) \Leftrightarrow \frac{df(t)}{dt}. \quad (19)$$

(18) 式的小波变换 $W_s f(t)$ 的离散形式为

$$W_s f[n] = s \left[\frac{1}{2}(f[n+1] - f[n-1]) * \theta_s[n] \right], \quad (20)$$

$\theta_s[n]$ 是 $\theta_s(t)$ 的离散形式. 实现 $W_s f[n]$ 时, 需将递归近似高斯滤波器的输入信号由 $f[n]$ 变为

$$df[n] = \frac{1}{2}(f[n+1] - f[n-1]), \quad (21)$$

(21) 式的实现过程可用图 2 所示的一阶微分器表示.

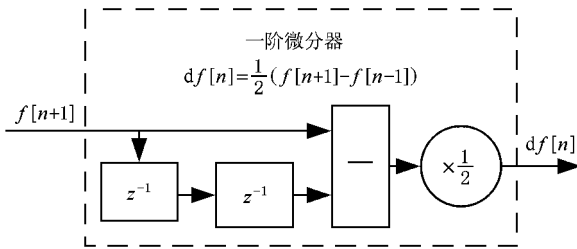


图 2 一阶微分器

(20) 式的小波变换 $W_s f[n]$ 的实现过程如图 3 所示.

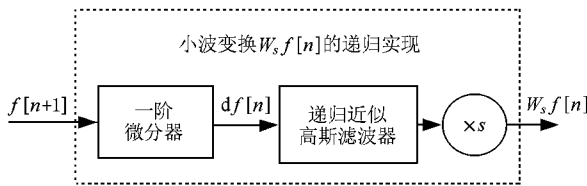


图 3 指数衰减信号小波变换的递归实现

3.2.2. 尺度函数低通滤波 $L_s f(t)$ 的递归近似实现

利用(7)式可得

$$L_s f(t) = f(t) * \varphi_s(t) = \sqrt{\pi} [f(t) * \theta_s(t)]. \quad (22)$$

(18) 式的尺度函数低通滤波 $L_s f(t)$ 的离散形式为

$$L_s f[n] = \sqrt{\pi} [f[n] * \theta_s[n]], \quad (23)$$

其实现过程如图 4 所示.

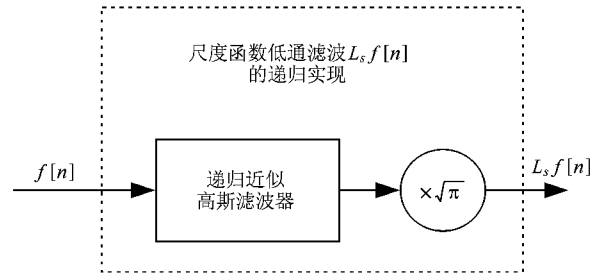


图 4 指数衰减信号尺度函数低通滤波的递归实现

3.2.3. 高斯脉冲成形的递归近似实现

(17) 式的指数衰减信号高斯脉冲成形的离散形式为

$$g[n] = W_s f[n] + \frac{s}{\tau_0 \sqrt{\pi}} L_s f[n]. \quad (24)$$

结合小波变换和尺度函数低通滤波的递归近似实现方法, 可以得到(24)式所示指数衰减信号高斯脉冲成形算法的递归近似实现结构, 如图 5 所示.

利用(7)式和

$$f(t) * \frac{d\theta_s(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} * \theta_s(t),$$

(17) 式可进一步整理为

$$g(t) = s \left[\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \cdot f(t) \right] * \theta_s(t), \quad (25)$$

(25) 式的离散形式为

$$g[n] = s \left[\frac{1}{2}(f[n+1] - f[n-1]) + \frac{1}{\tau_0} \cdot f[n] \right] * \theta_s[n]. \quad (26)$$

根据(26)式, 图 5 所示的高斯脉冲成形的递归实现结构可以进一步简化为图 6 所示的实现结构. 图 6 与图 5 的信号处理功能完全相同, 在芯片上实现时, 因少用一个递归近似高斯滤波器单元, 将大大节约硬件资源.

4. 高斯脉冲成形的递归实现实例

4.1. 仿真指数衰减信号高斯脉冲成形的递归近似实现

图 7(a) 显示了仿真指数衰减信号. 仿真指数衰减信号的衰减时间常数参考了实际采样指数衰减信号的衰减时间常数^[8], 取为 $\tau_0 = 334\alpha$ (以采样间隔归一化), 幅度归一化到 1 V.

(10) 式的递归近似高斯滤波器 $H(z)$, 我们取 $N = 5$, 用最小均方误差方法, 通过最小化 $H(e^{j\omega})$ 和真

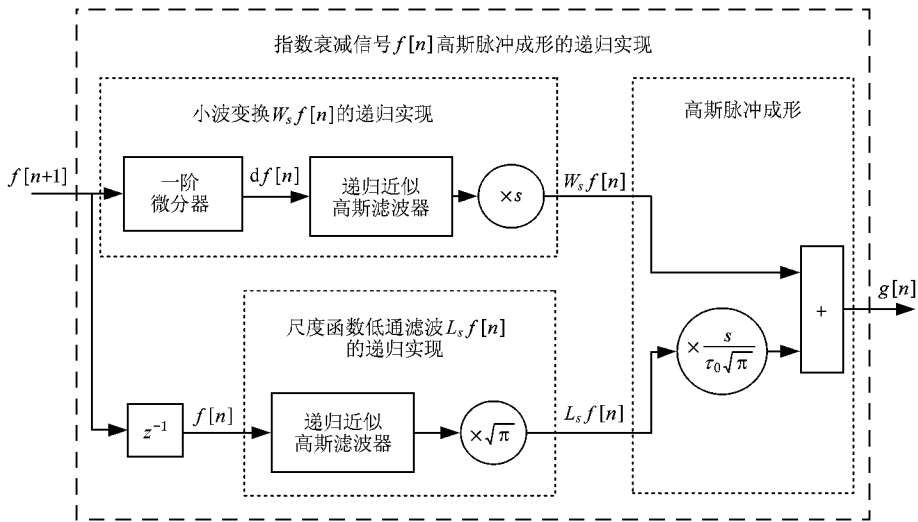


图 5 指数衰减信号高斯脉冲成形的递归实现

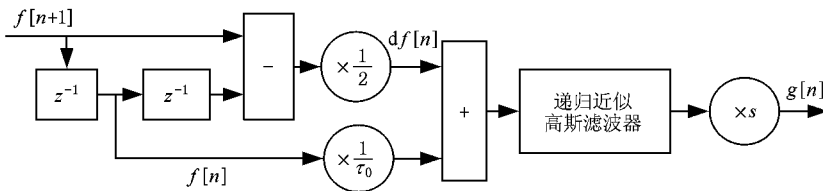


图 6 指数衰减信号高斯脉冲成形递归实现的简化结构

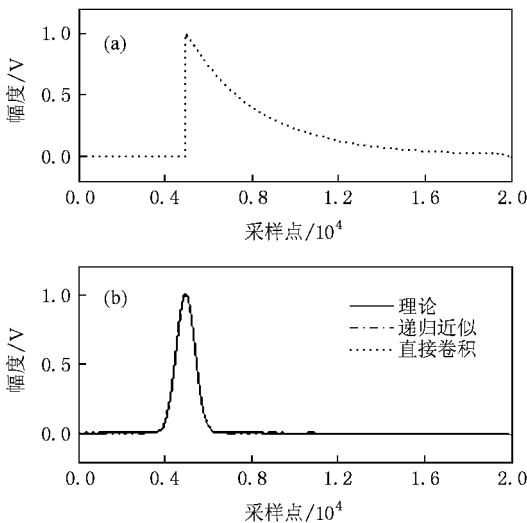


图 7 仿真指数衰减信号 (a) 及其高斯脉冲成形 (b)

实高斯函数频率响应 $\hat{\theta}_s(\omega)$ 之间的误差得到极点 d_i 如下：

$$d_1 = 0.99698386 + 0.00493104i ,$$

$$d_2 = 0.99698386 - 0.00493104i ,$$

$$d_3 = 0.99645846 + 0.00215874i ,$$

$$d_4 = 0.99645846 - 0.00215874i ,$$

$$d_5 = 0.99614568 .$$

图 7 (b) 显示了递归近似高斯脉冲成形, 同时也显示了直接卷积高斯脉冲成形和理论高斯脉冲成形. 图 7 (b) 表明, 递归近似高斯脉冲成形和直接卷积高斯脉冲成形都与理论高斯脉冲成形符合非常好.

图 8 显示了不同高斯脉冲成形的峰顶部分和峰底两侧的局部放大. 图 8 (a) 表明, 在峰的顶部, 递归近似高斯脉冲成形和直接卷积高斯脉冲成形都与理论高斯脉冲成形存在一定误差, 但幅度的绝对误差小于峰值幅度的 0.02% (直接卷积高斯脉冲成形与理论高斯脉冲成形之间的误差是由于卷积运算时对数据的截断处理造成的), 而峰值位置三者完全一致, 如图 8 (a) 中箭头所示. 图 8 (b) 显示, 在峰底两侧, 与理论高斯脉冲成形比较, 递归近似高斯脉冲成形幅度的绝对误差明显高于直接卷积高斯脉冲成形幅度的绝对误差, 但最大绝对误差仍低于峰值幅度的 0.06% .

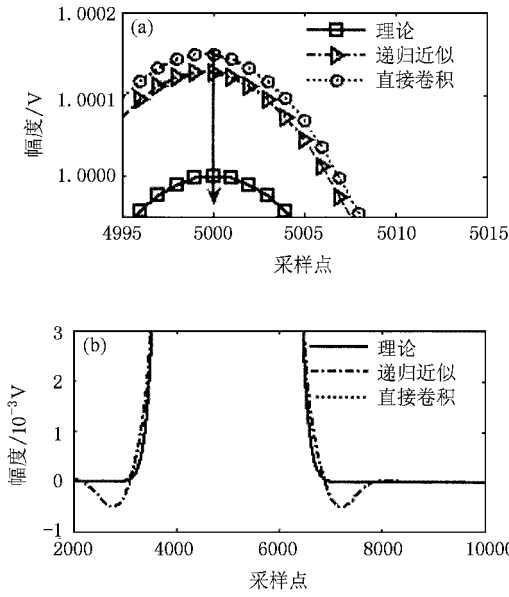


图 8 仿真指数衰减信号高斯脉冲成形峰顶 (a) 和底部 (b) 的局部放大

4.2. 实际采样指数衰减信号高斯脉冲成形的递归近似实现

采样指数衰减信号见文献 [8]. 图 9 显示了采样指数衰减信号及其高斯脉冲成形. 结果表明, 对于采样指数衰减信号, 递归近似高斯脉冲成形与直接卷积高斯脉冲成形符合得非常好.

图 10 显示了采样指数衰减信号高斯脉冲成形的峰顶部分的局部放大. 可以看出, 递归近似高斯脉冲成形与直接卷积高斯脉冲成形之间存在一定的误差, 但峰值幅度的绝对误差小于峰值幅度的 0.02%, 而峰值位置二者完全一致.

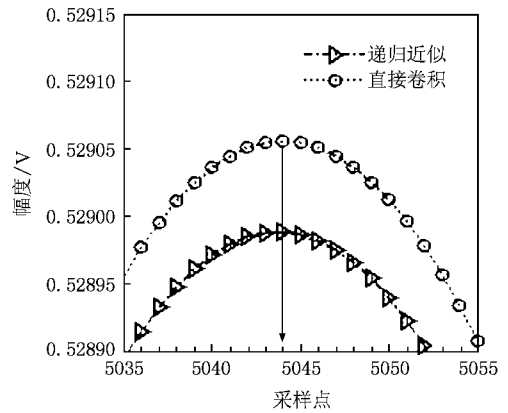


图 10 采样指数衰减信号高斯脉冲成形峰顶的局部放大

5. 结 论

基于小波分析的指数衰减信号高斯脉冲成形, 可以通过递归近似算法实现. 递归近似算法具有线性相位特征, 能够充分发挥高斯脉冲成形的优越性. 仿真指数衰减信号和实际采样指数衰减信号的高斯脉冲成形表明, 递归近似高斯脉冲成形与直接卷积高斯脉冲成形符合得非常好, 峰值幅度的绝对误差小于峰值幅度的 0.02%, 峰值位置完全一致.

本文研究成果为进一步研究高斯脉冲成形在数字芯片上的实现提供了必要的数字算法基础.

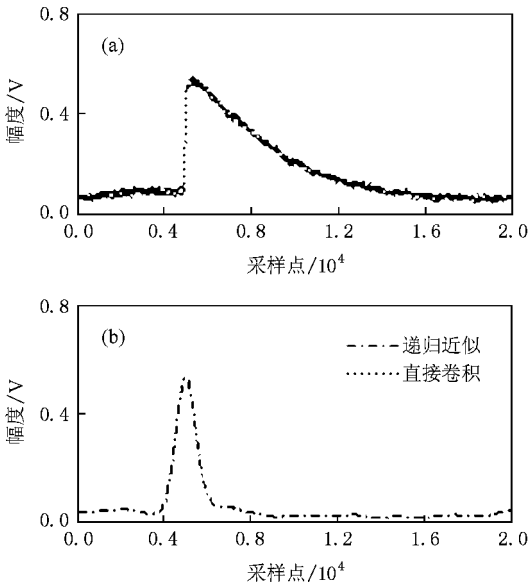


图 9 采样指数衰减信号 (a) 及其高斯脉冲成形 (b)

[1] Nicholson P W 1974 *Nuclear Electronics* (Norwich : John Wiley & Sons Ltd) p122
 [2] Goulding F S , Landis D A 1978 *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **25** 896
 [3] Mosher C H 1976 *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **23** 226
 [4] Altera Coporation. APEX20KE Programmable Logic Device Family

Date sheet. 2002. Ver4.3
 [5] EG&G ORTEC. DSPEC^{2.0} <http://www.ortec-online.com/products.html>
 [6] Jordanov V T 2003 *Nucl. Instr. Meth. A* **505** 347
 [7] Gerardi G , Abbene L , Manna A L , Fauciet F , Raso G 2007 *Nucl.*

Instr. Meth. A **571** 378

[9] Vliet L J , Young I T , Verbeek P W 1998 *Proceedings of the 14 th International Conference on Pattern Recognition*(Brisbane , Australia) 509—514 , August

[8] Chen S G , Ji S Y , Liu W S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2882 (in Chinese) [陈世国、吉世印、刘万松 2008 *物理学报* **57** 2882]

Recursive implementation of Gaussian pulse shaping based on wavelet analysis^{*}

Chen Shi-Guo^{1)†} Ji Shi-Yin²⁾ Liu Wan-Song¹⁾ Song Ze-Yun¹⁾ Pang Li-Jun¹⁾

¹⁾ *School of Physics and Electronic Science , Guizhou Normal University , Guiyang 550001 , China*)

²⁾ *Department of Physics and Electronic Science , Qiannan Normal College , Duyun 558000 , China*)

(Received 24 September 2008 ; revised manuscript received 13 January 2009)

Abstract

Gaussian pulse shaping filter of exponential decay signal based on wavelet analysis can be more described by using linear combination of both Gaussian function and its first order derivative. On the basis of the recursive approximate algorithm of Gaussian function and its derivative , the recursive approximate algorithm of Gaussian pulse shaping of exponential decay signal based on wavelet analysis is studied. The experiment results with simulating and sampling signals show that the recursive approximate Gaussian pulse shaping is well accorded with the direct convolution of the Gaussian pulse shaping. The characteristic of the Gaussian pulse shaping based on wavelet analysis is well exhibited by the recursive approximate Gaussian pulse shaping. The obtained result can serve as the digital algorithmic base for studying the realization of the Gaussian pulse shaping in digital chip.

Keywords : Gaussian pulse shaping , recursive implementation , wavelet analysis

PACC : 2970 , 2980

^{*} Project supported by the Science-Technology Foundation of Guizhou Province , China(Grant No. [2007] 2213) , the Starting Project for Doctors of Guizhou Normal University , the Science Foundation for Young Teachers of Guizhou Normal University .

[†] Corresponding author. E-mail : csg0995@sina.com ; csg0995@hotmail.com