

经典力学中加速度相关的 Lagrange 函数

丁光涛[†]

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

(2008 年 9 月 1 日收到, 2008 年 10 月 22 日收到修改稿)

研究了加速度线性相关的 Lagrange 函数, 在加速度项系数对称的条件下, Lagrange 方程保持为二阶微分方程; 给出了从运动方程构造加速度相关的 Lagrange 函数的方法; 研究同一系统的加速度相关和加速度无关的 Lagrange 函数之间的关系, 举例说明结果的应用.

关键词: Lagrange 方程, 加速度相关的 Lagrange 函数, 广义力学, Lagrange 函数的规范变换

PACC: 0320

1. 引言

通常认为力学系统 Lagrange 函数宗量为坐标 q_i 、速度 $\dot{q}_i$ 和时间 t , 不含有高于一阶的坐标微商, 系统运动微分方程——Lagrange 方程为二阶微分方程组^[1,2]. Lagrange 函数中包含高阶微商的称为广义力学, 其运动微分方程通常是高于二阶的微分方程^[3]. 本文研究在经典力学中引入包含加速度 $\ddot{q}_i$ 宗量的 Lagrange 函数的三个方面问题: 一是满足何种条件可使系统的运动微分方程仍是二阶微分方程组; 二是如何由系统运动微分方程出发, 构造含有加速度的 Lagrange 函数, 这是一类新型的 Lagrange 力学逆问题; 三是同一系统含加速度宗量 and 不含加速度宗量的两种 Lagrange 函数之间的关系. 将一般微分方程全部或者部分地化为某一类分析力学方程的标准形式(例如 Lagrange 形式), 再利用分析力学方法求解的课题, 已取得不少成果, 并有进一步研究和发展的前景^[4-9], 而微分方程的 Lagrange 化的关键是直接由方程导出对应的 Lagrange 函数, 本文对这个课题拓展了新的领域, 提供了新的途径. 为下文叙述方便, 约定对不含 $\ddot{q}_i$ 的 Lagrange 函数称为标准的 Lagrange 函数, 记以 $L = L(q, \dot{q}, t)$; 对含 $\ddot{q}_i$ 的称为加速度相关的 Lagrange 函数, 记以 $\bar{L} = \bar{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. 最后, 举两例说明得到的结果.

2. 加速度线性相关的 Lagrange 函数

设系统 Lagrange 函数为 $\ddot{q}_i$ 的线性函数

$$\bar{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = A_i(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_i + B(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$
式中右边第一项对重复指标从 1 到 n 求和(下同).

定义 Euler-Lagrange 算子

$$\bar{E}_i = -\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

系统运动微分方程为

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(\bar{L}) = & \left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ & + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \ddot{q}_j \ddot{q}_k \\ & + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_i} - 2 \frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_k \ddot{q}_j \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_j}{\partial t \partial \dot{q}_i} - 2 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right. \\ & \left. - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ & + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t \partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ & + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

若 $\bar{L}$ 中 A_i 满足对称条件

[†] E-mail: dgt695@sina.com

$$\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

则(3)式化为二阶微分方程

$$\bar{E}_i(\bar{L}) = M_{ij}\ddot{q}_j + N_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

式中,

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 A_j}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j}, \quad (6)$$

$$N_i = -\frac{\partial^2 A_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - 2 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t \partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}. \quad (7)$$

由对称性条件(4),可知 M_{ij} 也是对称的,即

$$M_{ij} = M_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

若系统是非奇异的,即

$$\det(M_{ij}) \neq 0, \quad (9)$$

则可从方程(5)解得

$$\ddot{q}_i = f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (10)$$

式中

$$f_i = -M_{ij}^{-1}N_j, \quad (11)$$

其中 M_{ij}^{-1} 为矩阵 M_{ij} 的逆矩阵元.

3. 由运动微分方程构造 Lagrange 函数

若已知系统运动微分方程(10),如何构造系统与加速度相关的 Lagrange 函数,这是一类新型的 Lagrange 力学逆问题.

将(10)式代入方程(5),得到

$$M_{ij}f_j + N_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

式中 M_{ij} 和 N_i 仍由(6)和(7)式定义,则(12)式是确定 A_i 和 B 的方程组.解(12)式得到一组 A_i 和 B ,满足条件(4)和(9),代入(1)式就构造出 $\bar{L}$.

方程(12)中待求函数有 $n+1$ 个(n 个 A_i 和 B),下面证明,利用 $\bar{L}$ 的规范变换可以增加补充条件,或减少未知函数. $\bar{L}$ 的规范变换为^[10]

$$\bar{L} \rightarrow \bar{L}' = \bar{L} + \dot{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (13)$$

由于

$$\bar{E}_i(\dot{G}) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

故由 $\bar{L}'$ 和 $\bar{L}$ 确定的运动微分方程相同,

$$\bar{E}_i(\bar{L}') \equiv \bar{E}_i(\bar{L}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

这种等效规范变换表明 A_i 和 B 有一定的选择自由,或选择某一个函数,例如

$$B = 0, \quad (16)$$

或选择 A_i 和 B 之间的一种关系,例如

$$B = -A_i f_i, \quad (17)$$

受(17)式约束,而得到的函数 $\bar{L}$ 为运动微分方程的线性组合

$$\bar{L} = A_i(\ddot{q}_i - f_i). \quad (18)$$

应当指出两点:一是做出某种预选择,可能降低求解方程(12)的难度,但也限定了解的范围,失去一些可能的解;二是规范变换(13)式,不改变 A_i 的对称性.

设变换后

$$\bar{L}' = A'_i \ddot{q}_i + B', \quad (19)$$

式中

$$A'_i = A_i + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20)$$

$$B' = B + \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (21)$$

若 A_i 满足对称性条件(4),则 A'_i 同样满足条件(4),

$$\frac{\partial A'_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial A'_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

4. 同一系统 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 与 $\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ 之间的关系

设系统标准的 Lagrange 函数为

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (23)$$

运动微分方程为

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(L) &= E_i(L) \\ &= h_{ij}\ddot{q}_j + g_i = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (24)$$

式中,

$$E_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (25)$$

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

$$g_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (27)$$

h_{ij} 是对称的,即

$$h_{ij} = h_{ji}, \quad (28)$$

对非奇异系统

$$\det(h_{ij}) \neq 0, \quad (29)$$

从方程(24)可以解出

$$\ddot{q}_i = f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (30)$$

式中

$$f_i = -h_{ij}^{-1}g_j. \quad (31)$$

若(1)式 $\bar{L}$ 和(23)式 L 描述同一个系统动力学特征,方程(10)和(30)应当相同,方程(5)和(24)之间应该有下列关系:

$$M_{ij}\ddot{q}_j + N_i = T_{ik}(h_{kj}\ddot{q}_j + g_k). \quad (32)$$

其中矩阵 T_{ik} 是非奇异的,

$$\det(T_{ik}) \neq 0, \quad (33)$$

其矩阵元 T_{ik} 可以是 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ 和 t 的函数,也可以是常数,最简单的情况是 T_{ik} 为单位矩阵,即

$$T_{ik} = \delta_{ik}. \quad (34)$$

原则上,利用下列关系式

$$\begin{aligned} M_{ij} &= T_{ik}h_{kj}, \\ N_i &= T_{ik}g_k \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (35)$$

可以从已知的 $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 构造出 $\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$,或者从已知的 $\bar{L}$ 构造出 L .由于 $\bar{L}$ 和 L 得到的运动微分方程等效,故 $\bar{L}$ 和 L 是一种新型的等效的 Lagrange 函数.

函数 $\bar{L}$ 中系数 A_i 的对称性质(4)及其在规范变换下保持不变的特点,给出了另外一个直接的 $\bar{L}$ 与 L 的关系,利用这个关系可以简便地使 L 和 $\bar{L}$ 相互转换.设规范变换(13)式中规范变换函数 G 满足下列条件

$$A'_i = A_i + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (36)$$

即

$$A_i = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

就可以得到

$$\bar{L}' = \bar{L} + \dot{G} = B' = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (38)$$

这就是说,如果已知 $\bar{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$,从方程(36)求得规范变换函数 G ,则可构造出等效的规则 Lagrange 函数 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.反之亦然,已知 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$,则可通过规范变换得到

$$\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \dot{G}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (39)$$

式中规范变换函数 G' 并不要求与 L 之间满足特殊

关系,但 G' 中应包含 $\dot{q}_i$.

5. 举 例

例 1 阻尼运动

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} = 0 \quad (\gamma = \text{const} > 0). \quad (40)$$

设加速度相关的 Lagrange 函数为

$$\bar{L} = A\ddot{q} + B, \quad (41)$$

确定 A 和 B 的方程(12)为

$$\begin{aligned} & -\gamma \dot{q} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}^2} - \frac{\partial 2A}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial \dot{q}} - 2 \frac{\partial A}{\partial q} \right) \\ & - \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \dot{q}^2 + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial \dot{q}} \right) \dot{q} \\ & + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \dot{q}} - \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

为简化求解,对 A 或 B 做一定假设,例如

1) 设 $B=0$,则得

$$\begin{aligned} A &= \dot{q} e^{\gamma t}, B = 0, \\ \bar{L} &= \dot{q} \ddot{q} e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (43)$$

2) 设 $B = -A\dot{q} = \gamma \dot{q} A$,则得

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} q e^{\gamma t}, B' = \frac{1}{2} \gamma q \dot{q} e^{\gamma t}, \\ \bar{L}' &= \frac{1}{2} q (\ddot{q} + \gamma \dot{q}) e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (44)$$

例 2 平面谐振子

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0, \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0. \quad (45)$$

其标准 Lagrange 函数之一为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2). \quad (46)$$

取规范变换函数

$$G = -\frac{1}{2}(q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2), \quad (47)$$

则得与加速度相关的 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L + \dot{G} \\ &= -\frac{1}{2}(q_1 \ddot{q}_1 + q_2 \ddot{q}_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2) \\ &= -\frac{1}{2}q_1(\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}q_2(\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2), \end{aligned} \quad (48)$$

这是(18)式类型的 Lagrange 函数.

平面谐振子另一个标准 Lagrange 函数为

$$L' = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \omega^2 q_1 q_2, \quad (49)$$

取规范变换函数

$$G' = -\frac{1}{2}(q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1), \quad (50)$$

则得另一个与加速度相关的 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \bar{L}' &= -\frac{1}{2}(q_1 \ddot{q}_2 + q_2 \ddot{q}_1) - \omega^2 q_1 q_2 \\ &= -\frac{1}{2}q_1(\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2) - \frac{1}{2}q_2(\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1). \end{aligned} \quad (51)$$

6. 结 论

本文研究经典力学中 Lagrange 函数的宗量可否含有加速度 $\ddot{q}_i$ 的问题,得到如下结果:

1) 力学系统 Lagrange 函数宗量可以包含加速度 $\ddot{q}_i$. 若函数 $\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ 是 $\ddot{q}_i$ 的线性函数,且 $\ddot{q}_i$ 的系数 A_i 满足对称条件(4)时,系统的 Lagrange 方程

仍为 q_i 的二阶微分方程组. 对非奇异系统,即条件(9)成立时,全部 $\ddot{q}_i$ 可以从方程中解出.

2) 从系统运动微分方程出发构造对应的 Lagrange 函数是 Lagrange 力学逆问题. 本文给出直接构造加速度相关 Lagrange 函数的方法,并指出利用规范变换,可以简化计算过程. 构造与加速度相关的 Lagrange 函数是一类新型的 Lagrange 力学逆问题.

3) 系统不含 $\ddot{q}_i$ 的 Lagrange 函数 $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 和含 $\ddot{q}_i$ 的 Lagrange 函数 $\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ 描述同一系统的动力学特征,导出相同或等效的运动微分方程,因而 L 和 $\bar{L}$ 之间是一种新型的等效关系. 本文导出了两者之间的联系,重要的是,对称条件(4)表示 L 和 $\bar{L}$ 之间可由推广的规范变换相联系,可以简捷地从一种 Lagrange 函数变换到另一种. 由此可以认为,本文给出了从力学系统运动微分方程出发,经过构造含加速度 Lagrange 函数的中间环节,最终构造出标准的 Lagrange 函数的新方法.

[1] Goldstein H, Poole C, Safko J 2002 *Classical Mechanics* (3rd ed.) (Redwood City: Addison-Wesley)

[2] Li D M, Chen C M 2006 *Classical Mechanics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [李德明、陈昌民 2006 经典力学(北京:高等教育出版社)]

[3] de Leon M, Rodrigues P R 1985 *Generalized Classical Mechanics and Field Theory* (Amsterdam: North Holland Mathematics Studies)

[4] Luo S K, Zhang Y F, et al 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发等 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[5] Mei F X, Wu H B, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1662

[6] Wu H B, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 2391

[7] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 2845

[8] Wu H B, Zhang Y F, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4987 (in Chinese) [吴惠彬、张永发、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 4987]

[9] Ding G T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]

[10] Ding G T 1990 *J. Anhui Normal Univ.* **13** 30 (in Chinese) [丁光涛 1990 安徽师范大学学报 **13** 30]

Acceleration-dependent Lagrangians in classical mechanics

Ding Guang-Tao[†]

(College of Physics and Electronic Information , Anhui Normal University , Wuhu 241000 , China)

(Received 1 September 2008 ; revised manuscript received 22 October 2008)

Abstract

The linear acceleration-dependent Lagrangians are studied. Under the symmetric conditions of coefficients in acceleration terms, the Lagrange's equations remain second-order differential equations. The approach to constructing an acceleration-dependent Lagrangian from its equations of motion is presented. The relations between the acceleration-dependent Lagrangians and the acceleration independent ones of the same system are studied. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords : Lagrange's equations, acceleration-dependent Lagrangians, generalized mechanics, gauge transformations of Lagrangians

PACC : 0320

[†] E-mail : dgt695@sina.com