二维均匀流作用的线性表面张力-重力短峰波解析解*

黄 虎†
(上海大学上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

(2008 年 9 月 6 日收到;2008 年 10 月 29 日收到修改稿)

考虑二维均匀流的作用,寻找到有限水深线性表面张力-重力短峰波系统的解析解.进而从中发现广义 Doppler 频移关系和广义色散关系.而且,广义本征频率直接与均匀流相关,具有对偶值,富于变化性.

关键词:表面张力-重力短峰波,二维均匀流,广义 Doppler 频移关系,广义色散关系
PACC:0340K,0200,9210H

1. 引　　言

在海洋表面波运动中,波-流相互作用是普遍的作用机制,其表现形态纷繁多样[1,2].为此需要从波、流最为基本的运动形式入手,以线性动力系统的观点加以研究.目前在理想的二维长峰波理论框架体系下[3—5],派生出了著名的 Doppler 频移关系.它是以二维均匀流为代表特征,同时涉及到水波系统中最为紧要的本征(相对)频率色散关系.近三十年来,一种比传统的二维长峰波更为实际、最为基本的三维波态——短峰波(short-crested waves),逐渐备受人们的关注[6—10].最近,黄虎[11]在考虑一维均匀流的条件下,构造出表面张力-重力短峰波的一般线性动力系统,并得其解析解.

本文欲将文献[11]的研究结果推广至典型的二维均匀流.以此,考查、确定和分析该短峰波系统的 Doppler 频移关系和本征频率色散关系将发生怎样的变化.

2. 系统描述

在水平坐标为(x,y)、垂直坐标为 z(向上为正)的空间直角坐标系 $O(x,y,z)$下,波数为 k、与 y 轴成 β 角的一列波倾斜入射 x 轴(相当于一垂直防浪墙)、再以 β 角完全反射,并伴随水平二维均匀流运动(U,V),由此形成一综合的表面张力-重力短峰波系统(图 1).其总速度势 $\Phi(x,y,z,t)$可表示为

$$\Phi(x,y,z,t) = Ux + Vy + \phi(x,y,z,t), \quad (1)$$

其中 ϕ 刻画波运动.该短峰波系统的线性控制方程组如下:

$$\nabla^2\phi = 0, -d \le z \le 0, \quad (2)$$

$$g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} + U\frac{\partial\phi}{\partial x} + V\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + V\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0,$$

$$z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, z = -d, \quad (5)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, y = 0, \quad (6)$$

其中 $\zeta(x,y,t)$, d, T 分别代表自由表面高度、常水深和表面张力系数,g, ρ 则分别为重力加速度和流体密度,拉普拉斯算子$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

在该系统中,短峰波呈现出沿着 x 和 y 方向的双周期波动,可回归为两种极限情形的二维波 沿 x

* 全国优秀博士学位论文作者专项资金(批准号:200428)、上海市教委科研创新基金(批准号:08YZ05)和上海市重点学科建设(批准号:Y0103)资助的课题.

† E-mail:hhuang@shu.edu.cn

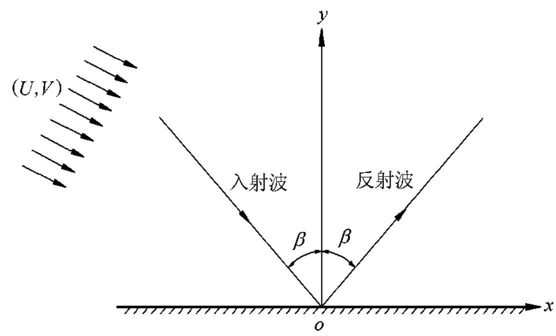

图1 二维均匀流作用的短峰波

方向的 Stokes 行波和沿 y 方向的驻波.从而,可设置位相变量

$$X = kx\sin\beta - \omega t, Y = ky\cos\beta, Z = z, \tag{7}$$

其中 ω 为入射波、反射波的角频率.由此,可将(2)—(6)式以(X,Y,Z)重构为

$$k^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\sin^2\beta + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\cos^2\beta\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial Z^2} = 0,$$

$$-d \leqslant Z \leqslant 0, \tag{8}$$

$$g\zeta - \omega\frac{\partial\phi}{\partial X} + kU\frac{\partial\phi}{\partial X}\sin\beta + kV\frac{\partial\phi}{\partial Y}\cos\beta$$

$$-\frac{T}{\rho}k^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial X^2}\sin^2\beta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\cos^2\beta\right) = 0,$$

$$Z = 0, \tag{9}$$

$$-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial X} + kU\frac{\partial\zeta}{\partial X}\sin\beta$$

$$+ kV\frac{\partial\zeta}{\partial Y}\cos\beta - \frac{\partial\phi}{\partial Z} = 0,$$

$$Z = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z} = 0, Z = -d, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = 0, Y = 0. \tag{12}$$

3. 解析解

求解短峰波系统(8)—(12),可得到

$$\zeta(X, Y, t) = A\cos Y\cos X, \tag{13}$$

$$\phi(X, Y, Z, t) = \frac{A\omega_{\mathrm{r}}}{k}\frac{\cosh k(Z + d)}{\sinh kd}\cos Y\sin X, \tag{14}$$

$$\omega = \omega_{\mathrm{r}} + k(U\sin\beta + V\tan Y\cot X\cos\beta), \tag{15}$$

$$\omega_{\mathrm{r}}^2 + p\omega_{\mathrm{r}} - q = 0. \tag{16}$$

其中 ω 意指表观(绝对)频率,ω_{r} 即代表本征频率,并且

$$p = \frac{2kV\tan Y}{\sin 2X}\cos\beta,$$

$$q = gk(1 + \kappa)\tanh kh, \kappa = \frac{Tk^2}{\rho g}. \tag{17}$$

据此,可以看出,(13)和(14)式虽然依旧分别保持着自由表面高度和速度势的经典表达形式,但其所蕴涵的广义 Doppler 频移关系(15)和广义色散关系(16)却在保留经典中多有发展,尤其是本征频率 ω_{r} 直接相关于二维均匀流分量 V,这些都是新发现,正反映出该波-流相互作用系统的内在特性和包容性,同时也表明了将一维均匀流推广至二维的非同寻常价值之所在.求解(16)式,可得

$$\omega_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\left[-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}\right],$$

$$\omega_r^2 = q\left[1 + \frac{p^2}{2q} \pm \frac{p}{\sqrt{q}}\sqrt{1 + \frac{p^2}{4q}}\right]. \tag{18}$$

由(18)式可知,本征频率 ω_{r} 可具有对偶值,其绝对值一般不相同.这是不平凡的.因为 q 始终为正数,p 可正、可负,甚至为 0,则 ω_{r} 可具有以下典型的对偶值:

1)若 $p>0$,则 $\omega_{\mathrm{r}}^+>0$,$\omega_{\mathrm{r}}^-<0$;

2)若 $p<0$,则 $\omega_{\mathrm{r}}^+<0$,$\omega_{\mathrm{r}}^-<0$;

3)若 $p=0$,则 $\omega_{\mathrm{r}} = \pm\sqrt{q}$.

显然,经典的二维长峰波系统可包容于第 3 种情形.对此,Peregrine[1] 曾在其著名的‘波-流相互作用’评述中指出了为同一绝对值的两个正、负本征频率的物理意义.因此,可以推知:现在所得到的本征频率对偶值的多样性,预示着三维短峰波更为丰富的内涵和奇异性.

最后,当 $V=0$,即 $p=0$ 时,上述结果即简化为一维均匀流作用下的线性表面张力-重力短峰波系统[9].它本身又可包含若干种经典、代表性和最新的波况特例.

4. 结 论

本文着眼于普遍的波-流相互作用机制,将基本的二维均匀流纳入线性表面张力-重力短峰波系统中,成功寻找到其解析解.从而发现了广义 Doppler 频移关系和广义本征频率色散关系.由于它们是在最为基本、又是线性的近岸动力环境条件下所得到的,就更具有第一性的实质意义.以此就为非线性表面张力-重力短峰波系统的构造、求解和分析提供了一个不可或缺的理论基础.

[1] Peregrine D H 1976 *Advances of Applied Mechanics* **16** 9
[2] Smith J A 2006 *J. Physical Oceanography* **36** 1403
[3] Phillips O M 1977 *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge: Cambridge University Press)
[4] Mei C C, Stiassnie M, Yue D K P 2005 *Theory and Applications of Ocean Surface Waves* (Singapore: World Scientific)
[5] Shen S F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1016 [沈守枫 2006 物理学报 **55** 1016]
[6] Hsu J R C, Tsuchiya Y, Silvester R 1979 *J. Fluid Mech.* **90** 179
[7] Kimmoun O, Ioualalen M 2002 *J. Physical Oceanography* **32** 1331
[8] Fuhrman D R, Madsen P A 2006 *J. Fluid Mech.* **559** 391
[9] Jian Y J, Zhan J M, Zhu Q Y 2008 *European Journal of Mechanics B/Fluids* **27** 346
[10] Huang H 2009 *Dynamics of Surface Waves in Coastal Waters* (Beijing-Heidelberg: Higher Education Press-Springer)
[11] Huang H 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 1759 (in Chinese) [黄 虎 2008 科学通报 **53** 1759]

An analytical solution for two-dimensional uniform currents on linear surface capillary-gravity short-crested waves*

Huang Hu†
(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)
(Received 6 September 2008; revised manuscript received 29 October 2008)

Abstract

By considering the effect of two-dimensional uniform currents, a solution for linear surface capillary-gravity short-crested waves in water of finite depth is obtained. Both a generalized Doppler-shift relation and a generalized dispersion relation are first found, and the generalized intrinsic frequency with variety in dual values is directly correlated with the uniform currents.

Keywords: surface capillary-gravity short-crested waves, two-dimensional uniform currents, a generalized Doppler-shift relation, a generalized dispersion relation
PACC: 0340K, 0200, 9210H

* Project supported by the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (Grant No. 200428), the Scientific Research Innovation Fund of the Shanghai Education Committee, China (Grant No. 08YZ05), and the Shanghai Leading Academic Discipline Program, China (Grant No. Y0103).

† E-mail: hhuang@shu.edu.cn