

外势场作用下的玻色-爱因斯坦凝聚 啁啾孤子的演化与操控^{*}

宗丰德 杨 阳 张解放[†]

(浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)

(2008 年 8 月 15 日收到, 2008 年 10 月 21 日收到修改稿)

提出了一种处理玻色-爱因斯坦凝聚啁啾孤子动力学的拓展变分方法, 深入研究了玻色-爱因斯坦凝聚孤子在周期势与抛物势联合作用下的动力学演化. 利用拓展变分法给出了解析处理, 并和基于分步傅里叶变换的直接数值法进行比较, 发现这种拓展变分方法能够充分揭示上述外势场中的玻色-爱因斯坦凝聚啁啾孤子的动力学行为和特征. 同时给出了能支持多稳定晶格囚禁玻色-爱因斯坦凝聚啁啾孤子的周期势与抛物势强度比值的临界值和一种通过控制外势场可有选择地移动玻色-爱因斯坦凝聚啁啾孤子的操控方法, 这为玻色-爱因斯坦凝聚的实验和应用研究提供了理论参考.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, Gross-Pitaevskii 方程, 啁啾孤子, 操控

PACC: 0365, 0290

1. 引言

自从稀薄碱金属蒸气中首次通过实验实现玻色-爱因斯坦凝聚(BECs)以来^[1], 对 BEC 的实验和理论研究已经取得巨大进展. 它们中的多数研究都已把目标锁定在开发、操控和揭示宏观量子现象上^[2-19]. 的确, BECs 已被人们用于研究各种各样的宏观量子现象中, 如相位相干^[20-23]、物质波衍射^[24]、量子逻辑^[25-27]、物质波传输^[28, 29]、物质波格栅和脉冲物质波激光^[30]等. 随着 BEC 实验不断取得进展, 激起了人们对与宏观量子现象相关应用的浓厚兴趣. 而在这些应用中对物质波孤子的操控是一个重要的课题. 一般而言, 排斥的 BECs 已被实验证实是稳定的, 而且生存时间已从秒跨越到分的量级^[20]. 但是, 吸引的 BECs 也已被证实是更难控制, 而且在三维的情形下崩塌^[31]. 然而, 吸引的 BECs 在一维的情形下却是稳定的^[32, 33]. 由于产生吸引或排斥的 BECs 可通过 Feshbach 共振来有效加以调控^[34], 因此, 在 BEC 物质波的研究过程中通过调节外势场来操控凝聚体已成为一个中心主题.

本文致力于在周期势与抛物势共同作用下 BEC

孤子动力学演化和操控的研究. 特别是, 我们将已被广泛应用于光孤子等领域的变分方法^[35-37]作为研究带外势场的非线性 Schrödinger 方程的孤子演化模型, 提出了一种处理 BEC 孤子动力学的拓展变分方法, 把控制 BEC 系统动力学的非线性偏微分方程降阶为更简单的以揭示振幅、啁啾、中心位置和中心频率波动为特征的 4 个耦合非线性微分方程, 从而得到了 BEC 啁啾孤子在周期势与抛物势作用下的动力学演化规律. 对于周期势中的 BEC 啁啾孤子的动力学行为, 让它囚禁于多稳定晶格势槽中始终是我们最感兴趣的. 我们发现只要周期势与抛物势的强度满足一定条件, 总能让 BEC 啁啾孤子稳定囚禁于多晶格势槽中. 这就证实了存在能支持多晶格稳定囚禁 BEC 啁啾孤子的周期势与抛物势强度比值的临界值. 我们还发现这种多晶格稳定囚禁 BEC 啁啾孤子现象的周期势与抛物势强度比值的临界值随多稳定晶格势槽数目的不同而改变. 我们还研究了多稳定晶格势槽中 BEC 啁啾孤子可有选择地被移动的动力学特性, 发现只要通过合理调节外势场, 总能根据需要移动 BEC 啁啾孤子, 同时对这种 BEC 啁啾孤子的移动现象, 拓展变分法的分析同样显得十分充分.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10672147)和浙江省自然科学基金(批准号: Y605312, Y1080959)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jf_zhang@zjnu.cn

需要指出的是,既然势场强度的临界值可以作为孤子能量的间接测量,那么人们就能利用处在多晶格势槽中 BEC 啁啾孤子测量出孤子物质波的能量,进而测量出产生周期势的入射激光的临界光强.我们希望这能为实验的实现提供理论指导.

2. BEC 的控制方程和变分动力学系统

在一维雪茄模型下吸引的 BEC 宏观波函数在理论上已被成功地描述为带外势 $V(x)$ 的非线性 Schrödinger 方程(NLS)^[32](Gross-Pitaevskii 方程^[38,39])

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u - V(x)u = 0, \quad (1)$$

其中 $u(x, t)$ 是 Hartree-Fock 近似下的规范复数平均场变量^[40], 外势场 $V(x)$ 是实函数. 这里我们考虑的是周期势与抛物势组成的复合势^[20,21], 具体形式为

$$V(x) = V_0 \sin^2[k(x - \bar{x})] + V_1 x^2, \quad (2)$$

式中 V_0 和 V_1 分别是周期势与抛物势的强度, 参数 k 是产生周期势的入射激光的波数, 参数 $\bar{x}$ 是周期势的最小值和抛物势的最小值之间的最小偏移量. 通过调节上述 4 个参数, 就可得到所需要的各种囚禁 BEC 的势场. 在方程(1)和(2)中, 我们已经引入了无量纲变量 $t = \omega_\perp t'$, $x = x'/a_\perp$, $u = \sqrt{2|a_s|}u'$, $V(x) = V'/\hbar\omega_\perp$, $V_0 = V'_0/\hbar\omega_\perp$, $V_1 = V'_1/\hbar\omega_\perp = \omega_x^2/2\omega_\perp^2$, $\bar{x} = \bar{x}'/a_\perp$ 和 $k = k'a_\perp$. 而 $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ 是横向谐振子长度, m 是原子质量, $\omega_\perp$ 是横向谐振动角频率, a_s 是 s-波散射长度, ω_x 是轴向振动角频率. 值得指出的是, 本文关注的是在实验中采用的一维光晶格轴向 x 有限范围内和某些参数条件下可使周期势大于抛物势, 因此上述外势场(2)式总是有界的^[41,42].

我们知道, 当 $V(x)=0$ 时, 控制方程(1)就还原为标准的非线性 Schrödinger 方程, 而它支持孤子解^[43]. 如同流体力学、等离子体和非线性光学一样, 在 BEC 理论中单孤子解同样是非常受关注的. 特别是在确定系统的动力学行为和稳定性方面, 单孤子解扮演着关键的角色. 我们下面将要提出的拓展变分法, 由于它能捕捉到驱使单孤子的振幅-宽度波动的二次相位(啁啾)变化的信息, 因此它能高质量地揭示出系统的动力学特征.

接着我们拓展已被广泛应用于哈密顿系统的变分法. 对于控制方程(1), 拉格朗日密度为^[35]

$$L = i \left(u \frac{\partial u^*}{\partial t} - u^* \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - |u|^4 + 2V(x)|u|^2. \quad (3)$$

由于选用高斯函数与双曲正割函数作为单孤子试探解的差异非常小^[44], 为了简化下面的计算, 因此我们选取试探解为

$$u = A\sqrt{\eta} \exp[-\eta^2(x - x_0)^2 + i[\beta(x - x_0)^2 + \xi(x - x_0) + \phi]], \quad (4)$$

其中参量 η , β , x_0 , ξ 和 ϕ 分别是振幅、啁啾、中心位置、中心频率和绝对相位, 且都随时间 t 变化. 而规范化常数 A 的大小由实验给定的被囚禁 BEC 原子总数目决定.

尽管试探解(4)式给出了一个 BEC 的定域解, 但物理上要求定域解的宽度要比周期势的周期小得多, 只有这样, 才能确保变分动力学系统提供对 BEC 动力学系统的很好近似. 这就要求周期势的波数 k 要远小于试探解的振幅-宽度参量 η , 即

$$\frac{k}{\eta} \ll 1, \quad (5)$$

这意味着, 在定域解中心附近, $\sin^2[k(x - \bar{x})]$ 近似为 $[k(x - \bar{x})]^2$, 对于很大的周期势强度, 近似后的势函数位形类似于一系列中心在不同位置的抛物势. 当周期势与抛物势强度比值大于某一临界值时, 定域解才能被稳定囚禁于势场的晶格势槽中. 至于周期势与抛物势强度比值的临界值问题将在下一部分中详细讨论.

先把试探解(4)式代入(3)式可求得平均拉格朗日函数^[35] $L = \int_{-\infty}^{\infty} L dx$, 然后再结合条件(5)式, 应用欧拉-拉格朗日公式 $\delta L/\delta p = 0$ (其中 p 是参量 η , β , x_0 和 ξ 之一) 推得降阶的 BEC 变分动力学系统为

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\eta\beta, \quad (6)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \xi(\eta^4 - \beta^2) - \frac{A^2\eta^3}{\sqrt{2}} - V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_0)] - V_1, \quad (7)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \xi, \quad (8)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -2V_1 x_0 + V_0 k \sin[2k(\bar{x} - x_0)]. \quad (9)$$

在上述推导过程中, 考虑了条件(5)式, 做了简化处理 $\exp[-k^2(2\eta^2)] \approx 1$. 正是这个简化让我们拓展了文献[36,37]中的结果, 使得对 BEC 动力学系统的稳定性分析变得便捷. 上述 4 个耦合非线性微分

方程反映了振幅、啁啾、中心位置和中心频率的相互作用. 应该强调的是, 从方程(6)可以看出, 正是这个与振幅耦合的唯一动力学参量——啁啾导致了振幅的波动. 顺便说明一下, 由于控制方程(1)与坐标 t 相关的非平凡相位不变性, 因此在 BEC 变分动力学系统(6)–(9)式中没有考虑绝对相位 ϕ 这一参量.

3. 结果和讨论

为了证实拓展变分方法对于描述在周期势与抛物势作用下 BEC 啁啾孤子动力学的充分性, 我们将 BEC 变分动力学系统(6)–(9)式的数值解与基本 NLS 方程的直接数值仿真比较. 这里我们利用分步傅里叶变换直接数值仿真 NLS 方程^[45], 同时监控基本守恒量和孤子的能量, 同时又利用自适应步长控制的 Runge-Kutta 方法数值求解 BEC 变分动力学系统(6)–(9)式^[46].

对于处理像 BEC 变分动力学系统(6)–(9)式

这样的耦合非自治非线性微分方程的基本思路是: 先求出静态解, 然后再分析该静态解的线性稳定性^[47]. 为此, 先令

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{dx_0}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

可得下列静态解 $(\eta_0, \beta_0, x_{00}, \xi_0)$ 的代数方程组为

$$\beta_0 = 0, \quad (10)$$

$$2\eta_0^4 - \frac{A^2\eta_0^3}{\sqrt{2}} - V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})] - V_1 = 0, \quad (11)$$

$$\xi_0 = 0, \quad (12)$$

$$2V_1 x_{00} - V_0 k \sin[2k(\bar{x} - x_{00})] = 0. \quad (13)$$

对于确定的 BEC 动力学系统和具体的外势场 $V(x)$, 只要把参数 A, V_0, V_1, k 和 $\bar{x}$ 代入方程(10)–(13), 就能得到相应的静态解.

然后, 对求得的静态解 $(\eta_0, \beta_0, x_{00}, \xi_0)$ 进行线性稳定性分析. 对方程(6)–(9)进行线性分析可得

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta\eta}{dt} \\ \frac{d\Delta\beta}{dt} \\ \frac{d\Delta x_0}{dt} \\ \frac{d\Delta\xi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\eta_0 & 0 & 0 \\ 8\eta_0^3 - \frac{3A^2\eta_0^2}{\sqrt{2}} & 0 & -2V_0 k^3 \sin[2k(\bar{x} - x_{00})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2V_1 - 2V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\beta \\ \Delta x_0 \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中线性化矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -2\eta_0 & 0 & 0 \\ 8\eta_0^3 - \frac{3A^2\eta_0^2}{\sqrt{2}} & 0 & -2V_0 k^3 \sin[2k(\bar{x} - x_{00})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2V_1 - 2V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})] & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

通过计算线性化矩阵(15)式, 得到特征方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \{2V_1 + 2V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})]\} \\ & + 16\eta_0^4 - 3\sqrt{2}A^2\eta_0^3\} \lambda^2 \\ & + 2\eta_0(16\eta_0^3 - 3\sqrt{2}A^2\eta_0^2) \\ & \times \{V_1 + V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})]\} = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

求解特征方程(16), 得到4个特征值解

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{16\eta_0^4 - 3\sqrt{2}A^2\eta_0^3}, \quad (17)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2V_1 + 2V_0 k^2 \cos[2k(\bar{x} - x_{00})]}. \quad (18)$$

根据线性稳定性分析理论^[47]可知, 如果4个特征值都是纯虚数, 那么对应的静态解是稳定的. 如果有一个特征值是实数, 那么对应的静态解将显现鞍形结构且是不稳定的.

为了在下面的静态解稳定性分析中能更好地抓住物理本质, 把(10)–(13)式代入(17)和(18)式并改写4个特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\sqrt{2}A^2\eta_0^3 + 8V_1\left(1 + \frac{V_0 k^2}{V_1} \cos[2k(\bar{x} - x_{00})]\right)}, \quad (19)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{2V_1 \left(1 + \frac{V_0 k^2}{V_1} \cos[2k(\bar{x} - x_{00})] \right)}, \quad (20)$$

从 (19) 和 (20) 式可以清楚地看出, 比值 $\frac{V_0 k^2}{V_1}$ 将对静态解的稳定性分析起到关键的作用. 如果比值 $\frac{V_0 k^2}{V_1} < 1$, 那么 4 个特征值都是纯虚数, 静态解是稳定的. 不过此类情形只能产生一个稳定晶格势槽囚禁 BECs. 但如果 $\frac{V_0 k^2}{V_1} > 1$, 随着中心位置 x_0 的变化, 余弦函数将出现周期性振荡, 使得特征值 λ_3 和 λ_4 在纯虚数(静态解是稳定的)和纯实数(静态解是不稳定的)之间转换. 正是这一类情形才为实现多稳定晶格势槽囚禁 BECs 提供了可能. 要产生精确的多稳定晶格势槽的数目, 对于确定的外势场参数, 必须要求比值 $\frac{V_0 k^2}{V_1}$ 大于某一临界值. 并且这个精确的多稳定晶格势槽的数目越大, 要求这个临界比值也越大. 图 1 描述了产生精确的多稳定晶格势槽的数目对应的外势场 $V(x)$ 与位置 x 之间的关系. 在图 1 中, 我们选择参数为: $k = 0.1$, $\bar{x} = 1.25\pi$, $\frac{V_0 k^2}{V_1} = 10$ (对应于图 1(a)), $\frac{V_0 k^2}{V_1} = 20$ (对应于图 1(b)) 和 $\frac{V_0 k^2}{V_1} = 30$ (对应于图 1(c)) 对应的稳定晶格势槽的数目分别为 3、5 和 7. 需要指出的是, 图 1 中描述的外势场 $V(x)$ 是关于 $x = 0$ 非对称的. 如果 $\bar{x} = \pm \frac{n\pi}{k}$ (n 是整数), 那么外势场 $V(x)$ 就关于 $x = 0$ 对称, 但对应的稳定晶格势槽的数目没有变化.

下面, 我们考虑一般情形, 选取图 1(b) 参数来讨论 BEC 啁啾孤子的动力学行为. 对应的 5 个稳定晶格势槽(或稳定静态解)的中心位置分别是 $-55.94, -26.16, 3.74, 33.63$ 和 63.33 . 图 2 和图 3 展现了外势场最低的稳定晶格势槽中的 BEC 啁啾孤子的动力学特性. 图 2 中的 BEC 孤子初始被放置在稳定静态解的位置. 从图 2 中可以看出, 由于啁啾的波动而导致振幅的波动, 使得 BEC 啁啾孤子的演化过程显现了呼吸行为, 但 BEC 孤子的中心位置几乎没有发生变化. 图 3 中的 BEC 孤子初始被放置在稳定静态解位置的附近, 相对于图 2 中的 BEC 孤子的初始位置而言, 外势场的非对称性程度有所提高. 在图 3 中, 由于中心位置的波动频率与振幅-啁啾的

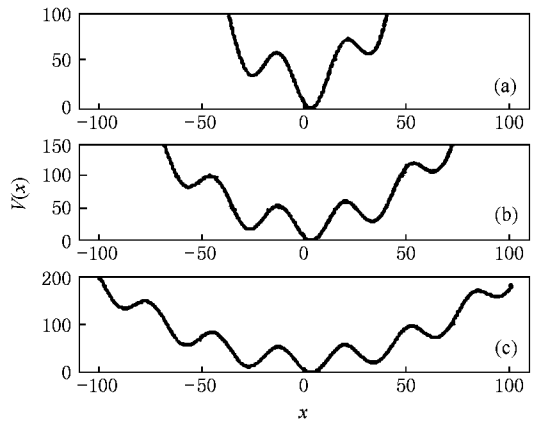


图 1 与不同稳定晶格势槽数目对应的外势场 $V(x)$ 与位置 x 之间的关系. 稳定晶格势槽数 (a) 为 3 (b) 为 5 (c) 为 7

振动频率的相互作用, 导致了振幅和啁啾出现了类似于“拍”的现象, 使得 BEC 啁啾孤子的演化过程显现出较强的振幅和中心位置波动, 但 BEC 孤子的呼吸行为依然明显. 同样, 图 4 展示了在邻近稳定晶格势槽中的 BEC 啁啾孤子的动力学特性. 在这里由于外势场的非对称性程度明显提高, 导致了 BEC 孤子动力学的非对称性程度也更为明显, 同时使得 BEC 啁啾孤子的演化过程显得更为复杂. 关于 BEC 孤子动力学的非对称性程度的变化可通过对应于图 2、3 和 4 的三维相图得到证实, 如图 5 所示. 值得强调的是, 在图 2、3 和 4 中, 基于 BEC 变分动力学系统 (6)–(9) 式的数值解和基于 BEC 控制方程 (1) 的直接仿真的结果完全符合一致.

在图 6 中, BEC 孤子初始被放置在跨越三个稳定晶格势槽的位置. 在此情形下, BEC 啁啾孤子能连续跨过这三个稳定晶格势槽在一个近似的抛物势中作振动, 由于振幅和中心位置的强烈波动, 使得 BEC 啁啾孤子的演化过程显示出很强的呼吸行为. 这一现象也被 BEC 控制方程 (1) 的直接仿真结果所证实.

其实, 对于 x 轴向弱抛物势情形, Strecker 等^[48]报道了在该情形下的亮孤子链在势阱中来回振动的观测结果. 可以推测, 加入强周期势后孤子将被稳定囚禁在某处, 这正是上述图 2、3、4 和 6 中所描述的结果.

需要指出的是: 对于本文研究的系统 (1), 在考虑了周期性振动外场并控制其强度参量^[49]和在考虑了周期性边界条件并控制其有限边界参量^[50]的情形下系统都有出现了混沌运动; 在考虑了一维加速光晶格并同时控制倾斜势场强度和晶格间隧穿参

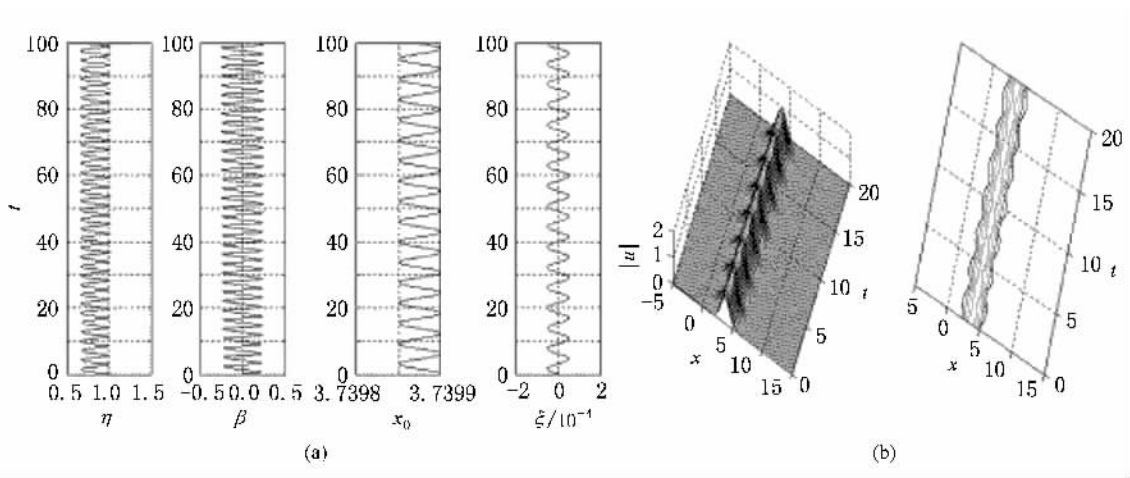


图2 初始被放置在稳定静态解位置的 BEC 啁啾孤子动力学行为 参数值分别是 $A=1.0, V_0=50.0, k=0.1, \bar{x}=1.25\pi$ 和 $V_1=0.025$; 初始条件为 $(\eta, \beta, x_0, \xi)=(1.0, 3.74, 0.0)$. (a) 基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)的数值解的参量时序图, (b) 基于 BEC 控制方程(1)的直接数值仿真的演化图和对应的轮廓图

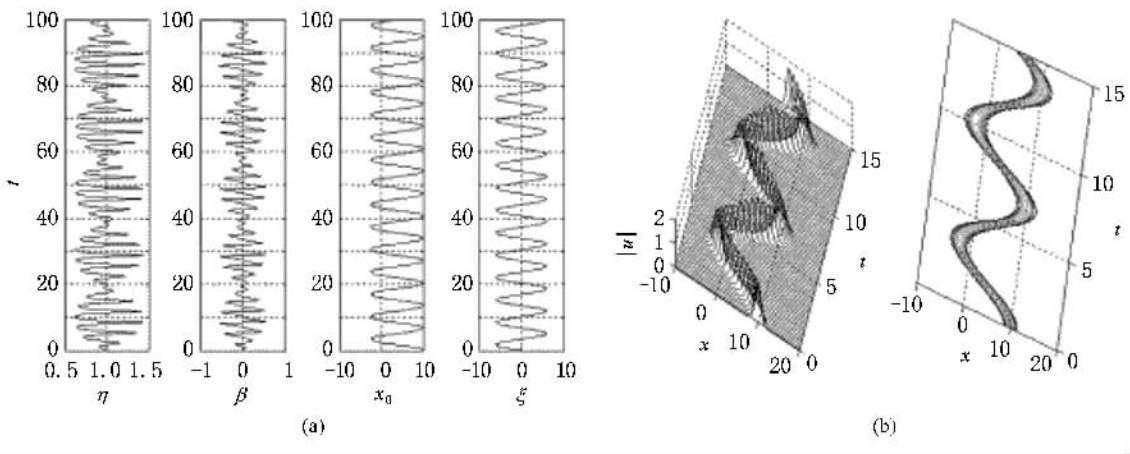


图3 初始被放置在稳定静态解位置附近的 BEC 啁啾孤子动力学行为 参数值分别是 $A=1.5, V_0=50.0, k=0.1, \bar{x}=1.25\pi$ 和 $V_1=0.025$; 初始条件为 $(\eta, \beta, x_0, \xi)=(1.0, 10.0, 0.0)$. (a) 基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)的数值解的参量时序图 (b) 基于 BEC 控制方程(1)的直接数值仿真的演化图和对应的轮廓图

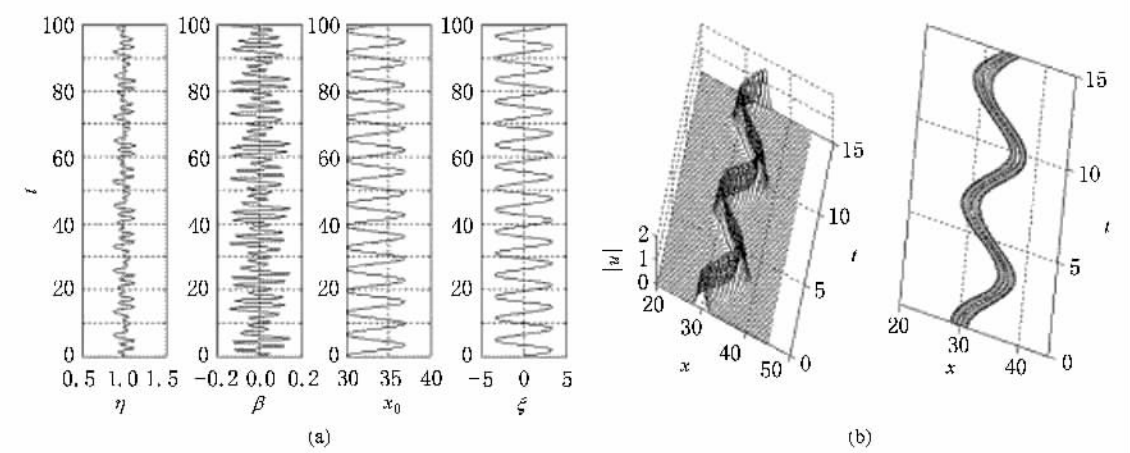


图4 初始被放置在邻近稳定晶格势槽中的 BEC 啁啾孤子动力学行为 参数值分别是 $A=1.5, V_0=50.0, k=0.1, \bar{x}=1.25\pi$ 和 $V_1=0.025$; 初始条件为 $(\eta, \beta, x_0, \xi)=(1.0, 30.0, 0.0)$. (a) 基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)的数值解的参量时序图 (b) 基于 BEC 控制方程(1)的直接数值仿真的演化图和对应的轮廓图

量的情形下系统出现了动力学不稳定性^[51]；在考虑了一维倾斜光晶格并同时控制内外势场强度参量^[41]和在考虑了一维移动光晶格并同时控制光晶格势场强度和阻尼参量^[42]的情形下系统分别出现了 Wannier-Stark 和 Melnikov 混沌等。大家知道，在 BEC 崩塌的过程中混沌出现^[52-53]，并进而毁坏 BEC 系统。因此，预测和控制混沌对于 BEC 的形成和应用都是非常重要的。我们已经发现，在周期势与抛物势联合作用下，受方程(1)控制的 BEC 啁啾孤子在大振幅和大中心位置波动的情形下出现了初值敏感问题，其稳定性详细分析正在进行中。

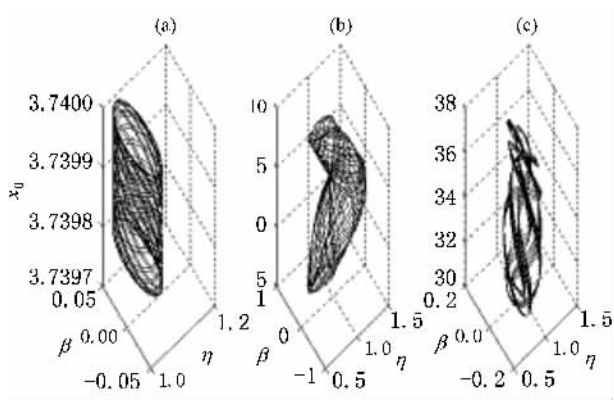


图5 对应于图2、3和4的 BEC 孤子动力学的非对称性程度变化的三维相图 (a)对应图2 (b)对应图3 (c)对应图4

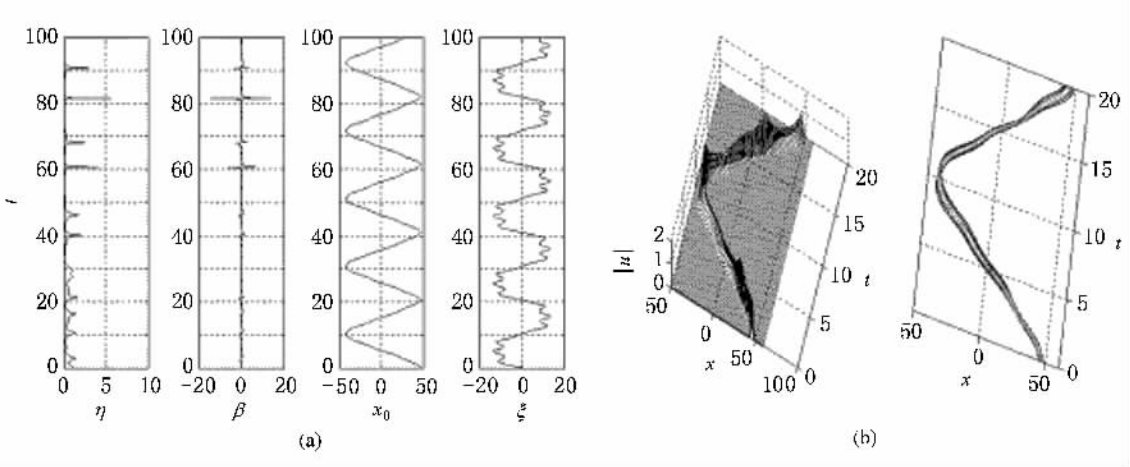


图6 初始被放置在跨越三个稳定晶格势槽位置的 BEC 啁啾孤子动力学行为 参数值分别是 $A = 1.5, V_0 = 50.0, k = 0.1, \bar{x} = 1.25\pi$ 和 $V_1 = 0.025$ 初始条件为 $(\eta, \beta, x_0, \xi) = (1.0, 46.0, 0)$ 。(a)基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)的数值解的参量时序图 (b)基于 BEC 控制方程(1)的直接数值仿真的演化图和对应的轮廓图。

4. BEC 的操控

从上面部分的讨论可知，我们提出的拓展变分方法(6)–(9)式对于受方程(1)控制的 BEC 啁啾孤子系统提供了一个有用、较精确和极为简便的描述。这不仅在理论上理解 BEC 系统的基本动力学行为取得了较大进展，还表现在基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)式数值解的求解时间比基于 BEC 控制方程(1)的直接仿真的计算时间快二至三个量级。所得到的 BEC 啁啾孤子动力学特性的理论结果对操控 BEC 动力学提供了有益的启示。

对于我们所考虑的 5 个稳定晶格势槽的情形，先确定外势场参数的比值 $\frac{V_0 k^2}{V_1}$ 大于临界值，然后通过评估 BEC 啁啾孤子所需移动的位置情况，计算出

对应的 BEC 啁啾孤子在抛物势单独存在时的振动周期^[54]。最后推算出在此情形下的抛物势强度 V_1 ，进而推得周期势的 3 个参数 V_0, k 和 $\bar{x}$ 。为了讨论问题的方便，在这里我们选择 $\bar{x} = 0$ 的情形（即外势场 $V(x)$ 关于 $x = 0$ 对称），对应的 5 个稳定晶格势槽（或稳定静态解）的中心位置分别是 $-59.64, -29.90, 0, 29.90$ 和 59.64 。具体的 BEC 啁啾孤子的操控方法^[55]是：先将 BEC 啁啾孤子放置在外势场的坐标原点左边（或右边）的某一稳定晶格势槽的静态解位置附近（或静态解位置），然后关闭周期势，让抛物势单独起作用，持续时间是移动 BEC 啁啾孤子从坐标原点左边（或右边）的某一稳定晶格势槽的静态解位置附近（或静态解位置）到坐标原点右边（或左边）的对应位置的振动半周期，最后重新开启周期势，让 BEC 啁啾孤子囚禁于右边（或左边）的对应稳定晶格势槽中，这就实现了对 BEC 啁啾孤子的有效控制。

此类情形的 BEC 啁啾孤子的动力学演化过程如图 7 (a)(b) 所示.

事实上, 本文所选取的试探解(4)与文献[56]中报道的试探解(3)在 $H_n(\xi) = 1$ 时完全一致. 该文献

从理论上解释了孤子在抛物势阱中来回振动的现象, 并得到了孤子的振动频率. 这与上面讨论的 BEC 啁啾孤子的操控方法中关闭周期势后的孤子从左(或右)到右(或左)的运动情况是一致的.

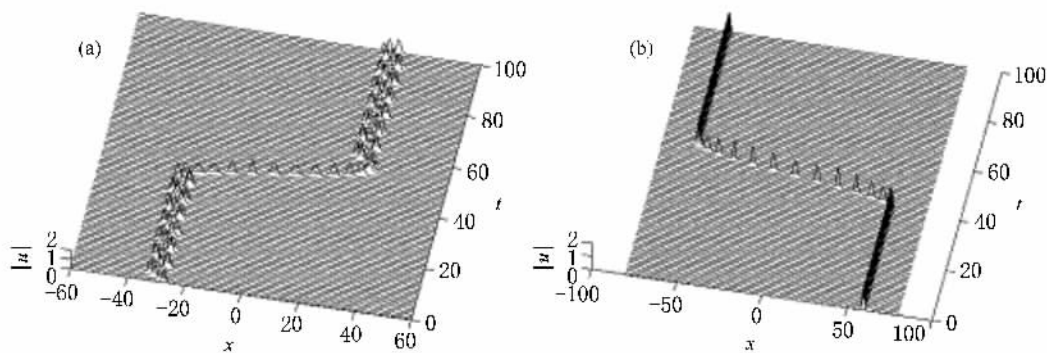


图 7 初始被放置在稳定静态解位置附近的 BEC 啁啾孤子的有效操控动力学(基于 BEC 变分动力学系统(6)–(9)的数值解的演化图) 参数值分别是 $A = 1.5$, $V_0 = 50.0$, $k = 0.1$, $\bar{x} = 0.0$ 和 $V_1 = 0.025$; 初始条件(a)为 $(\eta, \beta, x_0, \xi) = (1.0, -27.0, 0)$ (b)为 $(\eta, \beta, x_0, \xi) = (1.0, 59.64, 0)$

从上述 BEC 啁啾孤子的操控过程可以看出, 人们在开始广泛、耗时和昂贵的计算或实验研究之前, 拓展变分法(6)–(9)可对实验新思想进行有效的构建和测试. 由此可以推测, 通过使用这种拓展变分法, 人们能够预测和计算出其他更多的 BEC 控制实验.

5. 结 论

在 BEC 动力学中, 如何操控和管理各种势场中的 BECs 始终备受关注. 我们讨论了在周期势与抛物势作用下 BEC 啁啾孤子的动力学演化, 并把 BEC 系统经拓展变分法降阶为 4 个耦合非线性微分方程. 拓展变分法重点突出了振幅、啁啾、中心位置和

中心频率的相互作用, 使其对 BEC 啁啾孤子系统的描述与数值仿真的结果完全符合一致. 尤其是它对在邻近稳定晶格势槽中的 BEC 啁啾孤子产生大振幅和大中心位置波动的动力学特性的描述提供了相当精确的结果.

从实际应用的观点看, 拓展变分法又是一种揭示在周期势与抛物势作用下 BEC 啁啾孤子的控制动力学特性的极为有效的方法. 由它不仅得到了产生精确多稳定晶格势槽数目的、外势场参数决定的临界比值, 而且还得到了操控 BEC 啁啾孤子的基本方法, 并成功实现了多稳定晶格势槽间的 BEC 啁啾孤子的可选择移动. 这将为与 BEC 孤子操控相关的宏观量子现象的应用提供良好的理论依据.

- [1] Anderson M H, Matthews J R, Wieman C E 1995 *Science* **269** 198
- [2] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [3] Montina A, Arecchi F T 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023616
- [4] Fallani L, Sarto L D, Lye J E, Modugno M, Saers R, Fort C, Inguscio M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140406
- [5] Huang G X, Deng L, Hang C 2005 *Phys. Rev. E* **72** 036621
- [6] Merhasin I M, Malomed B A, Band Y B 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033614
- [7] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]

- [8] Barontini G, Modugno M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 041601
- [9] Cheng R, Liang J Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 834
- [10] Xi X Q, Liu W M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1858
- [11] Zhou X Y, Mu A X, Xue J K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3197
- [12] He Z M, Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明、王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]
- [13] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东、谢征微、张卫平 2007 物理学报 **56** 6358]
- [14] Mu A X, Zhou X Y, Xue J K 2008 *Chin. Phys.* **B** 17 764
- [15] Wang G F, Liu H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 667 (in Chinese) [王冠芳、刘红 2008 物理学报 **57** 667]

[16] Huang J S , Chen H F , Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese) [黄劲松、陈海峰、谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]

[17] Chen H J , Xue J K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3962 (in Chinese) [陈海军、薛具奎 2008 物理学报 **57** 3962]

[18] Fang Y C , Yang Z A , Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]

[19] Wen W , Zhou Y , Huang G X 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033623

[20] Anderson B P , Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686

[21] Hagley E W , Deng L , Kozuma M , Wen J , Helmerson K , Rolston S L , Phillips W D 1999 *Science* **283** 1706

[22] Chiofalo M L , Tosi M P 2000 *Phys. Lett. A* **268** 406

[23] Ma R Q , Li Y F , Shi J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4083 (in Chinese) [马瑞琼、李永放、时 坚 2008 物理学报 **57** 4083]

[24] Ovchinnikov Y B , Muller J H , Doery M R , Vredenburg E J D , Helmerson K , Rolston S L , Phillips W D 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 284

[25] Jaksch D , Bruder C , Cirac J I , Gardiner C W , Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108

[26] Yu Z X , Liang J Q , Jiao Z Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2004

[27] Brennen G K , Caves C M , Jessen P S , Deutsch I H 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1060

[28] Choi D I , Niu Q 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2022

[29] Xu J , Hai W H , Li H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2244

[30] Carr L D , Brand J 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033607

[31] Ruprecht P A , Holland M J , Burnett K , Edwards M 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4704

[32] Carr L D , Leung M A , Reinhardt W P 2000 *J. Phys. B* **33** 3983

[33] Bronski J C , Carr L D , Carretero-González R , Deconinck B , Kutz J N , Promislow K 2001 *Phys. Rev. E* **64** 056615

[34] Cornish S L , Claussen N R , Roberts J L , Cornell E A , Wieman C E 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1795

[35] Malomed B A 2002 *Prog. Opt.* **43** 69

[36] Trombettoni A , Smerzi A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2353

[37] Brand J , Kolovsky A R 2006 *Eur. Phys. J. D* **41** 331

[38] Pitaevskii L P 1961 *Sov. Phys. JETP* **13** 451

[39] Gross E P 1961 *Nuovo Cimento* **20** 454

[40] Lieb E H , Seiringer R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170409

[41] Fang J S , Hai W H 2005 *Physica B* **370** 61

[42] Chong G S , Hai W H , Xie Q T 2004 *Phys. Rev. E* **70** 036213

[43] Ablowitz M , Segur H 1981 *Solitons and the Inverse Scattering Transforms* (Philadelphia : SIAM)

[44] Kutz J N , Holmes P , Evangelides S G , Gordon J P 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 87

[45] Taha T R , Ablowitz M J 1984 *J. Comput. Phys.* **55** 203

[46] Press W H , Teukolsky S A , Vetterling W T , Flannery B P 1996 *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing* (Cambridge : Cambridge University Press)

[47] Drazin P G 1992 *Nonlinear Systems* (Cambridge : Cambridge University Press)

[48] Strecker K E , Partridge G B , Truscott A G , Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150

[49] Nozaki K , Bekki N 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1226

[50] Moon H T , Huerre P , Redekopp L G 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 458

[51] Zheng Y , Koštrun M , Javanainen J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 230401

[52] Filho V S , Gammal A , Freder T , Tomio L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 033605

[53] Saito H , Ueda M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1406

[54] Zong F D , Zhang J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2658 (in Chinese) [宗丰德、张解放 2008 物理学报 **57** 2658]

[55] Zong F D , Zhang J F 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2370

[56] Hai W H , Lee C H , Chong G S 2004 *Phys. Rev. A* **70** 053621

Evolution and controlled manipulation of a Bose-Einstein condensate chirped soliton in external potentials^{*}

Zong Feng-De Yang Yang Zhang Jie-Fang[†]

(*Institute of Nonlinear Physics , Zhejiang Normal University , Jinhua 321004 , China*)

(Received 15 August 2008 ; revised manuscript received 21 October 2008)

Abstract

An extended variational method for describing the dynamics of a Bose-Einstein condensate (BEC) chirped soliton in the presence of periodic and harmonic potentials is developed. It is shown that the BEC chirped soliton dynamics can be deduced via the extended variational method to a set of four coupled nonlinear differential equations. This deduced set of equations agrees remarkably well with full numerical simulations and highlights the dominant physical interactions in the system , namely amplitude , width , chirp , center-position , and center-frequency dynamics. The extended analytic theory provides a useful , accurate , and greatly simplified description of the governing BEC chirped soliton dynamics. It further gives the critical strength ratio of periodic to harmonic potential necessary to support multiple stable lattice sites for the BEC chirped soliton and demonstrates that the BEC chirped soliton can move selectively from one lattice site to another by simply manipulating the potentials. In addition , some interesting results for the experiments and applications of the BEC are also obtained.

Keywords : Bose-Einstein condensates , Gross-Pitaevskii equation , chirped solitons , controlled manipulation

PACC : 0365 , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672147) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant Nos. Y605312 , Y1080959).

[†] Corresponding author. E-mail : jf_zhang@zjnu.cn