

# MIMO 量子信道的空间自由度研究<sup>\*</sup>

肖海林<sup>1)†</sup> 欧阳缙<sup>2)</sup> 聂在平<sup>1)</sup>

1) 电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

2) 桂林电子科技大学信息与通信学院 桂林 541004)

(2008 年 6 月 17 日收到, 2008 年 8 月 20 日收到修改稿)

量子通信是一个量子密钥分发过程, 目前采用的通信技术严重制约了量子密钥分发的比特率. 将多输入多输出(MIMO)技术应用于量子通信系统, 提高量子密钥分发的比特率, 促进量子通信向高速大容量发展. 然而, 量子场本身不可避免地存在量子噪声约束容量的增长, 限制了可利用空间资源, 即空间自由度. 文中采用光子场的量子化和满足 Schrödinger 方程条件的电磁场波动方程推导出 MIMO 量子信道的空间自由度上限, 为开发稳健的 MIMO 量子通信空时处理算法和优化设计高性能 MIMO 量子通信系统提供理论基础和技术支持.

关键词: 多输入多输出, 量子密钥分发, Schrödinger 方程, 光子场的量子化

PACC: 0365, 4230, 4250

## 1. 引言

量子通信是通信技术的又一次划时代革命, 它在保密性、通信容量、通信距离等方面都具有十分明显的优势, 是未来通信发展的方向. 量子通信传送的是密钥而非密文本身, 是一个量子密钥分发过程<sup>[1]</sup>. 自从 Bennett 和 Brassard<sup>[2]</sup>在 1984 年首次提出利用量子力学进行量子密钥分发协议以来, 人们已提出了大量的量子密钥分发协议<sup>[3-5]</sup>. 对量子密钥分发实验的研究也迅速发展, 例如, 郭光灿等<sup>[6]</sup>利用 Faraday-Michelson 干涉方式进行了长距离、长时间、单向、稳定的量子密钥分发实验. 这种基于微弱相关光脉冲下的差分相位量子密钥分发系统, 每脉冲的密钥生成仅仅接近基于理想单光子源的 BB84 协议下的密钥生成效率, 但在抗干扰方面还存在一些问题, 密钥的安全性和生成效率还有待提高. 日本 NTT 公司利用集成非等臂 Mach-Zehnder(M-Z)干涉仪完成了 105 km 光纤量子密钥分发实验<sup>[7]</sup>. 尽管这种实验具有密钥生成效率高, 适用于泊松光源等优点, 但是, 这种集成干涉仪制作工艺复杂、价格昂贵, 并且与偏振相关, 在量子密钥分发过程中需要精密的温度控制来消除相位漂移, 因此实用化还存在一定困难. 目前采用的通信技术严重制约了量子密钥分发

的比特率, 降低量子通信系统的信道容量.

近年来, 基于 MIMO 技术的矢量传输方法提供了从根本上提高无线通信系统信道容量的新途径<sup>[8,9]</sup>, 在学术界和工业界引起了高度的重视. Hranilovic 等<sup>[10]</sup>和 Motti 等<sup>[11]</sup>提出采用 MIMO 技术进行量子信道和量子密钥分发的研究, 利用光学传输函数、调制传输函数和 MIMO 系统提高量子密钥分发的比特率和减少接收量子比特错误率来提高量子信道的系统性能. 由于研究方法过于复杂, 难以得到简洁的解析表达式. 因此, 他们对 MIMO 量子信道的理论分析也只有建立在统计的基础上, 无法从物理的角度进行解释. MIMO 系统的容量与空间自由度的数目成线型关系, 信道容量主要由空间自由度的数目决定. 这也是通信较传统的无线通信优越之处, 空间自由度也因而成为 MIMO 通信中的研究重点<sup>[12,13]</sup>. 本文将 MIMO 技术应用于量子通信系统, 实现了 MIMO 量子通信, 提高了量子密钥分发的比特率.

## 2. MIMO 量子信道的空间自由度计算

### 2.1. MIMO 量子信道中光量子本征态

光量子(也称为光子)的波动方程即 Maxwell 方

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2008CB317109)、国家高技术研究发展计划(批准号: 2002AA123032)和国家自然科学基金(批准号: 60572054)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xhl\_xiaohailin@163.com

程,光子的波函数就是矢势.由于光子是无相互作用的波色子,有许多光子处于同一态,而且还倾向于处于同一态.采用 MIMO 技术的量子通信系统存在大量的光子传输信息,当大量的光子处于完全相同的状态,波函数将具有实在的物理意义而拓展到宏观的领域<sup>[14]</sup>.首先,让我们考虑光子场的一个一般态

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_0} A_{n_1, n_2, n_3, n_0} \Psi(n_1, n_2, n_3, n_0), \quad (1)$$

这里  $A_{n_1, n_2, n_3, n_0}$  是一个数字系数,而  $\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0)$  是一个包含  $n_1$  和  $n_2$  个横光子、 $n_3$  个纵光子和  $n_0$  个时间光子的归一化本征态,利用光子湮没算符,本征态  $\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0)$  可以表示为

$$\begin{aligned} & \Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) \\ &= (n_1! n_2! n_3! n_0!)^{-1/2} \\ & \times a_1^{*n_1} a_2^{*n_2} a_3^{*n_3} a_0^{*n_0} \Psi(0, 0, 0, 0), \quad (2) \end{aligned}$$

这里  $a_1, a_2, a_3$  和  $a_0$  是能量为  $chh_0$  的光子湮没算符,  $n_1, n_2, n_3, n_0$  为光子数目,  $\Psi(0, 0, 0, 0)$  为光子归一化初始本征态,且满足附加条件

$$(a_3 - a_0)\Psi = 0. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式,可导出关系式

$$n_3^{1/2} A_{n_1, n_2, n_3, n_0-1} + n_0^{1/2} A_{n_1, n_2, n_3, n_0} - 1, n_0 = 0, \quad (4)$$

其中带有一个负下标的系数将被取为零.从(4)式可见,相应于纵光子和时间光子总数相同的各态,其系数是相互联系着的,而附加条件所允许的态是

$$\begin{aligned} \Phi(n_1, n_2, 0) &= \Psi(n_1, n_2, 0, 0), \\ \Phi(n_1, n_2, 1) &= \Psi(n_1, n_2, 1, 0) - \Psi(n_1, n_2, 0, 1), \\ \Phi(n_1, n_2, 2) &= \Psi(n_1, n_2, 2, 0) - \sqrt{2}\Psi(n_1, n_2, 1, 1) \\ &+ \Psi(n_1, n_2, 0, 2), \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(n_1, n_2, m) &= \sum_{l=0}^m (-l) \left( \frac{m!}{(m-l)! l!} \right)^{1/2} \\ &\times \Psi(n_1, n_2, m-l, l), \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $m$  表示纵光子和时间光子的总数.由此得到

$$\begin{aligned} & \Phi^*(n_1, n_2, m) \Phi(n_1, n_2, m) \\ &= \sum_{l=0}^m (-l)^l \frac{m!}{(m-l)! l!} \\ & \times \Psi^*(n_1, n_2, m-l, l) \\ & \times \Psi(n_1, n_2, m-l, l) \\ &= 0, \quad (6) \end{aligned}$$

这里  $m \neq 0$  且  $\Phi^*(n_1, n_2, 0) \Phi(n_1, n_2, 0) = 1$ , 从(6)式中可以看出附加条件含有排除纵光子和时间光子的意思.只有在光子场和其他场没有相互作用的情

况下,这个结论才是正确的,完全适合自由空间 MIMO 量子通信信道.因此,自由空间光子归一化本征态可以表示为  $\varphi(k)$ .

## 2.2. MIMO 量子信道中 Schrödinger 方程的一般形式

光子在发射体  $V_T$  内势场  $\psi(r)$  中的 Schrödinger 方程为

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \psi(r) \right] \varphi(k) = E \varphi(k), \quad (7)$$

式中  $E$  为能量的本征值.在求解上述微分方程时,要根据具体问题中的边界条件来定解.例如,束缚态的边界条件、散射态的边界条件等.同理,可以得到光子在接受体  $V_R$  内产生响应势场  $V(r)$  中的 Schrödinger 方程为

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \varphi(k) = E \varphi(k). \quad (8)$$

因此,自由空间光子波动方程可写为<sup>[15]</sup>

$$\nabla^2 V(r) + k^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial t^2} = -\varphi(r), \quad (9)$$

其中  $c$  为光速,  $k = \frac{c}{w}$ ,  $w$  是光量子的角频率.对标量波动方程(9)式需要补充说明:1)完整的电磁场全波分析应该采用矢量场波动方程,但对于某些特殊边值问题可以退化为标量方程求解,而且标量方程是矢量方程的基础;2)电磁问题的严格求解需要波动方程结合边界条件求解,对无线信道做分区求解,并认为散射体也为理想的,可近似地应用自由空间边界条件;3)波动方程(9)式中的源和响应满足 Schrödinger 方程,从数学上来说,对于任何  $E$  值,方程(7)和(8)都有解,但并非对于一切  $E$  值所得出的解  $\varphi(k)$  都满足物理上的要求.例如,对于束缚态,就要求  $\varphi(k)$  在无限远处必须为零,这样,往往只有某些  $E$  值所对应的解,才满足这些物理上的要求.这些  $E$  值称为体系的能量本征值,相应的波函数成为能量本征态函数.因此,束缚态的能谱是分立的,满足量子密钥分发原理,它是在一定的边界条件下,求解定态 Schrödinger 方程的必然结果.需强调的是,1)和2)中的假定并非是强制性的,对于任意边界条件的矢量问题,可通过修改相应的格林函数求解,故本文的分析方法在理论上适用于任意边界条件下的矢量问题,只需将标量格林函数变为相应边界条件下的矢量格林函数.

在上述前提下(9)式中的源和响应间的关系为

$$r|V = \int_{V_T} d^3 r_T (r, r_T) |G(r_T) \psi, \quad (10)$$

其中  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) | G = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T)$  为自由空间的标量格林函数, 可比拟为时域中的脉冲响应. 可见, MIMO 通信系统的数学模型可看作由发射信号函数、接收信号函数和代表系统响应的以格林函数为核的线性积分算子组成<sup>[16]</sup>. 对于给定的发射体和接收体,  $\mathbf{r} | \psi$  和  $\mathbf{r} | V$  分别用正交的本征态函数  $\mathbf{r} | \alpha_i$  和  $\mathbf{r} | \alpha_r$  展开, 其中后者分别在  $V_T$  与  $V_R$  内正交完备, 下面将推导两个本征态函数所满足的本征态积分方程.

### 2.3. MIMO 量子信道中收、发端本征态方程推导

对于发射端归一化的源分布量子态  $|\psi^N\rangle$ , 在坐标表象中表示为  $\mathbf{r}_T | \psi^N = \psi^N(\mathbf{r}_T)$ , 其在接收端的响应量子态在坐标表象中为  $\mathbf{r}_R | V$ , 并满足

$$\mathbf{r}_R | V = \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}_T (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G \mathbf{r}_T | \psi^N \quad (11)$$

其中上标  $N$  表示归一化值,  $| \ast$  为 Dirac 符号,  $| G$  隐含了收发端的体结构以及无线信道特征, 在坐标表象中表示为  $(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_R) | G = G(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_R)$ , 定义接收功率为

$$|g_T|^2 = \int_{V_R} d^3 \mathbf{r}_T \langle \mathbf{r}_R | V^* \mathbf{r}_R | V \rangle, \quad (12)$$

其中符号“ $\ast$ ”表示共轭, 将(11)式代入(12)式, 有

$$|g_T|^2 = \int_{V_R} \int_{V_T} \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}'_T d^3 \mathbf{r}_T d^3 \mathbf{r}_R (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}'_T) | G^* \times \mathbf{r}'_T | \psi^{N*} (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G \mathbf{r}_T | \psi^N \quad (13)$$

定义

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K &= (\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K \\ &= \int_{V_R} d^3 \mathbf{r}_R (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}'_T) | G^* \\ &\quad \times (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G, \end{aligned} \quad (14)$$

这里  $(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K = K(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T)$  是发射端的  $\mathbf{r}'_T$  与  $\mathbf{r}_T$  间的相关性, 考虑到(13)(14)式可写为

$$\begin{aligned} |g_T|^2 &= \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}'_T \mathbf{r}'_T | \psi^{N*} \\ &\quad \times \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}_T (\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K \\ &\quad \times \mathbf{r}_T | \psi^N, \end{aligned} \quad (15)$$

可以证明,  $(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K$  为  $L_2$ -Hermite 核. 设  $\{x_n, \lambda_n\}$  是  $(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K$  的特征系, 则

$$(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{r}'_T | x_n \mathbf{r}_T | x_n}{\lambda_n}. \quad (16)$$

可见, 当  $\mathbf{r}_T | \psi^N$  选为  $(\mathbf{r}'_T, \mathbf{r}_T) | K$  的本征态函数

时, 可以使接收区域内有最大的接收功率, 此时,  $|g_T|^2$  对应着一系列从大到小排序的本征值  $1/\lambda_n$ , 并分别对应着相应的本征态函数  $\mathbf{r}_T | \psi^N$ , 其满足

$$|g_T|^2 \mathbf{r}'_T | \psi^N = \int_{V_T} d^3 \mathbf{r} (\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T) | K \mathbf{r}_T | \psi^N. \quad (17)$$

同样我们采用互易定理得到接收端本征态函数满足的本征态方程

$$\begin{aligned} |g_R|^2 \mathbf{r}_R | V^N &= \int_{V_R} d^3 \mathbf{r}'_R \mathbf{r}'_R | V^N \\ &\quad \times \int_{V_T} d^3 \mathbf{r} (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G (\mathbf{r}'_R, \mathbf{r}_T) | G^* \\ &= \int_{V_R} d^3 \mathbf{r}'_R (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}'_R) | J \mathbf{r}'_R | V^N, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}'_R) | J = \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}_T (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G (\mathbf{r}'_R, \mathbf{r}_T) | G^*. \quad (19)$$

为求解接收本征态函数的积分核,  $\mathbf{r}_T | \psi^N$  与  $\mathbf{r}_R | V^N$  构成了一对本征态函数, 其耦合系数为

$$\begin{aligned} g &= \int_{V_R} \int_{V_T} d^3 \mathbf{r}_T d^3 \mathbf{r}_R \mathbf{r}_R | V^{N*} (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) \\ &\quad \times | G \mathbf{r}_T | \psi^N, \end{aligned} \quad (20)$$

$|g_T|^2$  和  $|g_R|^2$  分别为对应收发本征态的本征值. 通过求解(17)和(18)式, 得到 MIMO 量子通信的本征态及相应的本征值, 从而求得其空间自由度.

可以证明: 1) 积分方程的核  $(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}'_T) | K$  以及  $(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}'_R) | J$  是厄米的、有界的以及平方可积的, 故上述本征态积分方程理论上有多多个正的、实的和离散的本征值, 并对应着正交的本征态; 2) 上述两个积分方程所导出的源和响应的关系满足互易定理, 故两个方程的本征值是相同的, 即  $|g_T|^2 = |g_R|^2$ , 每个本征值对应着收发端的一对本征态函数, 即对应着一个空间维的通信子信道, 其大小反映了该收发模式的耦合强度. 虽然子信道的数目理论上是无穷的, 但现实的通信系统中不可避免地存在量子噪声, 当耦合强度远低于量子噪声电平时, 其携带的信息将不能有效恢复, 可见量子噪声限制了有效通信的子信道数目, 即空间自由度.

### 2.4. MIMO 量子信道空间自由度

在 MIMO 量子无线通信中(10)式中的格林函

数具有随机性,计算中关心的是其统计值<sup>[15]</sup>.多径环境下,MIMO 量子无线信道的格林函数可表示为

$$(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) | G_m = \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}} d\hat{\mathbf{k}}' (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R) | a_r^* \times (\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) | h (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a_t \quad (21)$$

其中下标  $m$  表多径环境;  $(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a_t = \exp(-i2\pi\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_T)$  为发射端光电二极管的阵列流型;类似地,  $(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R) | a_r$  为接收端光电二极管的阵列流型;  $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) | h$  为联系着发射方向  $\hat{\mathbf{k}}$  和入射方向  $\hat{\mathbf{k}}$  的复传输系数;  $\Omega_t, \Omega_r$  分别为发射端和接收端的光子角度扩展.根据(14)式,发射端本征态方程的核的均值为

$$(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | K(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | (\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') = \int_{V_R} d^3\mathbf{r}_R \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}} d\hat{\mathbf{k}}' (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R) | a_r \times (\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) | h^* (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a_t^* \times \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}}' d\hat{\mathbf{k}}' (\hat{\mathbf{k}}', \mathbf{r}_R) | a_r^* \times (\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}') | h (\hat{\mathbf{k}}', \mathbf{r}_T') | a_t \quad (22)$$

假定对不同发射和入射方向,复传输系数  $h$  服从独立的相同分布,即

$$h^*(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) | h(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}') = |h(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}})|^2 \delta_{\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}} \delta_{\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}'} \quad (23)$$

其中  $\delta$  为 Kronecker delta 函数.化简(22)式有

$$(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | K(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | (\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') = |h(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}})|^2 \int_{V_R} d^3\mathbf{r}_R \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} |a_r^*(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R)|^2 \times (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a_t^* (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T') | a_t d\hat{\mathbf{k}} d\hat{\mathbf{k}}' \quad (24)$$

其中,如果  $|h^*(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}})|^2$  归一化为 1,那么

$$\int_{V_R} \int_{\Omega_r} |a_r^*(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R)|^2 d\hat{\mathbf{k}} d^3\mathbf{r}_R = V_R \Omega_r \quad \text{此时} \\ (\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | K(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') | (\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_T') = V_R \Omega_r \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a_t^* (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T') | a_t \quad (25)$$

可见对于给定的收发体结构和光子角度扩展,发射端本征态方程的核只与发射阵列的流型有关.接收端的核的均值可同理求得,即

$$(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') | K(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') | (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') = \int_{V_T} d^3\mathbf{r}_T \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}} d\hat{\mathbf{k}}' (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R) | a^* \times (\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) | h (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_T) | a$$

$$\times \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_t} d\hat{\mathbf{k}}' d\hat{\mathbf{k}}' (\hat{\mathbf{k}}', \mathbf{r}_R') | a \times (\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}') | h^* (\hat{\mathbf{k}}', \mathbf{r}_T) | a^* \quad (26)$$

化简(26)式得

$$(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') | K(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') | (\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_R') = V_T \Omega_t \int_{\Omega_r} d\hat{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R) | a^* (\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_R') | a \quad (27)$$

在远场条件下(14)(19)式中自由空间格林函数的分母项可以提到积分号外面,此时容易证明,(7)和(8)式(25)和(27)式与(14)和(19)式是等效的,即它们的本征态函数是相同的.故在多径环境下,可采用对传输路径分区的思路,每个分区内独立求解自由空间自由度.空间无线信道被分为发射端、发射端到接收端及接收端三部分,其中收发端分别分布在区域  $V_R$  和  $V_T$  内.无线信道每部分的传输都可看作两个自由空间的体通信,其本征态以及对应的空间自由度分别为  $N_{TS}$ ,  $N_{SS}$  和  $N_{SR}$ .整个系统的传输能力由上述三部分共同决定,此时总的有效空间自由度的上限为

$$N = \min\{N_{TS}, N_{SS}, N_{SR}\} \quad (28)$$

其中  $\min\{*\}$  表示取最小值.由于该三部分的通信是级联关系,故上式给出的是该信道模型下的空间自由度的上限.从(28)式可看出,即使  $N_{TS}$  和  $N_{SR}$  较大,但信道引入了量子噪声使得  $N_{SR}$  限制了 MIMO 量子信道空间自由度.

### 3. 二维特例的求解

对于一般的几何形状,当收发体的尺寸  $V_R$  和  $V_T$  相比收发体间的距离  $r$  较小时,本征态函数可分解为一个三维函数和一个二维函数的乘积,以(21)式为例,有

$$\mathbf{r}_T | \alpha_i = \mathbf{r}_T | F_i \mathbf{r}_T | \beta_i \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{r}_T | F_i = F(\mathbf{r}_T) = \exp\left(-i\mathbf{k}\left(z_T - \frac{x_T^2}{2r} - \frac{y_T^2}{2r}\right)\right), \\ \mathbf{r}_T | \beta_i = \beta(\mathbf{r}_T) = \beta(x_T, y_T) \quad (30)$$

一般只能借助数值方法求解.由于现有信道模型多为一维或二维模型<sup>[17,18]</sup>,下面推导规则的面结构下的本征态函数以及本征值.

假定收发平面  $S_R$  以及  $S_T$  都为长方形,边长分别为  $2\Delta x_R$ ,  $2\Delta y_R$  和  $2\Delta x_T$ ,  $2\Delta y_T$ ,采用分离变量法将  $\beta_i(\mathbf{r}_T)$  分解为

$$\mathbf{r}_T|\beta_t = x_T|\alpha_{tx} \ y_T|\alpha_{ty} \ , \quad (31)$$

代入本征态方程(17)式,有

$$\begin{aligned} & |g_T|^2 \ x_T|\alpha_{tx} \ y_T|\alpha_{ty} \\ &= \frac{1}{(4\pi r)^2} \int_{S_T} \int_{S_R} d^2r d^2r' \\ &\times \exp\left\{-\frac{ik}{r} \times [x_R(x_T - x'_T) + y_R(y_T - y'_T)]\right\} \\ &\times x'_T|\alpha_{tx} \ y'_T|\alpha_{ty} \ , \end{aligned} \quad (32)$$

对(32)式分离变量,得到关于  $x$  的本征态方程为

$$\begin{aligned} & \eta_{Tx} \ x_T|\alpha_{tx} \\ &= \int_{-\Delta x_T}^{\Delta x_T} \int_{-\Delta x_R}^{\Delta x_R} dx'_T dx_R \\ &\times \exp\left[-\frac{ik}{r} x_R(x_T - x'_T)\right] \ x'_T|\alpha_{tx} \ , \end{aligned} \quad (33)$$

其中  $\eta_{Tx}$  为相应的本征值.  $y$  方向的本征态方程与(33)式类似.(33)式的解  $x_T|\alpha_{tx}$  为一组扁球态函数,它们在  $\pm \Delta x_T$  内正交完备.根据扁球态函数的性质,其存在一个临界值,当阶数大于该值时,对应的本征值开始急剧下降,若采用该临界点计算有效通信的本征态数目,则  $x$  方向的空间自由度为

$$N_x = \frac{(2\Delta x_T)(2\Delta x_R)}{\lambda r} \ . \quad (34)$$

$y$  方向的空间自由度数目可类似求得,从而求得空间自由度  $N = N_x \times N_y$ ,也可以设定一定的量子噪声门限,通过忽略接收功率小于量子噪声的模式来计算.从物理本质来看,扁球态函数系构成了关于接收孔径受限以及接收孔径对发射体中心光子所张的立体角  $\Omega$  受限的传输系统的一组能量损失最小的正交完备函数系,其中最低阶本征态函数对应给定孔径和光子立体角的限制下,能量损失最小的源和场的分布.下面分别给出自由空间和存在散射体下的算例.首先将(17)或(18)式得到的本征值之和归一化为1,即  $\sum_n |g_n|^2 = 1$ .

**算例1** 考虑自由空间情况,其参数如下:收发区域为两个相同的长方体,体积为  $5\lambda \times 5\lambda \times 2\Delta z$ ,其中  $2\Delta z$  分别取  $0, 2\lambda$  和  $5\lambda$ ,收发间距分别取为  $25\lambda$  和  $100\lambda$ .表1给出了本征模式方法计算得到的前三个归一化的本征值,得到以下结论:1)当收发间距较小时( $25\lambda$ ),接收体相对发射体所张的角度扩展较大,故部分的有效传输能量被分配到第一个主模信道以外,当间距变得很大时( $100\lambda$ ),角度扩展也变得很小,此时有效传输能量几乎完全集中到第一个子信道中,空间域的利用率也降到了最低;2)收发区域的厚度  $2\Delta z$  的变化对空间自由度几乎没有

影响,但需强调的是,该结论是在收发距离相对收发体的尺寸较大时得出的.

表1 本征态下的归一化本征值

| $2\Delta z/\lambda$ | 收发间距 $25\lambda$ | 收发间距 $100\lambda$ |
|---------------------|------------------|-------------------|
| 0                   | 0.6832           | 0.9832            |
|                     | 0.2147           | 0.0168            |
|                     | 0.1021           | 0.0000            |
| 2                   | 0.6832           | 0.9832            |
|                     | 0.2147           | 0.0168            |
|                     | 0.1021           | 0.0000            |
| 5                   | 0.6832           | 0.9832            |
|                     | 0.2147           | 0.0168            |
|                     | 0.1021           | 0.0000            |

**算例2** 存在散射体时空间自由度随散射体的间距  $r_{ss}$  以及收发端孔径  $S_R, S_T$  的大小变化的计算结果.收发区采用相同的边长为  $2\Delta x$  的正方形平面,其中  $2\Delta x$  在  $1\lambda-6\lambda$  内变化,收发区与相应的近端散射体间距  $r_{TS}$  和  $r_{SR}$  都为  $30\lambda$ ;两近端散射体组成相同的正方形平面,边长都为  $10\lambda$ ,两者的间距  $r_{ss}$  分别取为  $50\lambda, 100\lambda$  和  $150\lambda$ .由图1可以看出,当  $r_{ss}$  较大时(取为  $100\lambda$  和  $150\lambda$ ),收发区的面积增大到一定程度后,空间自由度就不再随面积增大而增大,即虽然从“天线端”看去,散射体导致的角度扩展很大,但由于量子噪声的影响使得中间的传输路径的自由度较小,此时总的自由度受限于该区域的自由度.

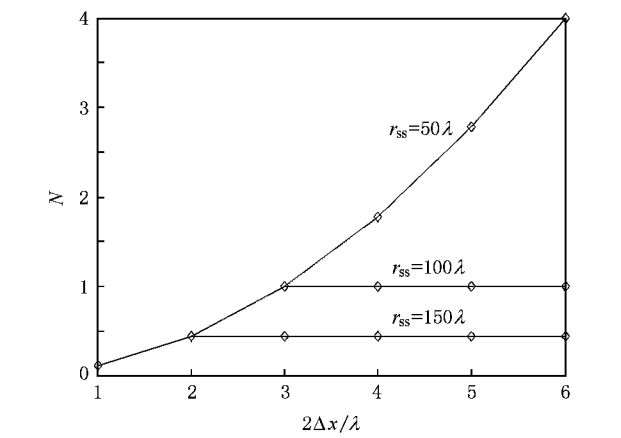


图1 空间自由度  $N$  随收发区的大小以及两近端散射体的间距的变化

4. 结 论

将 MIMO 技术应用于量子通信系统,提高量子

密钥分发的比特率,促进量子通信向高速大容量发展.然而,量子场本身不可避免地存在量子噪声约束了容量的增长,限制了可利用空间资源,即空间自由度问题.从光子场的量子化角度和满足 Schrödinger 方程条件的电磁场波动方程出发,给出自由空间中两个任意的收发体间通信的空间自由度本征态方程,推导了平面结构下的解析结果.通过对无线信道

的分区,给出了 MIMO 量子信道的空间自由度上限计算公式,不仅解释了收发体的光子扩展角与空间自由度的关系,而且也能解释 MIMO 量子信道噪声可以限制空间自由度.这些研究将为开发稳健的 MIMO 量子通信空时处理算法和优化设计高性能 MIMO 量子通信系统提供理论基础和技术支持.

- 
- [ 1 ] Bennett C H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3124
- [ 2 ] Bennett C H, Brassard G 1984 *Int. Conf. Computers Systems and Signal Processing* ( New York : IEEE ) p175
- [ 3 ] Yang Y G, Wen Q Y, Zhu F C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5544 ( in Chinese ) [ 杨宇光、温巧燕、朱甫臣 2005 物理学报 **54** 5544 ]
- [ 4 ] Zhao F, Lu Y Q, Wang F Q, Chen X, Li M M, Guo B H, Liao C J, Liu S H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2175 ( in Chinese ) [ 赵 峰、路轶群、王发强、陈 霞、李明明、郭邦红、廖常俊、刘颂豪 2007 物理学报 **56** 2175 ]
- [ 5 ] Zhang Q, Tang C J, Gao F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 15 ( in Chinese ) [ 张 权、唐朝京、高 峰 2007 物理学报 **51** 15 ]
- [ 6 ] Mo X F, Zhu B, Han Z F, Gui Y Z, Guo G C 2005 *Opt. Lett.* **30** 2632
- [ 7 ] Takesue H, Diamanti E, Honjo T, Langrock C, Fejer M M, Inoue K, Yamamoto Y 2005 *New J. Phys.* **7** 232
- [ 8 ] Foschini G J, Gans M J 1998 *Wireless Personal Commun.* **6** 311
- [ 9 ] Tekatar I E 1999 *European Trans. Telecomm.* **10** 585
- [ 10 ] Hranilovic S, Kschischang F R 2006 *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* **12** 859
- [ 11 ] Motti G, Amon S 2006 *IEEE J. Lightwave Technol.* **24** 3114
- [ 12 ] Poon A S Y, Brodersen R W, Tse D N C 2005 *IEEE Trans. Inf. Theory* **51** 523
- [ 13 ] Migliore M D 2006 *IEEE Trans. Ant. Propag.* **54** 620
- [ 14 ] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* ( 3rd ed. ) ( Beijing : Science Press ) ( in Chinese ) [ 曾谨言 2000 量子力学 ( 北京 : 科学出版社 ) ]
- [ 15 ] Yin Z 2005 *Electrodynamics* ( 2nd ed. ) ( Beijing : Science Press ) ( in Chinese ) [ 尹 真 2005 电动力学 ( 北京 : 科学出版社 ) ]
- [ 16 ] Leif H, Minyue F 2006 *IEEE Trans. Wire. Comm.* **5** 133
- [ 17 ] Miller D A 2000 *Appl. Opt.* **39** 1681
- [ 18 ] Shiu D S, Foschini G J, Gans M J, Kahn J M 2000 *IEEE Trans. Commun.* **48** 502

# The spatial degrees of freedom of MIMO quantum channels<sup>\*</sup>

Xiao Hai-Lin<sup>1,2,†</sup>   Ouyang Shan<sup>2)</sup>   Nie Zai-Ping<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *School of Electronic Engineering, Electronic Science and Technology University, Chengdu 610054, China*

<sup>2</sup> *School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China*

( Received 17 June 2008 ; revised manuscript received 20 August 2008 )

## Abstract

Quantum communication is a process of quantum key distribution ( QKD ). Current QKD technology restricts communication to a low bit rate. To improve the QKD bit rate and develop high rate and capacity, we propose a multiple-input-multiple-output quantum key distribution system. However, quantum field itself inevitably involves quantum noise ( which is determined by the quantum mechanics ), which restrains the increase of capacity, and limits space resource utilization, that is, the problem of spatial degrees of freedom arises. The quantization of the photon field and the electromagnetic wave equation satisfying the Schrödinger equation condition are adopted to investigate the upper bound of the spatial degrees of freedom for MIMO quantum channels, which will provide theoretical support and technical basis for developing robust space time processing algorithm for MIMO quantum communication and designing high performance systems.

**Keywords** : multiple input multiple output ( MIMO ), quantum key distribution, Schrödinger equation, quantization of the photon field

**PACC** : 0365, 4230, 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Basic Research Program of China ( Grant No. 2008CB317109 ), the National High-Tech Research and Development Program of China ( Grant No. 2002AA123032 ), and the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60572054 ).

<sup>†</sup> E-mail : xhl\_xiaohailin@163.com