

噪声环境下基于两体纠缠态的远程态制备*

梁华秋^{1,2)} 刘金明^{1)†}

1) 华东师范大学物理系精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

2) 台州学院物理与电子工程学院物理系, 台州 318000)

(2008 年 12 月 11 日收到, 2009 年 1 月 14 日收到修改稿)

本文研究了量子噪声对分别以 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 态和两体部分纠缠态作为量子信道来远程制备单比特态的量子过程的影响. 通过求解 Lindblad 形式的主方程, 得到量子信道随时间的演化, 采用迹距离来度量不同噪声情况下输出态与初态的接近程度. 研究表明, 作用在 z 方向的噪声对远程态制备的影响最弱, 而同时作用在 x, y, z 方向的噪声对远程态制备的影响最强.

关键词: 远程态制备, 迹距离, 纠缠态, 噪声信道

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

1993 年, Bennett 等^[1]首先提出了量子隐形传态 (quantum teleportation) 方案, 借助于量子纠缠和经典信息, 发送者可将一个未知的量子态传递给一个遥远的接收者. 由于量子隐形传态的神奇特性和其潜在的应用价值, 这一方案激起了人们极大的兴趣. 在此基础上, Lo^[2], Pati^[3]和 Bennett 等^[4]在 2000 年提出了远程态制备方案. 与量子隐形传态的目的一样, 远程态制备也是以传送量子态为目的. 两者的区别在于: 在远程态制备中, 要传输的量子态对于传送者 Alice 是已知的, 而在隐形传态中, 要传输的量子态对于传送者 Alice 是未知的. 与量子隐形传态相比, 远程态制备在所需的纠缠资源消耗和经典信息花费中存在着折中, 因此它在量子通信和量子复杂性领域具有潜在的应用前景. 近几年, 远程态制备吸引了人们的广泛兴趣, 尤其是在封闭的理想量子系统中的远程态制备方案不断被报道^[5-20], 其中很多方案是基于纠缠纯态作为量子信道来实施远程态制备. 比如, Pati^[3]指出, 利用 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 态可远程制备单比特态; Liu 等^[5]提出了一种以 W 态作为量子信道来远程制备单比特态的方案;

Shi 等^[6]提出了一种基于 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态的远程态制备. 事实上, 非最大纠缠态也是量子通信的重要资源, 同样有着广泛的应用. 近来, 在理想情况下基于非最大纠缠态作为量子信道的远程态制备方案得到了深入研究^[7-11]. Mei 等^[7]讨论了利用非最大纠缠态来远程制备单比特量子态. Dai 等^[8]提出了用一个两体部分纠缠态和一个三体部分纠缠态作为量子信道远程制备一个两体纠缠态. 此外, 高维空间的远程态制备^[12-14]、低纠缠远程态制备^[15]、对混合态的远程制备^[16]、连续变量的远程态制备^[17]、利用具有最大 Schmidt 数的纠缠态进行远程态制备^[18]等方案也得到了人们的极大关注. 而且, 人们对基于腔量子电动力学 (QED) 体系的远程制备方案也进行了充分的研究^[19, 20]. 此外, 借助于纠缠光子对方法^[21-23]和核磁共振技术^[24]的远程态制备已在实验上取得了令人振奋的进展.

然而, 实际的量子系统不可能是完全封闭的理想系统, 将不可避免地遭受到环境的干扰, 这种干扰在量子光学中被称为量子噪声, 而量子噪声对量子系统的影响往往是不容忽略的. 只有充分认识量子噪声对信息传输的影响, 才能更有效地调控实际的量子信息传输与处理过程. 最近, Chen 等^[25]研究了在远程态制备过程中, 噪声对 W 态量子信道的影响, 研究表明噪声使得量子纠缠信道产生消相干, 从

* 国家自然科学基金 (批准号: 60708003, 60578050), 国家重点基础研究计划 (批准号: 2006CB921604), 上海市重点基础研究计划 (批准号: 07JC14017) 和浙江省教育厅科研计划 (批准号: Y200803630) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jnliu@phy.ecnu.edu.cn

而使得远程制备的量子态与初态之间存在着偏差. 本文分别研究噪声影响下以 EPR 态和两体部分纠缠态作为量子信道的远程态制备. 假设环境噪声的影响可表示成 Lindblad 算符形式, 通过求解 Lindblad 形式的主方程来研究量子信道随时间的演化, 并采用迹距离来度量不同噪声情况下输出态与初态的接近程度, 通过计算平均迹距离来考察噪声对量子信道的影响程度.

2. 利用 EPR 态进行遥远制备的迹距离

2.1. 理想情况下远程制备单比特态

在远程态制备过程中, 可以选择不同的纠缠态作为量子信道. 最初人们一般选择最大纠缠态作为远程态制备的量子信道. 在 Pati^[3]的方案中, 理想的 EPR 态被用作量子信道来执行单比特量子态的远程制备, 下面简单介绍 Pati 的方案. Alice 想给 Bob 传送的量子态为

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle, \quad (1)$$

其中两实数 $\theta \in [0, \pi]$ 和 $\phi \in [0, 2\pi)$. 为实现远程态制备, 假设 Alice 和 Bob 之间共享一对 EPR 态

$$|\Psi^-\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_a|1_b\rangle - |1_a|0_b\rangle), \quad (2)$$

其中粒子 a 和 b 分别属于 Alice 和 Bob. 由于 Alice 知道待传送量子态 $|\psi\rangle$ 的信息, 她选择 $\{|\psi\rangle, |\psi_\perp\rangle\}$ 作为测量基矢对粒子 a 进行 von Neumann 测量, 该测量基矢与计算基矢 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0_a\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1_a\rangle, \\ |\psi_\perp_a\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1_a\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}|0_a\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

若 Alice 对粒子 a 执行 von Neumann 测量后结果为 $|\psi_\perp_a\rangle$, Alice 通过经典信道将其测量结果告诉 Bob. 根据 Alice 的测量结果, Bob 可知粒子 b 所处的量子态为 $|\psi_b\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0_b\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1_b\rangle$, 这与想要传送的初态 $|\psi\rangle$ 完全相同, 因此远程态制备得以成功实现. 如果 Alice 的测量结果为 $|\psi_a\rangle$, Bob 根据 Alice 的测量结果便可知道粒子 b 所处的量子态是初态的正交互补态 $|\psi_\perp_b\rangle$, 而 Bob 通常不能将 $|\psi_\perp_b\rangle$ 转化为 $|\psi_b\rangle$, 即远程态制备失败. 因此整个

远程态制备过程的成功几率为 1/2.

2.2. 噪声情况下远程制备单比特态

一般情况下, Alice 和 Bob 所分享的 EPR 纠缠对总处于开放的量子系统中, 将不可避免地遭受到环境的干扰, 从而产生消相干, 使得粒子间的纠缠度降低. 对于开放量子系统, 其动力学过程已在量子光学中得到广泛的研究, 系统随时间的演化可用主方程来描述, 通常可表示成如下 Lindblad 形式^[26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_{j, \alpha} \left(L_{j, \alpha} \rho L_{j, \alpha}^\dagger \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} L_{j, \alpha}^\dagger L_{j, \alpha} \rho - \frac{1}{2} \rho L_{j, \alpha}^\dagger L_{j, \alpha} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 H 是系统的哈密顿量, 它是一个厄米算符, 表示系统动力学的相干演化. 作用在第 j 个量子比特上的 Lindblad 算子 $L_{j, \alpha}$ 则描述系统与环境的相互作用, 可写成 $L_{j, \alpha} = \sqrt{k_{j, \alpha}} \sigma_\alpha$, 其中 σ_α ($\alpha = x, y, z$) 为 Pauli 算子. 假定作用在 x, y, z 方向上的三个分量系数分别为 $\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}$, 故可有

$$\begin{aligned} L_{j, x} &= \sqrt{k_1} \sigma_x \quad (j = 1, 2), \\ L_{j, y} &= \sqrt{k_2} \sigma_y \quad (j = 1, 2), \\ L_{j, z} &= \sqrt{k_3} \sigma_z \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

利用(2)式所描述的 EPR 纠缠态作为远程制备的量子信道, 它的初始密度矩阵可表示为

$$\rho_{ab} = |\Psi^-\rangle_{ab} \langle\Psi^-|. \quad (6)$$

现使用 ρ_{mn} ($m, n = 1, 2, 3, 4$) 来表示上式的密度矩阵元, 展开后可表示为

$$\rho_{22} = \rho_{33} = 1/2, \rho_{23} = \rho_{32} = -1/2. \quad (7a)$$

当 m, n 取其他值时,

$$\rho_{m, n} = 0. \quad (7b)$$

为了简单起见, 令 $H = 0$. 假设量子系统中每一个粒子同时受到作用在 x, y, z 三个方向上噪声的影响, 根据(4)–(7)式可求出系统随时间演化的密度矩阵 $\rho_{\text{EPR}}^{\text{env}}(t)$, 其密度矩阵元为

$$\begin{aligned} \rho_{11} = \rho_{44} &= \frac{1}{4} [1 - e^{-\lambda(k_1 + k_2)t}], \\ \rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1}{4} [1 + e^{-\lambda(k_1 + k_2)t}], \\ \rho_{23} = \rho_{32} &= -\frac{1}{4} e^{-\lambda(k_1 + k_3)t} - \frac{1}{4} e^{-\lambda(k_2 + k_3)t}, \\ \rho_{14} = \rho_{41} &= \frac{1}{4} e^{-\lambda(k_1 + k_3)t} - \frac{1}{4} e^{-\lambda(k_2 + k_3)t}, \end{aligned} \quad (8a)$$

当 m, n 取其他值时,

$$\rho_{m,n} = 0. \tag{8b}$$

由上式可知,在整个时间演化过程中,总有 $\text{Tr} \rho_{\text{EPR}}^{\text{evo}}(t) = 1$.

为了实现远程态制备过程, Bob 需要在粒子 b 上重构待传送的量子态 $|\psi\rangle$, 故称粒子 b 所处的状态为输出态, 可表示为

$$\rho_{\text{out}} = \rho_b = \text{Tr}_a \{ U_{\text{RSP}} \rho_{\text{EPR}}^{\text{evo}} U_{\text{RSP}}^\dagger \}, \tag{9}$$

其中 $U_{\text{RSP}} = |\psi_\perp\rangle_a \langle\psi_\perp|$ 表示对粒子 a 所实施的么正操作. 根据 (8) 和 (9) 式, 并考虑到归一化因子, 输出态计算为

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}} = & \frac{1}{2} \{ [1 + \cos\theta \cdot e^{-\lambda(k_1+k_2)t}] |0\rangle\langle 0| \\ & + \sin\theta [\cos\phi \cdot e^{-\lambda(k_2+k_3)t} - i\sin\phi \cdot e^{-\lambda(k_1+k_3)t}] |0\rangle\langle 1| \\ & + \sin\theta [\cos\phi \cdot e^{-\lambda(k_2+k_3)t} + i\sin\phi \cdot e^{-\lambda(k_1+k_3)t}] |1\rangle\langle 0| \\ & + [1 - \cos\theta \cdot e^{-\lambda(k_1+k_2)t}] |1\rangle\langle 1| \}. \end{aligned} \tag{10}$$

众所周知, 在 Bloch 球表象中, 单量子比特可以写成 $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ 的形式, 其中 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(r_x, r_y, r_z)$ 是 Bloch 球矢量, $|\mathbf{p}| \leq 1$; $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 为 Pauli 矩阵矢量. 因此, 上述远程态制备方案的初态和输出态在 Bloch 球表象中可写为

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ori}} = & |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \\ \rho_{\text{out}} = & \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \tag{11}$$

现使用迹距离 (trace distance) 来度量输出态 ρ_{out} 与初态 ρ_{ori} 的接近程度, 迹距离定义如下:

$$D(\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{ori}}) = \frac{1}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|. \tag{12}$$

根据 (10) 和 (11) 式, 可求出输出态 ρ_{out} 的 Bloch 球矢量的三个分量

$$\begin{aligned} r_x = & \sin\theta \cos\phi \cdot e^{-\lambda(k_2+k_3)t}, \\ r_y = & \sin\theta \sin\phi \cdot e^{-\lambda(k_1+k_3)t}, \\ r_z = & \cos\theta \cdot e^{-\lambda(k_1+k_2)t}. \end{aligned} \tag{13}$$

同理, 根据 (1) 和 (11) 式, 初态 ρ_{ori} 的 Bloch 球矢量的三个分量为

$$\begin{aligned} s_x = & \sin\theta \cos\phi, \\ s_y = & \sin\theta \sin\phi, \\ s_z = & \cos\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

因此, 将 (13) 和 (14) 式代入 (12) 式, 可得上述单比特态远程制备过程中输出态与初态之间的迹距离为

$$D(\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{ori}}) = \frac{1}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2} \{ \sin^2\theta \cos^2\phi [1 - e^{-\lambda(k_2+k_3)t}] \\ & + \sin^2\theta \sin^2\phi [1 - e^{-\lambda(k_1+k_3)t}] \\ & + \cos^2\theta [1 - e^{-\lambda(k_1+k_2)t}] \}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

由 (15) 式可得, 当 $t=0$ 时 (即系统处于初始状态, 作为量子信道的 EPR 态尚未受到噪声的影响), 输出态与初态之间的迹距离为 $D=0$, 表明输出态与初态完全相同; 当 $t \rightarrow \infty$, 且 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$ 时, 输出态与初态之间的迹距离则为 $D = \frac{1}{2}$.

通常, 不同类型的噪声对远程态制备的影响是不一样的, 下面分三种情形进行讨论.

情形 1 当 $k_1 = k, k_2 = k_3 = 0$ 时, 即系统中两个粒子同时受到沿 x 方向的噪声, 由 (15) 式可得迹距离为

$$D_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4kt} (\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta))^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

由上式可知, 迹距离是 kt, θ 和 ϕ 的函数. 当 $kt \rightarrow \infty$ 时, 迹距离 D 与 θ 和 ϕ 的关系可由图 1 直观地描述. 从图中可见当 $\theta = \pi/2$ 且 $\phi = 0$ 或 π 时, 迹距离 $D_1 = 0$, 也就是说, 所传输的态为 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ 时, 沿 x 方向噪声对远程态制备没有影响, 这是由于沿 x 方向噪声作用在量子信道后将使得比特发生翻转, 但对于这个特殊的量子态, 比特翻转后量子态不发生变化 (除了非重要的相位因子), 即 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \pm |0\rangle)$.

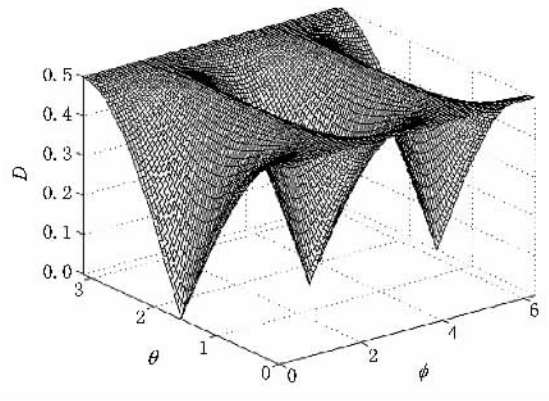


图 1 当 $k_1 = k, k_2 = k_3 = 0, t \rightarrow \infty$ 时, 迹距离 D_1 与 θ 和 ϕ 的关系

情形 2 当 $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k$ 时, 即系统中两个粒子同时受到沿 z 方向噪声的干扰, 由 (15) 式可得迹距离为

$$D_2 = \frac{1}{2} \sin\theta (1 - e^{-4kt}). \quad (17)$$

显然,迹距离是 kt 和 θ 的函数,与 ϕ 无关.图 2 给出了迹距离 D_2 与 θ 和 kt 的关系.从图中可知:当 $\theta = \pi/2$ 时,沿 z 方向噪声对远程态制备的影响最大;当 $\theta = 0$ 或 π 时,即传送的态为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 时,沿 z 方向的噪声对远程态制备没有影响.

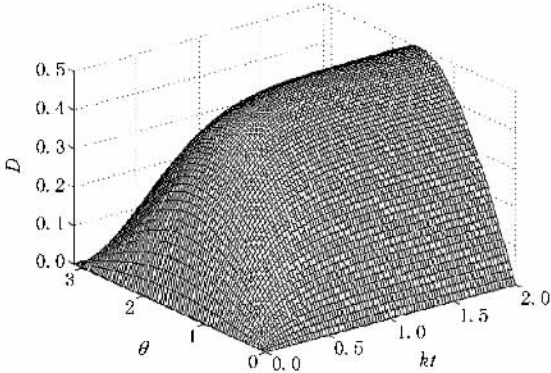


图 2 当 $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k$ 迹距离 D_2 与 θ 和 kt 的关系

情形 3 当 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ 时,即每个粒子同时受到 x, y, z 方向相同幅度噪声的影响,根据(15)式可以求得输出态与初态之间的迹距离

$$D_3 = \frac{1}{2} (1 - e^{-8kt}). \quad (18)$$

由上式可知,迹距离 D_3 仅仅是 kt 的函数,与待制备量子态 $|\psi\rangle$ 的参数 θ 和 ϕ 无关.

由此可见,不同类型的噪声对远程态制备过程中迹距离的影响是不一样的.为了讨论在远程态制备过程中,噪声对信息传输的影响程度,计算输出态与初态的平均迹距离是非常有用的手段.通常平均迹距离定义如下^[26,27]

$$\begin{aligned} D_{av} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dD \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} D(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

通过数值计算,可得到平均迹距离随 kt 的变化.图 3 表示在受到上述三种噪声影响下,平均迹距离随 kt 的变化情况.由图 3 可知, x 和 z 方向噪声影响下的平均迹距离随 kt 变化的两条曲线几乎重合,说明虽然对于传输不同的量子态,噪声的影响并不相同,但是这两个方向上的噪声对量子信道的平均影响程度几乎相同.当 $t \rightarrow \infty$ 时, x 方向噪声影响下的平均迹距离趋向于 0.3929, z 方向噪声影响下的平均迹距离趋向于 0.3927,而 x, y, z 方向的噪

声同时存在时,平均迹距离趋向于 0.5000.由此可见, x, y, z 方向的噪声同时存在时对远程态制备的影响最大.

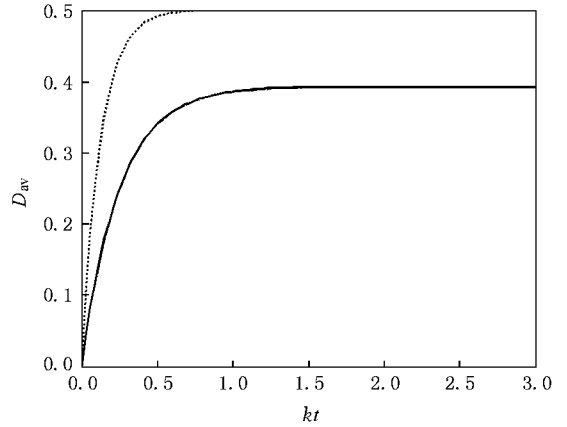


图 3 平均迹距离 D_{av} 随 kt 的变化.实线表示噪声作用在 x 方向,短划线表示噪声作用在 z 方向(图中短划线与实线几乎重合),点线表示同时受到 x, y, z 方向的噪声

3. 利用部分纠缠态进行遥远制备的迹距离

3.1. 理想情况下远程制备单比特态

部分纠缠态是量子信息的重要资源,它也可以被用做远程态制备的量子信道^[5,9,13].下面简介在理想情况下利用两体部分纠缠态来遥远制备单比特量子态方案^[7,18].

假定 Alice 想传送给 Bob 的量子态 $|\psi\rangle$ 仍使用(1)式来描述,他们共享一部分纠缠态作为量子信道

$$|\Psi'_{ab}\rangle = u|0_a\rangle|1_b\rangle - v|1_a\rangle|0_b\rangle, \quad (20)$$

其中 u 和 v 为实数,满足 $u^2 + v^2 = 1$ 且 $|u| \leq |v|$.如果 Alice 利用(3)式所描述的基矢来对粒子 a 进行测量,则(20)式可重写成

$$\begin{aligned} |\Psi'_{ab}\rangle &= |\psi_a\rangle \left[u \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1_b\rangle - v \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} |0_b\rangle \right] \\ &\quad - |\psi_{\perp a}\rangle \left[v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0_b\rangle + u \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1_b\rangle \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

如果 Alice 测量结果为 $|\psi_{\perp a}\rangle$,粒子 b 将坍缩为

$$|\psi'_b\rangle = v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0_b\rangle + u \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1_b\rangle \quad (22)$$

为了从上式中提取初态 $|\psi\rangle$,Bob 引入一个初态为 $|0\rangle$ 的辅助粒子 c .这样粒子 b 和 c 的量子态为

$$|\Phi_{bc}\rangle = |\psi'_b\rangle |0_c\rangle$$

$$= v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |00\rangle_{bc} + u \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |10\rangle_{bc}. \quad (23)$$

上式忽略了归一化因子. 现对态 $|\Phi\rangle_{bc}$ 实施以下么正变换^[13]

$$U_{bc} = \frac{u}{v} |00\rangle_{bc} \langle 00| - \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} |00\rangle_{bc} \langle 01| + \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} |01\rangle_{bc} \langle 00| + \frac{u}{v} |01\rangle_{bc} \langle 01| + |10\rangle_{bc} \langle 10| + |11\rangle_{bc} \langle 11|, \quad (24)$$

可得

$$U_{bc} |\Phi\rangle_{bc} = u \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle_b + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1\rangle_b \right] |0\rangle_c + \sqrt{v^2 - u^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle_b |1\rangle_c. \quad (25)$$

接着 Bob 使用基矢 $\{|0\rangle_c, |1\rangle_c\}$ 对粒子 c 执行正交测量. 若测得结果为 $|0\rangle_c$, Bob 将获得 $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle_b + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1\rangle_b$, 此时, 远程态制备成功.

3.2. 噪声情况下远程制备单比特态

现考虑在 3.1 小节所讨论的远程态制备方案中的量子信道受到噪声影响时的情形, 假设 Alice 和 Bob 所共享的纠缠态 $|\Psi'\rangle_{ab}$ 遭受与第 2.2 小节相同的环境噪声的干扰. 采用与第 2.2 小节相同的方法, Alice 首先对粒子 a 用 $U_{RSP} = |\psi_\perp\rangle_a \langle \psi_\perp|$ 进行测量, 然后对粒子 a 求偏迹, 容易求得当量子信道受到噪声影响时, 粒子 b 所处的量子态为

$$\rho'_b = \frac{v^2}{u^2} C_{11} |0\rangle_b \langle 0| + \frac{v}{u} (C_{12r} - iC_{12i}) |0\rangle_b \langle 1| + \frac{v}{u} (C_{12r} + iC_{12i}) |1\rangle_b \langle 0| + C_{22} |1\rangle_b \langle 1|, \quad (26)$$

上式忽略了归一化因子, 其中

$$C_{11} = \frac{u^2}{v^2} \left[1 + \chi (v^2 - u^2) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{-\chi(k_1+k_2)t} + \cos\theta \cdot e^{-\chi(k_1+k_2)t} \right],$$

$$C_{12r} = 2u^2 \sin\theta \cos\phi \cdot e^{-\chi(k_2+k_3)t},$$

$$C_{12i} = 2u^2 \sin\theta \sin\phi \cdot e^{-\chi(k_1+k_3)t},$$

$$C_{22} = 1 - \chi (v^2 - u^2) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{-\chi(k_1+k_2)t} - \cos\theta \cdot e^{-\chi(k_1+k_2)t}.$$

为了恢复初态, Bob 引入辅助粒子 $|0\rangle_c$, 并做 U_{bc} 变

换, 然后使用基矢 $|0\rangle_c, |1\rangle_c$ 对粒子 c 进行测量, 再对粒子 c 求偏迹, 则 Bob 端的最后输出态为

$$\rho'_{out} = C_N [C_{11} |0\rangle_b \langle 0| + (C_{12r} - iC_{12i}) |0\rangle_b \langle 1| + (C_{12r} + iC_{12i}) |1\rangle_b \langle 0| + C_{22} |1\rangle_b \langle 1|], \quad (27)$$

上式中归一化系数 $C_N = \frac{1}{C_{11} + C_{22}}$. 根据 (11) 式, 可以求得 ρ'_{out} 的 Bloch 球矢量的三个分量: $r'_x = 2C_N C_{12r}$, $r'_y = 2C_N C_{12i}$, $r'_z = C_N (C_{11} - C_{22})$. 考虑到 (14) 式, 可以求得最后输出态 ρ'_{out} 与初态的迹距离

$$D'(\rho_{out}, \rho_{ori}) = \frac{1}{2} \sqrt{(r'_x - s_x)^2 + (r'_y - s_y)^2 + (r'_z - s_z)^2}. \quad (28)$$

由 (28) 式可得, 当 $t=0$ 时 (即系统处于初始状态, 作为量子通道的部分纠缠态尚未受到噪声的影响), 输出态与初态之间的迹距离为 $D'=0$; 当 $u=v=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 即量子信道为 EPR 态, (28) 式将简化为 (15) 式.

当量子信道遭受与第 2.2 小节所讨论的三种类型的噪声影响时, 根据 (28) 式, 采用与第 2.2 小节相同的方法很容易得到不同种类的噪声对传输不同量子态的影响情况, 这里不再重复. 为了讨论利用部分纠缠态作为量子信道来实施远程态制备过程中噪声的影响, 同样需要计算输出态与初态的平均迹距离. 不妨取 $u = \frac{1}{2}$ 与 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 根据 (19) 和 (28) 式, 通过数值计算, 得到在受到 2.2 小节所述三种噪声影响下平均迹距离 D'_{av} 随 kt 的变化曲线, 如图 4 所示.

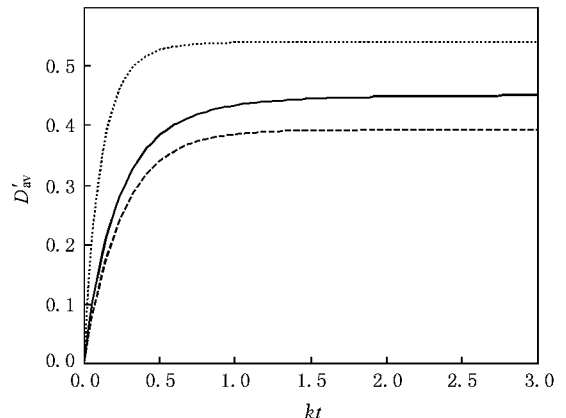


图 4 平均迹距离 D'_{av} 随 kt 的变化. 实线表示噪声作用在 x 方向, 短划线表示噪声作用在 z 方向, 点线表示同时受到 x, y, z 方向的噪声.

由图 4 可知,当 $kt \rightarrow \infty$ 时, x 方向噪声影响下的平均迹距离趋向于 0.4506, z 方向噪声影响下的平均迹距离趋向于 0.3927, 而 x, y, z 方向的噪声同时存在时, 平均迹距离趋向于 0.5417. 由此可见, 对于部分纠缠量子信道, z 方向的噪声对远程态制备的影响最小, x, y, z 方向的噪声同时存在时对远程态制备的影响最大. 当 u 和 v 取其他值时, 也可得到类似的结果.

4. 结 论

远程态制备是量子通信的重要方案之一, 而在远程态制备过程中, 其量子信道将不可避免地遭受到环境噪声的影响, 从而出现消相干现象, 使所制备的量子态与初态之间存在偏差. 本文研究了噪声影响下基于两体纠缠态的两种远程态制备方案, 通过

求解 Lindblad 算符形式的主方程, 获得了量子信道随时间的演化, 并计算了相应的初态和输出态的迹距离. 研究发现, 远程态制备的迹距离与噪声的种类、所制备初态的参数以及所采用的量子信道有关. 通过分析平均迹距离可知, 对于同种类型的量子信道, x, y, z 方向同时存在的噪声对远程态制备的平均影响程度最大, 而作用在 z 方向的噪声对远程态制备的平均影响程度最小. 此外, 不同的量子信道在相同的噪声情况下所受到的影响程度也存在着一定的差别, 例如: 当发送者和接收者所分享的纠缠信道遭受沿 x, y, z 方向同时存在的噪声影响时, 部分纠缠信道所受噪声影响的程度较大, EPR 量子信道所受噪声影响的程度较小. 本文所讨论的噪声对远程态制备过程的影响或许有助于人们研究在实际量子系统中量子态的传输和操控.

-
- [1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [2] Lo H K 2000 *Phys. Rev. A* **62** 012313
- [3] Pati A K 2000 *Phys. Rev. A* **63** 014302
- [4] Bennett C H, di Vincenzo D P, Shor P W, Smolin J A, Terhal B M, Wootters W K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 077902
- [5] Liu J M, Wang Y Z 2004 *Chin. Phys.* **13** 147
- [6] Shi B S, Tomita A 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 380
- [7] Mei Y X, Chen L, Chen Y X 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 548
- [8] Dai H Y, Chen P X, Zhang M, Li C Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 27
- [9] Zheng Y Z, Gu Y J, Guo G C 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 14
- [10] Ma P C, Zhan Y B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 445
- [11] Pan G X, Liu Y M, Zhang Z J 2008 *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)* **49** 631
- [12] Zeng B, Zhang P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 022316
- [13] Liu J M, Wang Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **316** 159
- [14] Xia Y, Song J, Song H S 2008 *J. Mod. Opt.* **55** 1723
- [15] Devetak I, Berger T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 197901
- [16] Berry D W, Sanders B C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 057901
- [17] Kurucz Z, Adam P, Kis Z, Janszky J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 052315
- [18] Ye M Y, Zhang Y S, Guo G C 2004 *Phys. Rev. A* **69** 022310
- [19] Lin X, Li H C, Lin X M, Li X H, Yang R C 2007 *Chin. Phys.* **16** 1209
- [20] Xu X B, Liu J M 2006 *Can. J. Phys.* **84** 1089
- [21] Xiang G Y, Li J, Yu B, Guo G C 2005 *Phys. Rev. A* **72** 012315
- [22] Mikami H, Kobayashi T 2007 *Phys. Rev. A* **75** 022325
- [23] Liu W T, Wu W, Ou B Q, Chen P X, Li C Z, Yuan J M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 022308
- [24] Peng X H, Zhu X W, Fang X M, Feng M, Liu M L, Gao K L 2003 *Phys. Lett. A* **306** 271
- [25] Chen A X, Li J H, Jin L X 2005 *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)* **43** 631
- [26] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [27] Han X P, Liu J M 2008 *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)* **49** 895

Remote state preparation with bipartite entangled states in noisy environments^{*}

Liang Hua-Qiu^{1,2)} Liu Jin-Ming^{1)†}

¹ *State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China*

² *College of Physics & Electronic Engineering, Department of Physics, Taizhou University, Taizhou 318000, China*

(Received 11 December 2008; revised manuscript received 14 January 2009)

Abstract

We investigate the influence of quantum noises on the processes of remote preparation of a qubit by using an Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) state and a bipartite partially entangled state as the quantum channel respectively. By solving the master equation in the Lindblad form, we obtain the time evolution of the quantum channels. Then we use the trace distance to describe how close the output state and the initial state are in various noisy conditions. Our results show that the influence of the noise acting on z direction is the weakest, and the influence of the noises acting simultaneously on x , y , and z directions is the strongest.

Keywords : remote state preparation, trace distance, entangled state, noisy channel

PACC : 0365, 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60708003, 60578050), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2006CB921604), the Key Program of Basic Research of Shanghai Municipality, China (Grant No. 07JC14017), and the Research Program of the Educational Committee of Zhejiang Province, China (Grant No. Y200803630).

[†] Corresponding author. E-mail: jmliu@phy.ecnu.edu.cn