

一类具有四翼吸引子的超混沌系统^{*}

胡国四[†]

1 烟台大学光电学院, 烟台 264005)

2 同济大学电信学院, 上海 201804)

(2008 年 9 月 30 日收到, 2008 年 11 月 9 日收到修改稿)

构造超混沌系统在目前并非难事, 在 Chua 系统基础上构造具有多涡卷拓扑结构的吸引子也有很多系统方法, 但较少有文献讨论基于 Lorenz 系统族的拥有多翼结构吸引子的光滑混沌系统, 而同时具备超混沌特性和多翼拓扑结构吸引子的光滑混沌系统则更少报道. 在现有超混沌系统的基础上, 分析其共性, 并利用坐标变化方法将其转为具有四个翼的超混沌吸引子. 该方法在保留了系统原有超混沌特性的基础上, 增加了吸引子的拓扑结构复杂性, 使之更适合保密通信等领域的应用.

关键词: 多涡卷吸引子, 多翼吸引子, 超混沌

PACC: 0545

1. 引言

随着基于混沌的保密通信领域的技术研究和发
展, 对混沌系统的复杂性提出了更高要求. 混沌反控
制的目的之一就是产生更复杂的混沌信号, 包括更
复杂的吸引子拓扑结构和超混沌的动力学特性.

目前, 能产生超混沌特性吸引子的系统屡见报
道, 其反控制方法涉及状态反馈^[1-11]、时滞状态反
馈^[12]、多系统耦合^[13]、外部驱动^[14, 15]、切换控
制^[16-18]等等. 在吸引子的拓扑结构方面, 由于传统
的 Lorenz 系统族产生的吸引子只有两个翼, Chua 系
统产生的吸引子只有两个涡卷, 结构均较简单. 为了
增加吸引子结构复杂性, 以 Chua 系统为基础, 提出
了很多系统的设计方法^[19], 将吸引子中涡卷的个数
增加. 这些方法的一个共同特点是采用了非线性非
光滑函数, 比如阶梯函数、切换函数和滞回函数等.
目前构造多涡卷吸引子已经具备完善的理论体系和
方法.

为了产生具有多翼结构的吸引子, 在 Lorenz 系
统族基础上, 对微分方程做了些调整, 构造出了具有
三个或四个翼的吸引子^[20-23], 这些方法均采用连续
光滑函数, 如二次项或三次项, 构造出的混沌系统也

是光滑连续的, 其构造过程主要依赖系统仿真发现,
目前还没有关于多翼吸引子的系统的构造方法被
提出.

虽然讨论超混沌系统和多翼吸引子的文献较
多, 但很少有关于同时具备超混沌特性和多翼拓扑
结构的吸引子的文献报道. 本文在分析一类基于
Lorenz 系统族的超混沌系统的基础上, 分析其共同
特点, 提出一种坐标变换方法, 将这些超混沌系统
的吸引子由两个翼的结构变换为具有四个翼的拓扑结
构, 增加了吸引子的复杂性并保留了系统原有的超
混沌特性. 文中以 10 个光滑超混沌系统为例, 分别
应用该方法, 构造出了 10 个具有四翼吸引子的光滑
超混沌系统.

2. 系统构造

在文献[1-10]中, 分别提出了一种超混沌系
统, 分析这 10 个系统, 我们可以看出他们具有下列
共同点:

1) 由于超混沌特性只能在四维或四维以上系统
中出现, 因而首先利用原三维系统的部分状态变量
构造一个或两个新的状态微分方程, 并将此状态反
馈入原系统, 构造出新的四维或五维系统;

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60771030)和烟台大学青年基金(批准号: WL07Z6)资助的课题.

[†] E-mail: 8051cpu@gmail.com

2)这 10 个系统的吸引子都具有两个或以上正 Lyapunov 指数,吸引子的拓扑结构均为双翼;

3)吸引子的轨迹都存在于 $z > 0$ 区域,而 x, y, u, v 变量均可正可负.

在此将这 10 个系统命名为系统 A1—A10,并统一写为如下一般形式:

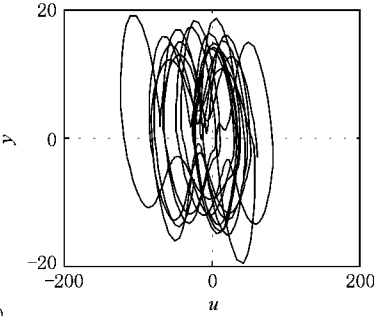
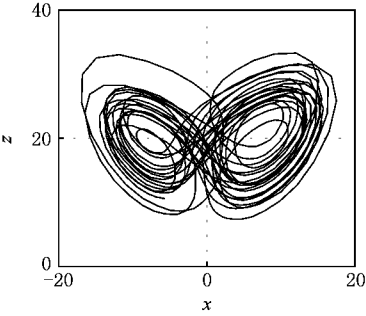
$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y, z, u, v), \\ \dot{y} &= G(x, y, z, u, v), \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{u} &= H(x, y, z, u, v), \\ \dot{v} &= J(x, y, z, u, v),\end{aligned}\tag{1}$$

其中系统 A1 中的 4 个方程为

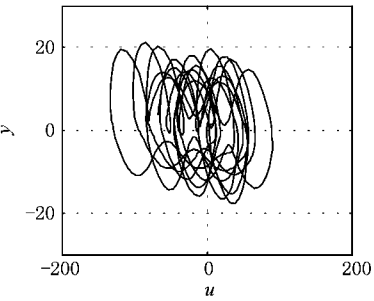
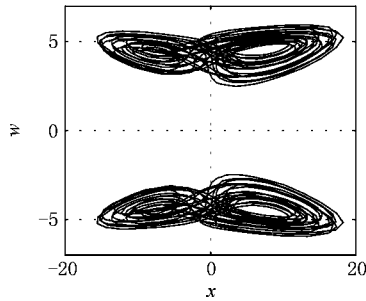
$$\begin{aligned}F_1 &= 35(y - x) + u, \\ G_1 &= 7x - xz + 12y, \\ H_1 &= yz + 0.78u, \\ J_1 &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

系统 A10 中的 4 个方程为

$$\begin{aligned}F_{10} &= 10(y - x) + u, \\ G_{10} &= 28x - xz - y - z, \\ H_{10} &= -xz + 2u,\end{aligned}$$



(a)



(b)

图 1 吸引子相图 (a)系统 A1 (b)系统(5)

在方程(5)中, w 变量在分母中出现,意味着 w 不能等于 0,轨迹不可能穿越 $w = 0$ 平面,也即不可能将图 1(b)中的两个吸引子通过某种方式连接起

$$J_{10} = 8y.\tag{3}$$

其他系统 A2—A9 的方程可依此类推.由于系统 A1—A10 其轨迹均满足 $z > 0$,如果可以做个映射,使得系统轨迹在 $z < 0$ 区域也存在,并将此两个区域的轨迹通过某种方式连接起来,则可以构造出多翼吸引子.

对系统(1)做如下坐标变换:

$$z = w^2,\tag{4}$$

则系统方程变换为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{y} &= G(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{w} &= \frac{xy}{2w} - \frac{b}{2}w, \\ \dot{u} &= H(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{v} &= J(x, y, w^2, u, v).\end{aligned}\tag{5}$$

显然做了该坐标变换后,系统变量 w 可正可负,吸引子将由原先的一个变成两个(此两吸引子对称于 $w = 0$ 平面,一个在 $w > 0$ 区域,一个在 $w < 0$ 区域),以系统 A1 为例,做变换前后的系统相图如图 1 所示(图 1(b)中的两个相图分别取不同初值 $(1, 1, 1, 1)$ 和 $(1, 1, -1, 1)$ 演化而得).

来,所以必须将此方程 $\dot{w} = \frac{xy}{2w} - \frac{b}{2}w$ 替换为没有 w 变量在分母中出现的表达式.通过仿真发现,变量 w

的符号在 $\frac{xy}{2w}$ 中起决定双吸引子是否共存的作用,如果将此方程的除法替换为乘法,即保留了 w 变量的符号, $\dot{w} = k_1 xyw - k_2 w$,则同样满足具有双对称吸引子共存的特性,而且其超混沌特性仍然保持不变,由于修改后的系统方程中 w 可以等于0,也即具备将此两个吸引子通过某种方式连接起来的可能性.新系统方程为

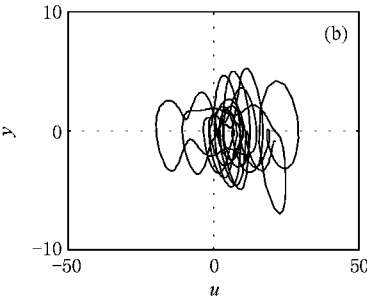
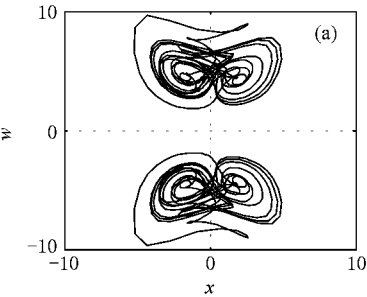


图2 系统(6)吸引子相图 (a) $k_1=1$ (b) $k_2=3$

系统(6)中的第三个方程为

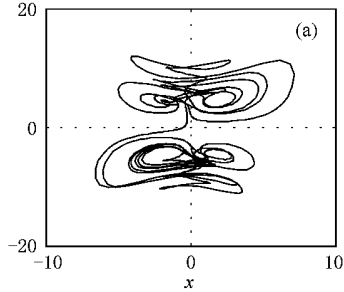
$$\dot{w} = k_1 xyw - k_2 w = (k_1 xy - k_2)w, \tag{7}$$

解方程(7)得到

$$w(t) = e^{\int_0^t (k_1 xy - k_2) dt} w_0. \tag{8}$$

因为 $e^{\int_0^t (k_1 xy - k_2) dt}$ 恒大于零,也即 $w(t)$ 的正负符号和 w_0 完全相同,这意味着系统(6)的相轨迹永远无法从 $w > 0$ 区域演化到 $w < 0$ 区域,反之亦然,所以系统(6)不能有一条轨迹穿越 $w = 0$ 平面,也就无法产生具有四个翼的吸引子.

为了将上下两个吸引子连接起来,我们可以在系统(6)的第三个表达式中增加一个控制器,该控制器的取值必须可正可负,使得系统相轨迹在演化到 $w = 0$ 平面附近时,受该控制器影响,穿越 $w = 0$ 平面.由于方程(6)中 x, y, u 变量均可正可负,因而可以有3种简单的控制器选择方案: $k_3 x, k_3 y$ 或 $k_3 u$,



将其加入方程(6)后得(以 $k_3 u$ 为例)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{y} &= G(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= H(x, y, w^2, u, v), \\ \dot{v} &= J(x, y, w^2, u, v). \end{aligned} \tag{9}$$

至此,我们得到了10个能产生具有4个翼吸引子的超混沌系统,其相应参数(产生4个翼吸引子的参数)列在方程后

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 35(y - x) + u, \\ \dot{y} &= 7x - xw^2 + 12y, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= yw^2 + 0.78u. \end{aligned} \tag{10}$$

参数: $k_1=1, k_2=3, k_3=0.5$.四翼超混沌吸引子相图如图3所示.

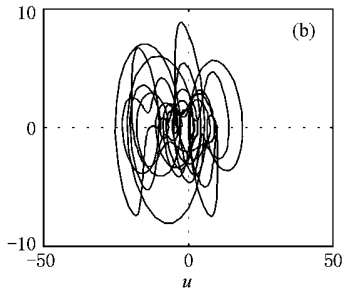


图3 系统(10)吸引子相图 (a) $k_1=1$ (b) $k_2=3$

其他 9 个能产生四翼超混沌吸引子的系统分别为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) + u, \\ \dot{y} &= 28x - xw^2 - y, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -xw^2 + 1.3u, \end{aligned} \quad (11)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 0.2$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 35(y - x) + 35yw^2, \\ \dot{y} &= 25x - 5xw^2 + y + u, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -22y, \end{aligned} \quad (12)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 0.2$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - xw^2 + y - u, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -0.1yw^2, \end{aligned} \quad (13)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 0.8$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 25x - xw^2 - y + u, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -5x, \end{aligned} \quad (14)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 0.8$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) + u, \\ \dot{y} &= 5y - 4xw^2, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -0.5y, \end{aligned} \quad (15)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 0.5$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 35(y - x) + yw^2, \\ \dot{y} &= 25x - y - xw^2 - u, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= 13x + 0.5yw^2 + u, \end{aligned} \quad (16)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 0.5$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 25(y - x) + yw^2, \\ \dot{y} &= 25x - y - xw^2 + u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -12x, \end{aligned} \quad (17)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 0.5$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 40x - xw^2 + u, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 u, \\ \dot{u} &= -10.6x, \end{aligned} \quad (18)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 0.5$;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) + u, \\ \dot{y} &= 28x - y - xw^2 - v, \\ \dot{w} &= k_1 xyw - k_2 w + k_3 x, \\ \dot{u} &= -xw^2 + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned} \quad (19)$$

参数 : $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1.2$.

在此,我们以系统(19)为例介绍参数 k_1, k_2, k_3 的选取方法如下:

1)取 $k_3 = 0, k_1 = 1, 2$, 计算系统的 Lyapunov 指数谱随 k_2 的变化关系,如图 4(a)和(b)所示,显然当 $k_2 > 1$ 时,系统均具有 3 个正 Lyapunov 指数;

2)取 $k_3 = 0$, 并取图 4(a)和(b)所示具有 3 个正 Lyapunov 指数的参数值 $k_2 = 4$, 计算系统的 Lyapunov 指数谱随 k_1 的变化,如图 4(c)所示,显然在整个 k_1 的变化区间内系统均具有 3 个正 Lyapunov 指数;

3)取 $k_1 = 1, k_2 = 4$, 计算系统的 Lyapunov 指数谱随 k_3 的变化关系,如图 4(d)所示.

从图 4(a)~(d)可知,系统的 Lyapunov 指数主要取决于 k_2 , 而 k_1 和 k_3 的变化对系统的 Lyapunov 指数影响不大. k_3 的主要作用是将上下两个吸引子连接起来,为了得到能产生四翼拓扑的超混沌吸引子,在此固定参数 $k_1 = 1, k_2 = 4$, 计算系统关于 k_3 变化的分岔图,如图 4(e),从图中可知当 $k_3 > 0.4$ 的时候,变量 w 已经出现负值,也即系统轨迹穿过 $w = 0$ 平面,具有四翼拓扑的超混沌吸引子产生了.

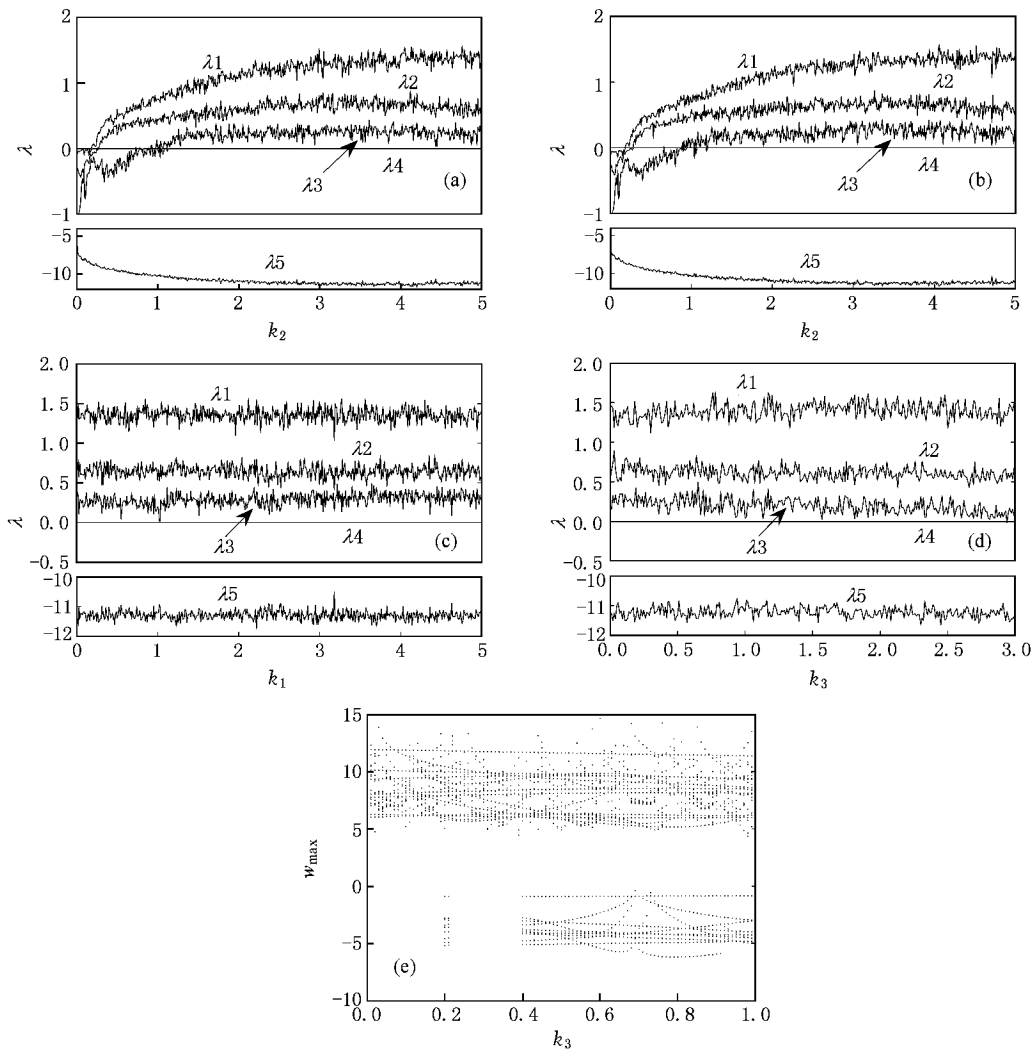


图4 (a) $k_1 = 1, k_3 = 0$ (b) $k_1 = 2, k_3 = 0$ (c) $k_2 = 4, k_3 = 0$ (d) $k_1 = 1, k_2 = 4$ 的 Lyapunov 指数谱图及 (e) $k_1 = 1, k_2 = 4$ 的系统随参数 k_3 变化分岔图

3. 系统特性比较

为了揭示四翼超混沌系统吸引子的复杂结构，下面从吸引子的 Lyapunov 指数谱和 Lyapunov 维数、关联维和 Kolmogorov 熵两个方面对系统 A1 和系统 (10) 的吸引子进行比较：

3.1. Lyapunov 指数谱和 Lyapunov 维数

计算系统 A1 的 Lyapunov 指数谱为：0.5414，0.1675，0，-25.9277. 其 Lyapunov 维数为

$$D_L = j + \frac{1}{L_{j+1}} \sum_{i=1}^j L_i = 3 + \frac{L_1 + L_2 + L_3}{|L_4|} = 3.0273. \tag{20}$$

计算系统(10)的 Lyapunov 指数谱为 2.5973，0.0756，0，-24.4588. 其 Lyapunov 维数为 $D_L = 3.1093$. 显然系统(10)的超混沌特性仍然保留，而且其最大 Lyapunov 指数更大，系统轨迹分离速度更快.

3.2. 关联维和 Kolmogorov 熵

由 G-P 算法得到的熵和关联维数的关系式为

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_2 \frac{c_m(r)}{c_{m+k}(r)}, \tag{21}$$

其中 $m, m+k$ 是嵌入维数， $c_m(r), c_{m+k}(r)$ 分别是嵌入维数为 $m, m+k$ 时的关联积分. 系统 A1 和系统(10)的 $\log_2 r \sim \log_2 c(r)$ 关系图 (a) 和 (b) 所示.

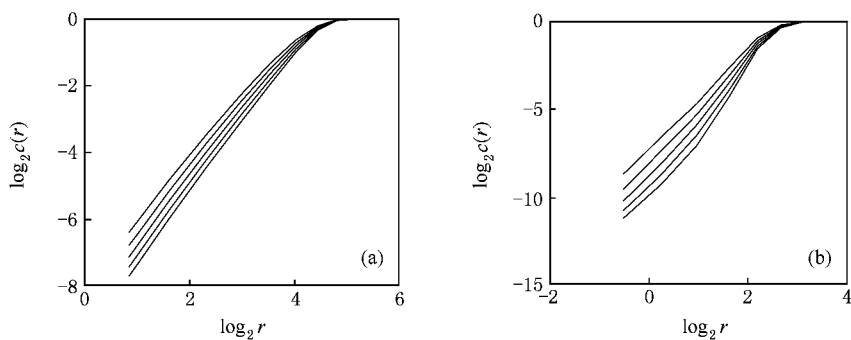


图 5 关联维和 Kolmogorov 熵关系图 (a)系统 A1 (b)系统 10)

由最小二乘法同时回归计算出关联维数和 Kolmogorov 熵为 $D = 2.0289$, $K_2 = 0.3947$, 系统(10) 的关联维数和 Kolmogorov 熵为 $D = 2.7047$, $K_2 = 0.8423$ 显然系统(10)比系统 A1 关联维数更高 , Kolmogorov 熵更大. 更高的分维数意味着系统具有更复杂的动力学特性.

4. 基于 MULTISIM 的电路实验

为了验证四翼超混沌吸引子的存在 ,在此设计一个模拟电路 ,使用运算放大器完成加减法和积分运算 ,使用 AD633 完成乘法运算(电路图乘法器为 1V/V 比例的乘法器 ,实际电路应该是由 AD633 和 10 倍放大电路相串联) ,如图 6 所示.

在 MULTISIM 软件中对电路进行仿真 ,在电路中设置系统变量初值为 $x = y = w = u = 0.2$,电路仿真步长为 5×10^{-7} ,得到图 7 所示的四翼超混沌吸引子相图.

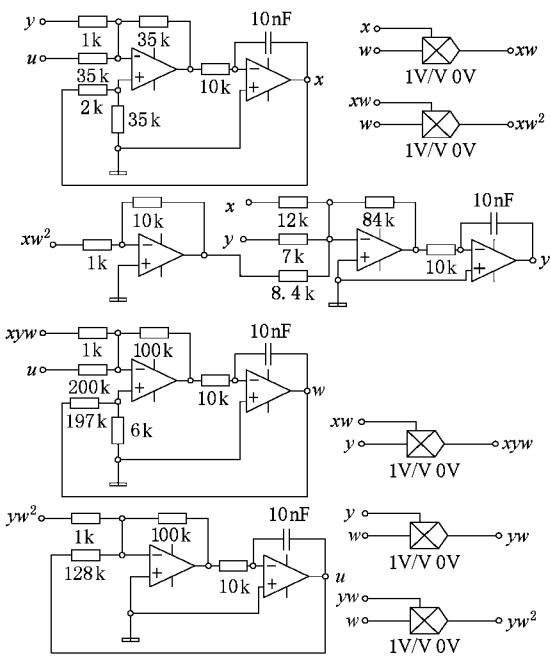


图 6 系统 10 电路实现图 $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_2 = 0.5$

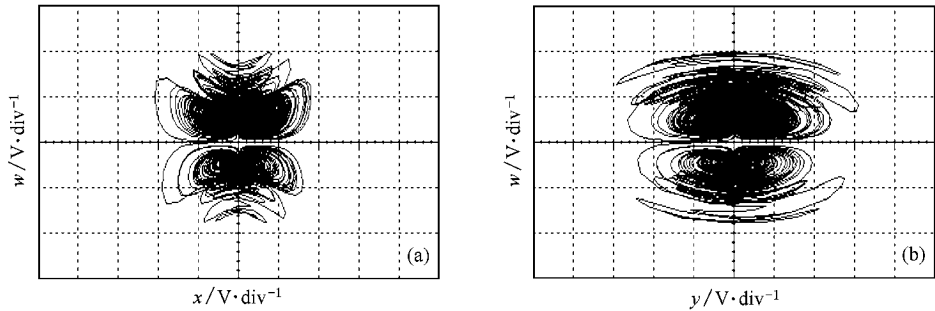


图 7 四翼超混沌吸引子电路仿真相图 (a) $x \sim w$ (b) $y \sim w$

从电路仿真结果可知 ,四翼超混沌吸引子是可以 以用模拟电路实现的.

5. 结 论

通过对一类连续光滑超混沌系统的方程进行分析,找出其共同特点.提出一种坐标变换方法,应用于这一类超混沌系统,将此类超混沌系统的吸引子由原先简单的双翼结构转变为具有四个翼的复杂结构,同时通过仿真发现该方法还保留了系统原有的超混沌特性.

通过对系统原有吸引子和新拓扑结构吸引子的特性比较,从 Lyapunov 指数谱和 Lyapunov 维数、关联维和 Kolmogorov 熵方面证明新吸引子具有更复杂的特性.通过 MULTISIM 电路仿真也验证了该四翼吸引子是可以模拟电路实现的.本文共构造出了 10 个四翼超混沌吸引子,我们相信该四翼吸引子设计方法也可以用于其他具有类似结构的超混沌系统中,这也为保密通信领域提供了几种更好的混沌信号发生器的选择方案.

-
- [1] Li Y ,Tang W K S ,Chen G 2005 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **15** 3367
 - [2] Jia Q 2007 *Phys . Lett . A* **366** 217
 - [3] Chen Z ,Yang Y ,Qi G ,Yuan Z 2007 *Phys . Lett . A* **360** 696
 - [4] Gao T ,Chen G ,Chen Z ,Cang S 2007 *Phys . Lett . A* **361** 78
 - [5] Wang G Y ,Zheng Y ,Liu J B 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 3113 (in Chinese) [王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113]
 - [6] Liu Y Z 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 1439 (in Chinese) [刘扬正 2007 物理学报 **57** 1439]
 - [7] Wang G ,Liu J ,Zheng X 2007 *Chin . Phys .* **16** 2278
 - [8] Wang F ,Liu C 2006 *Chin . Phys .* **15** 963
 - [9] Wang J ,Chen Z ,Yuan Z 2006 *Chin . Phys .* **15** 1216
 - [10] Hu G 2009 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **19** 651
 - [11] Wang X Y ,Wang M J 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
 - [12] Hu G ,Jiang S 2008 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **18** 3485
 - [13] Cincotti S ,Teglio A 2007 *IEEE Trans . Circuits Syst . - I* **54** 1340
 - [14] Li Y ,Chen G ,Tang W K S 2005 *IEEE Trans . Circuits Syst . - II* **52** 204
 - [15] Cang S J ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
 - [16] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S ,Sun H 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 5131 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣、孙 晗 2007 物理学报 **56** 5131]
 - [17] Yu S M ,Yu Z D 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 6859 (in Chinese) [禹思敏、禹之鼎 2008 物理学报 **57** 6859]
 - [18] Liu Y Z ,Jiang C S ,Li X C ,Sun H 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 6808 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、李心朝、孙 晗 2008 物理学报 **57** 6808]
 - [19] Lü J ,Chen G 2006 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **16** 775
 - [20] Qi G ,Wyk B J ,Wyk M A 2007 *Chaos Soliton . Fract .* doi : 10.1016/j.chaos.2007.09.095
 - [21] Hu G 2009 *Int . J . Mod . Phys . C* **20** 323
 - [22] Lü J ,Chen G ,Cheng D 2004 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **14** 1507
 - [23] Qi G ,Chen G ,Li S ,Zhang Y 2006 *Int . J . Bifurcat . Chaos* **16** 859

A family of hyperchaotic systems with four-wing attractors^{*}

Hu Guo-Si^{1,2,†}

¹ *Department of Optics & Electronics, Yantai University, Yantai 264005, China*

² *School of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China*

(Received 30 September 2008 ; revised manuscript received 19 November 2008)

Abstract

It is easy to construct a hyperchaotic system, and many systematic approaches, based on Chua system, can be used for generating multi-scroll attractors. However, few reports discuss the smooth Lorenz-like system with multi-wing attractors, and the attractors with both hyperchaotic dynamics and multi-wing topological structure are seldom reported. Based on the existing smooth hyperchaotic system, the common characteristics of these systems are analyzed. A novel coordination transformation method is used for converting all the attractors' topological structure from two-wing to four-wing. Moreover, the hyperchaotic property is preserved in resulting system, the complexity of attractors is enhanced, and they are more suitable to be used in secure encryption communication.

Keywords : multi-scroll attractors, multi-wing attractors, hyperchaotic system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60771030) and the Natural Science Foundation for Young Teachers of Yantai University, China (Grant No. W107Z6).

[†] E-mail : 8051cpu@gmail.com