

# 基于滑模控制实现分数阶混沌系统的投影同步 \*

刘 丁<sup>†</sup> 闫晓妹

( 西安理工大学自动化与信息工程学院 西安 710048 )

( 2008 年 10 月 8 日收到 2008 年 11 月 12 日收到修改稿 )

针对分数阶混沌系统的投影同步问题,提出了一种基于主动滑模原理的控制器,基于分数阶线性系统的稳定性理论,分析了该方法的稳定性,分别以同结构分数阶 Liu-Liu 系统的投影同步和异结构分数阶 Chen-Liu 系统的投影同步为例进行了数值仿真,仿真结果验证了主动滑模控制方法在分数阶混沌系统投影同步中的有效性.

关键词: 分数阶混沌系统, 滑模控制, 投影同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

分数阶微积分几乎与整数阶微积分理论具有同样长的发展历史,但是近十几年来才成为国际上的一个热点研究课题. 整数阶微积分是分数阶微积分理论的特例, 整数阶混沌系统都是对实际混沌系统的理想化处理<sup>[1]</sup>. 在 Chen 混沌系统<sup>[2]</sup>、Lorenz 混沌系统<sup>[3]</sup>、Duffing 混沌系统<sup>[4]</sup>、Lü 混沌系统<sup>[5]</sup>和超混沌系统<sup>[6]</sup>中,发现当系统的阶数为分数时仍出现混沌状态,且更能反映系统呈现的工程物理现象,从而促进了分数阶混沌的研究以及分数阶微积分理论的发展. 近来,人们尝试研究分数阶混沌系统的控制与同步问题,控制方法包括简单的线性反馈法<sup>[7]</sup>、Backstepping 方法<sup>[8]</sup>、Active 控制方法<sup>[9]</sup>等.

1999 年, Mainieri 等<sup>[10]</sup>在研究部分线性混沌系统中观察到一种新的同步现象——投影同步 (projective synchronization), 该类同步现象随即引起人们的重视. Chee 等<sup>[11]</sup>则将投影同步应用于安全数字通信领域,并取得良好效果. 近来, Shao 等<sup>[12]</sup>应用状态误差反馈控制策略实现了分数阶 Chen 系统的投影同步. Wang 等<sup>[13]</sup>基于线性系统的稳定判定准则提出一种新的线性分离方法来实现分数阶混沌系统的投影同步. Chen 等<sup>[14]</sup>用状态观测器实现了分数阶混沌系统的投影同步. 本文基于主动滑模控制研究了分数阶混沌系统的投影同步问题,设计了主动

滑模控制器,在对分数阶 Liu 系统和分数阶 Chen 系统的混沌特性回顾的基础上,通过对同结构的分数阶 Liu-Liu 系统的投影同步和异结构的分数阶 Chen-Liu 系统的投影同步的仿真研究,验证了主动滑模控制方法在分数阶混沌系统投影同步中的有效性.

## 2. 分数阶微分及其近似计算

在分数阶微积分的研究过程中,对微分和积分概念提出了许多种定义<sup>[15]</sup>,但在应用研究中常用的是 Riemann-Liouville (R-L) 定义和 Caputo 定义,在纯数学领域中多用 R-L 定义,而在实际应用中常用 Caputo 定义.

Riemann-Liouville 分数阶微分的定义为

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \frac{d^n}{dt^n} \left[ \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{n-\alpha}} d\tau \right], \quad (1)$$

式中  $n$  为大于  $\alpha$  的最小整数,  $n-1 < \alpha < n$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Caputo 分数阶微分的定义为

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-\alpha}} d\tau, \quad (2)$$

式中  $m-1 < \alpha < m$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数.

\* 国家自然科学基金(批准号 50804040)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20040700010)资助的课题.

† E-mail: liud@xaut.edu.cn

### 3. 分数阶线性系统的稳定性理论

分数阶线性系统的稳定性已经得到了充分的研究, 并且得到了分数阶线性系统稳定的充分必要条件<sup>[16, 17]</sup>. 考虑下面的自治系统

$$D^{\alpha}x = Ax, x(0) = x_0, \quad (3)$$

其中  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in R^n$ ,  $A \in R^{n \times n}$ . 如果  $|\arg(\text{eig}(A))| > \alpha\pi/2$ , 则系统(3)是渐近稳定的.  $\alpha$  阶线性系统的稳定性区域如图 1 所示.

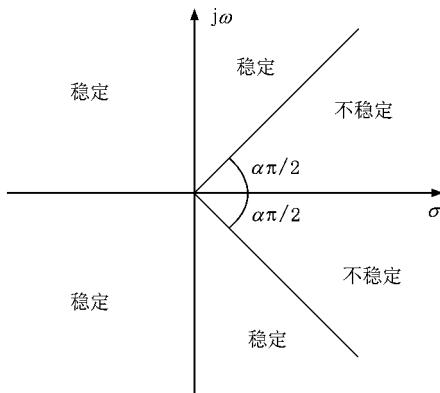


图 1  $\alpha$  阶线性系统的稳定性区域

在三维非线性系统中, 如果系统平衡点的一个特征值在不稳定的区域中而其他特征值都在稳定区域中, 则称此平衡点是指数为 1 的鞍点. 如果平衡点有一个稳定特征值和两个不稳定特征值, 则称此平衡点是指数为 2 的鞍点. 在混沌系统中可以证明混沌仅仅产生在指数为 2 的鞍点附近<sup>[18]</sup>. 对于混沌系统  $\dot{x} = f(x)$ , 其对应的分数阶系统  $D^{\alpha}x = f(x)$  仍保持混沌的必要条件是平衡点的稳定性保持不变, 也就是系统指数为 2 的鞍点的不稳定特征值  $\lambda$  满足下面的条件:

$$\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) > \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)} \Rightarrow \alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)}\right). \quad (4)$$

### 4. 基于主动滑模原理的控制器设计

#### 4.1. 滑模控制器设计

给定驱动系统为

$$D^{\alpha}x = A_1x + g_1(x), \quad (5)$$

其中  $\alpha$  为阶数  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in R^3$  表示系统的状态变

量  $A_1 \in R^{3 \times 3}$  代表了系统的线性部分,  $g_1: R^3 \rightarrow R^3$  是系统的非线性部分.

给定响应系统

$$D^{\alpha}y = A_2y + g_2(y) + u. \quad (6)$$

我们的目的就是设计  $u$  使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y - \beta x\| = 0$  成立,  $\beta$  为投影同步尺度因子.

可得误差系统为

$$\begin{aligned} D^{\alpha}e &= A_2y + g_2(y) + u - \beta A_1x - \beta g_1(x) \\ &= Ae + G(x, y) + u, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $e = y - \beta x$ ,  $A = A_2$ ,  $G(x, y) = g_2(y) - \beta g_1(x) + \beta(A_2 - A_1)x$ . 设计控制器  $u \in R^3$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0. \quad (8)$$

根据主动控制设计步骤, 可以设计控制器为

$$u = H(t) - G(x, y). \quad (9)$$

误差系统可以重新写为

$$D^{\alpha}e = Ae + H(t). \quad (10)$$

基于滑模控制方法,  $H(t)$  可以被设计为

$$H(t) = Ku(t), \quad (11)$$

其中  $K = [k_1, k_2, k_3]^T$  是常数向量,  $w(t) \in R$  为控制输入, 满足下面的条件

$$w(t) = \begin{cases} w^+(t) & s(e) \geq 0, \\ w^-(t) & s(e) < 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $s = s(e)$  是滑模面. 误差系统可以记为

$$D^{\alpha}e = Ae + Ku(t). \quad (13)$$

滑模面定义为

$$s(e) = Ce, \quad (14)$$

其中  $C = [c_1, c_2, c_3]$  是常数向量. 系统发生滑模运动时需要满足以下两个条件:

$$s(e) = 0, \quad (15)$$

$$\dot{s}(e) = 0. \quad (16)$$

联立(13)–(16)式, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(e) &= \frac{\partial s(e)}{\partial e} e = \frac{\partial s(e)}{\partial e} D^{1-\alpha}(D^{\alpha}e) \\ &= CD^{1-\alpha}[Ae + Ku(t)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

可得等效控制  $w_{eq}(t)$  为

$$w_{eq}(t) = -(CK)^{-1}CAe(t), \quad (18)$$

式中  $(CK)$  为非奇异矩阵. 将(18)式代入(13)式, 可得

$$D^{\alpha}e = (I - K(CK)^{-1}C)Ae. \quad (19)$$

下面选择到达律为指数趋近律

$$D^{\alpha}s = -p \text{sgn}(s) - rs, \quad (20)$$

其中  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数, 系数  $p, r > 0$ .

由(13)(14)式可得

$$D^\alpha s = CD^\alpha e = C(Ae + Ku(t)). \quad (21)$$

由(20)(21)式就可以得到控制输入为

$$u(t) = -(CK)^{-1}[C(rI + A)e + p\text{sgn}(s)]. \quad (22)$$

由(9)(11)式可得

$$u(t) = -K(CK)^{-1}[C(rI + A)e + p\text{sgn}(s)] - G(x, y). \quad (23)$$

## 4.2. 稳定性分析

为了验证从任意初始条件出发的误差系统(13)是否始终满足滑模到达条件, 即在有限时间内到达趋近滑模面(14), 考虑如下Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2}s^2, \quad (24)$$

对(24)式求导可得

$$\dot{V} = ss' = -p\text{sgn}(s) - rs^2. \quad (25)$$

因为  $s\text{sgn}(s) > 0, r > 0, p > 0$ , 得到  $\dot{V} = s's < 0$ , 所以

$\dot{V}(e)$  负定, 故满足滑模到达条件.

进一步考察当误差系统(13)到达滑模面时, 其滑动模态是否稳定. 将(22)式代入(13)式可得

$$D^\alpha e = [A - K(CK)^{-1}C(rI + A)]e - K(CK)^{-1}p\text{sgn}(s). \quad (26)$$

将  $-K(CK)^{-1}p\text{sgn}(s)$  看作是线性分数阶误差系统的输入, 如果

$$|\arg(\text{eig}([A - K(CK)^{-1}C(rI + A)]))| > \alpha\pi/2, \quad (27)$$

那么误差系统是稳定的.  $[A - K(CK)^{-1}C(rI + A)]$  的一个特征值是  $-r$ , 其他的两个特征值与  $r$  无关, 只与  $K$  和  $C$  有关. 只要选择合适的  $K$  和  $C$ , 就可以保证这两个特征值满足条件(27), 从而保证误差系统稳定.

## 5. 仿真研究

### 5.1. 分数阶 Liu 系统

Liu混沌系统是一个三维连续自治系统, 其数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - kxz, \\ \dot{z} &= -cz + hx^2, \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $a, b, c, k, h$  为系统参数. 当  $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$  时, 系统处于混沌状态, 具有 3 个不稳定平衡点:  $S_0 = (0, 0, 0)$ ,  $S_1 = (5, 5, 40)$  和  $S_2 = (-5, -5, 40)$ . 系统(28)在平衡点( $x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}}$ )处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - z_{\text{eq}} & 0 & -x_{\text{eq}} \\ 8x_{\text{eq}} & 0 & -2.5 \end{bmatrix},$$

其平衡点和相应的特征值为

$$S_0 = (0, 0, 0):$$

$$\lambda_1 = -25.6155, \lambda_2 = 15.6155, \lambda_3 = -2.5;$$

$$S_1 = (5, 5, 40):$$

$$\lambda_1 = -17.5614, \lambda_{2,3} = 2.5307 \pm j10.3673;$$

$$S_2 = (-5, -5, 40):$$

$$\lambda_1 = -17.5614, \lambda_{2,3} = 2.5307 \pm j10.3673.$$

分数阶 Liu 系统描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a(y - x), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= bx - kxz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= -cz + hx^2. \end{aligned} \quad (29)$$

根据不等式(4), 要使系统(29)产生混沌, 则要满足  $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{10.3673}{2.5307}\right) \approx 0.85$ . 所以对于  $1 > \alpha \geq 0.86$ , 参数  $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$  时的分数阶 Liu 系统是混沌的.

### 5.2. 分数阶 Chen 系统

Chen混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $a, b, c$  为系统参数. 当  $a = 35, b = 3, c = 28$  时, 系统处于混沌状态, 具有 3 个平衡点:  $S_0 = (0, 0, 0)$ ,  $S_1 = (7.9373, 7.9373, 21)$  和  $S_2 = (-7.9373, -7.9373, 21)$ . 系统(30)在平衡点( $x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}}$ )处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 - z_{\text{eq}} & 28 & -x_{\text{eq}} \\ y_{\text{eq}} & x_{\text{eq}} & -3 \end{bmatrix},$$

其平衡点和相应的特征值为

$$S_0 = (0 \ 0 \ 0) :$$

$$\lambda_1 = -30.8359, \lambda_2 = 23.8359, \lambda_3 = -3;$$

$$S_1 = (7.9373 \ 7.9373 \ 21) :$$

$$\lambda_1 = -18.4280, \lambda_{2,3} = 4.2140 \pm j14.8847;$$

$$S_2 = (-7.9373, -7.9373, 21) :$$

$$\lambda_1 = -18.4280, \lambda_{2,3} = 4.2140 \pm j14.8847.$$

分数阶 Chen 系统描述如下：

$$\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = a(y - x),$$

$$\frac{d^{\alpha}y}{dt^{\alpha}} = (c - a)x - xz + cy, \quad (31)$$

$$\frac{d^{\alpha}z}{dt^{\alpha}} = xy - bz.$$

根据不等式(4),要使系统(31)产生混沌,则要

满足  $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{14.8847}{4.2140}\right) \approx 0.82$ . 所以对于  $1 > \alpha$

$\geq 0.83$ ,参数  $a = 35, b = 3, c = 28$  时的分数阶 Chen 系统是混沌的.

### 5.3. 同结构分数阶 Liu-Liu 系统的投影同步

将设计的滑模控制器应用于分数阶 Liu-Liu 系统的投影同步. 根据滑模控制的设计步骤,选取  $A = [-10, 10, 0, 40, 0, 0, 0, 0, 0, -2.5]$ ,  $C = [1 \ 1 \ -1]$ ,  $K = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $r = 25$ ,  $p = 0.2$ ,时间步长大小设为 0.001. 分数阶 Liu-Liu 系统阶次均取为  $\alpha = 0.86$ , 初始值分别取为  $(0.8, 0.5, 0.1)$  和  $(-1, -1, 0.9)$ , 分别取  $\beta = -0.5$  和  $\beta = 2$  在  $t = 5$  s 时加入控制. 图 2 给出了  $\beta = -0.5$  时的投影同步误差响应图, 图 3(a) 和(b) 分别给出了  $\beta = -0.5$  和  $\beta = 2$  时分数阶 Liu-

Liu 系统投影同步时的相图.

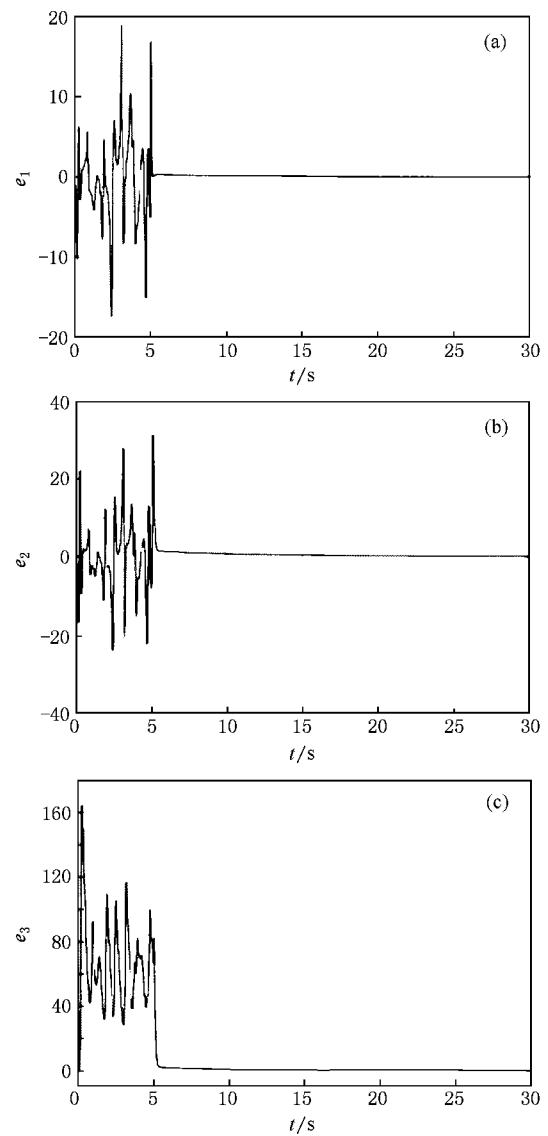
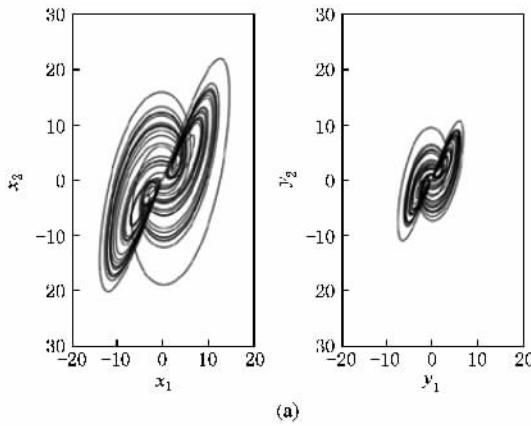
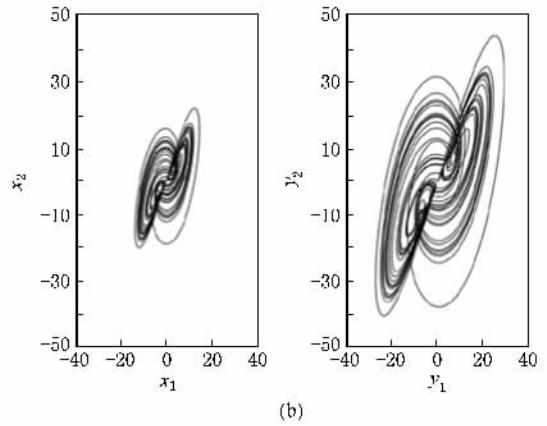


图 2  $\beta = -0.5$  时投影同步误差曲线 (a)  $e_1(t)$  的响应曲线, (b)  $e_2(t)$  的响应曲线 (c)  $e_3(t)$  的响应曲线



(a)



(b)

图 3  $\beta$  取不同值时两个分数阶 Liu 系统投影同步时的系统相图 (a)  $\beta = -0.5$  (b)  $\beta = 2$

从投影同步误差曲线图 2 中可明显看出, 经过短暂的时间, 误差变量  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  都已稳定在零点, 即两分数阶 Liu 系统实现了同步. 由图 3(a) 和(b) 可以看出, 响应分数阶 Liu 系统状态的幅值分别是驱动分数阶 Liu 系统状态幅值的 0.5 倍和 2 倍, 两系统的相位分别为反相和同相, 即两分数阶 Liu 系统按指定的比例因子实现了投影同步.

#### 5.4. 异结构分数阶 Chen-Liu 系统的投影同步

将设计的滑模控制器应用于分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统的投影同步, 其中分数阶 Chen 系统为驱动系统, 分数阶 Liu 系统为响应系统. 根据滑模控制的设计步骤, 选取  $A = A_2 = [-10, 10, 0, 40, 0, 0, 0, 0, -2.5], C = [1 \ 1 \ -1], K = [1 \ 1 \ 1]^T, r = 15, p = 2$ , 时间步长大小设为 0.001. 分数阶 Chen 和 Liu 混沌系统的阶次均取为  $\alpha = 0.9$ , 初始值分别取为  $(0.8, 0.5, 0.1)$  和  $(0.9, 0.8, 0.5)$ , 分别取  $\beta = -2$  和  $\beta = 0.5$ , 在  $t = 5$  s 时加入控制. 图 4 给出了  $\beta = -2$  时的投影同步误差响应图, 图 5(a) 和(b) 分别给出了  $\beta = -2$  和  $\beta = 0.5$  时分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统投影同步时的相图.

从投影同步误差曲线图 4 中可明显看出, 经过短暂的时间, 误差变量  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  都已稳定在零点, 即分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统实现了同步. 由图 5(a) 和(b) 可以看出, 分数阶 Liu 系统状态的幅值分别是分数阶 Chen 系统状态幅值的 2 倍和 0.5 倍, 两系统的相位分别为反相和同相, 即分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统按指定的比例因子实现了投影同步.

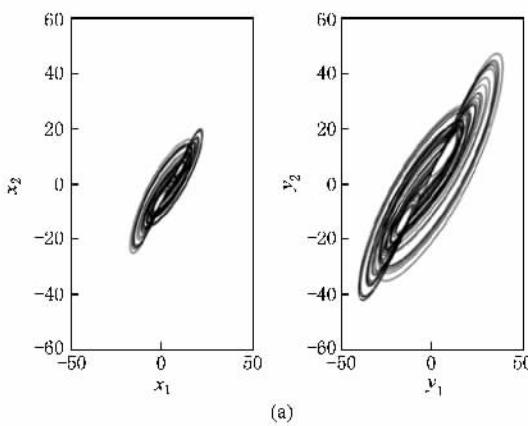


图 5  $\beta$  取不同值时分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统投影同步时的系统相图 (a)  $\beta = -2$  (b)  $\beta = 0.5$

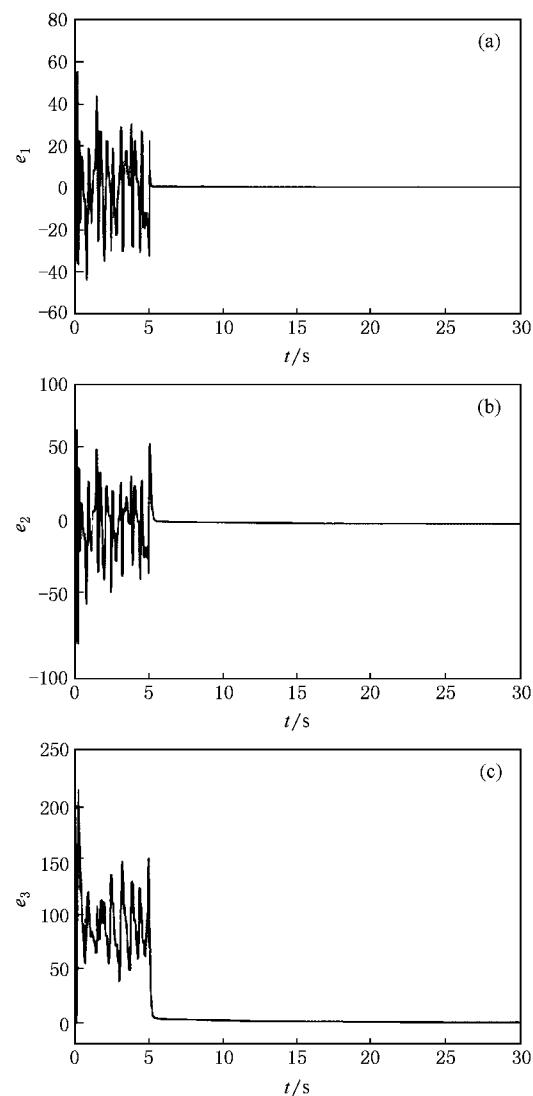
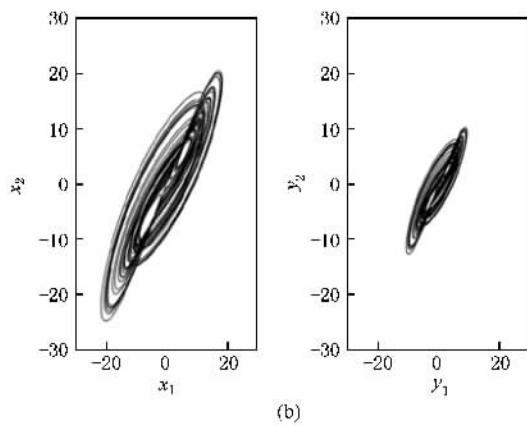


图 4  $\beta = -2$  时投影同步误差曲线 (a)  $e_1(t)$  的响应曲线, (b)  $e_2(t)$  的响应曲线 (c)  $e_3(t)$  的响应曲线



## 6. 结 论

本文将主动滑模控制方法应用到分数阶混沌系统的投影同步中,给出了滑模控制器的推导过程。基于分数阶线性系统稳定性理论,通过对控制器的稳

定性分析得出:只要选择合适的控制参数  $K$  和  $C$  就可以保证误差系统稳定。利用所设计的控制器分别实现了同结构分数阶 Liu-Liu 系统的投影同步和异结构分数阶 Chen-Liu 系统的投影同步,数值仿真结果验证了该方法的有效性。

- [1] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 ( in Chinese )[ 刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198 ]
- [2] Li C P ,Peng G J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 443
- [3] Grigorenko I ,Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [4] Ge Z M ,Ou C Y 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **34** 262
- [5] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [6] Ahmad W M 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 1459
- [7] Li C G ,Chen G R 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 549
- [8] Gao X ,Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [9] Zhang C F ,Gao J F ,Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 ( in Chinese )[ 张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124 ]
- [10] Mainieri R ,Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [11] Chee C Y ,Xu D L 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1063
- [12] Shao S Q ,Gao X ,Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6815 ( in Chinese )[ 邵仕泉、高 心、刘兴文 2007 物理学报 **56** 6815 ]
- [13] Wang X Y ,He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1485 ( in Chinese )[ 王兴元、贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485 ]
- [14] Chen X R ,Liu C X ,Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1453 ( in Chinese )[ 陈向荣、刘崇新、李永勋 2008 物理学报 **57** 1453 ]
- [15] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* [ New York : Academic Press ]
- [16] Matignon D 1996 *IMACS-SMC Proceedings* Lille ,France 963
- [17] Ahmed E ,El-Sayed A M A ,El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [18] Mohammad S T ,Mohammad H 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102

## Projective synchronization of fractional-order chaotic systems based on sliding mode control<sup>\*</sup>

Liu Ding<sup>†</sup> Yan Xiao-Mei

( School of Automation and Information Engineering ,Xi 'an University of Technology ,Xi'an 710048 ,China )

( Received 8 October 2008 ; revised manuscript received 12 November 2008 )

### Abstract

For the projective synchronization of fractional-order chaotic systems, a controller based on active sliding mode theory is presented. Based on the stability theory of fractional-order linear system, stability of the proposed method is analysed. Two cases of projective synchronization, i.e. identical fractional-order Liu-Liu systems and different fractional-order Chen-Liu systems, are implemented separately. The simulation results show the effectiveness of the proposed controller.

**Keywords** : fractional-order chaotic system, sliding mode control, projective synchronization

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60804040 ) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China ( Grant No. 20040700010 ).

<sup>†</sup> E-mail : liud@xaut.edu.cn