

双向耦合混沌系统的反同步性研究

刘福才[†] 臧秀凤 宋佳秋

(燕山大学西校区工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

(2008 年 11 月 1 日收到 2008 年 11 月 20 日收到修改稿)

针对两个双线性耦合的统一混沌系统, 通过运用自适应方法实现它们的完全反同步, 自适应控制器和耦合系数均由 Lyapunov 稳定性理论和最小值定理估计出来, 这种方法并不需具体求出耦合系数范围, 也无需事先知道耦合混沌系统的最大值, 就能实现反同步. 将这种方法应用到 Chen-Chen 混沌系统的双向耦合情况, 数值仿真表明该方法的有效性和实用性.

关键词: 统一混沌系统, 双线性耦合, 自适应反同步

PACC: 0545

1. 引言

混沌同步在保密通信、信号处理和生命科学等方面有着十分广阔的应用前景. 近年来, 人们提出了许多混沌同步的方法, 如自适应控制^[1]、主动控制法^[2]、Backstepping 方法^[3]、线性控制方法^[4]等. 最近人们对利用不同的方法来耦合两个相同或不同的混沌系统同步产生了很大兴趣^[5]. 对于耦合的两个相同的混沌吸引子, 确定完全同步状态稳定的条件, 通常是计算相应系统的 Lyapunov 指数. 如果所有指数都是负的, 则说明两个系统同步. 但是由于混沌吸引子的局部不稳定性, 这个条件并不能够总是保证高质量的同步. 文献 [6] 以系统的瞬间特征值为高质量同步指标, 讨论了两个耦合系统完全同步时的参数选择问题, 指出当运用线性定常系统稳定性判据判定耦合混沌系统的同步时, 尽管能保证瞬间特征值处处具有负实部, 但不能保证高质量的同步, 甚至有可能使同步效果失去. 随即提出了利用线性时变连续系统稳定性理论去确定耦合函数的参数. 文献 [7] 举例验证了运用时变系统的稳定理论也不能保证完全同步.

现在对混沌同步问题的研究已经很成熟, 但是混沌反同步问题仍然是一个新领域. 关于它的研究还很少见报道. 混沌反同步和混沌同步具有相似的一些性质, 所以混沌同步问题的一些研究方法在混

沌反同步里也可以适用. 本文对两个统一混沌系统的线性耦合反同步进行研究分析, 运用 Lyapunov 稳定性理论和最小值理论可以估计出耦合系数. 有很多方法确定耦合系数, 但需要事先知道耦合混沌系统的最大值. 本文提出的最大值自适应率则不用知道耦合混沌系统的最大值.

2. 问题的描述

用非线性微分方程描述的统一混沌系统表示为

$$\dot{x} = Ax + F(x) + (k-1)u,$$

$$\dot{y} = Ay + nF(y) - u,$$

当 $k=0, n=-1$ 时, 双向耦合反同步系统;

当 $k=1, n=1$ 时, 单向同步系统;

当 $k=2, n=1$ 时, 双向耦合同步系统.

单向同步包括一个主动方和一个被动方, 通过在被动方引入主动方的控制状态, 从而使双方达到同步. 双向耦合混沌系统同步和单向同步不同, 它在双方都引入了对方的系统状态, 可以看成是两个地位平等的混沌系统的同步. 双向耦合反同步与同步又有所不同, 它要实现的是两个混沌系统的轨迹完全相反, 其他的一些特性与同步相同. 双向线性耦合混沌系统的自适应反同步一般模型如下:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) - \hat{D}\hat{e},$$

$$\dot{\hat{y}} = A\hat{y} + f(\hat{y}) - \hat{D}\hat{e}, \quad (1)$$

[†] E-mail: lfc_xb@263.net

式中控制矩阵 $\hat{D}$ 为保证系统反同步的常数矩阵矢量, 为了计算方便, 一般都选择对角矩阵 $\hat{D} = \text{diag}\{\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3\}$. 可以证明在控制矩阵的参数满足一定条件下双向耦合混沌系统可以实现反同步. $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3]^T, \hat{y} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3]^T, f$ 为连续的非线性函数, A 为一个常数矩阵, 其中 $\hat{e} = \hat{x} + \hat{y} = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3]^T$.

3. 控制器的设计

统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} &= (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} &= xy - ((8 + \alpha)/3)z,\end{aligned}\quad (2)$$

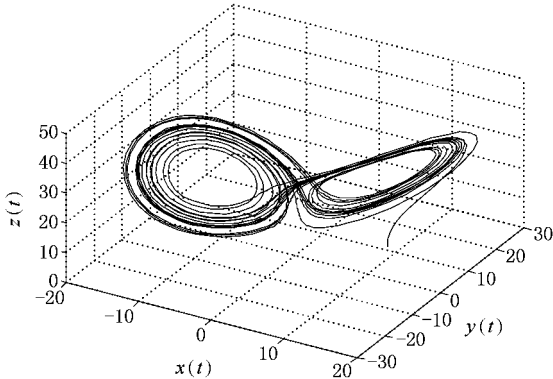


图1 Lorenz 混沌吸引子

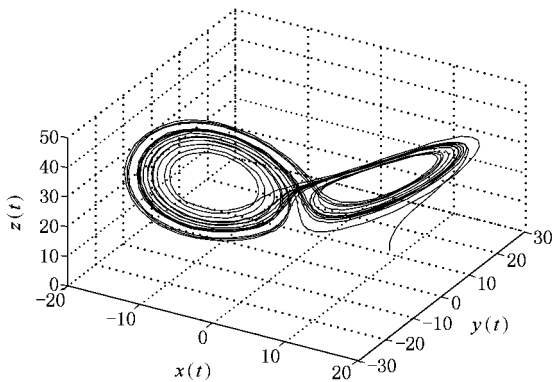


图2 Lü 混沌吸引子

其中 $\alpha \in [0, 1]$, 这代表一族混沌系统. 当 $\alpha \in [0, 0.8]$ 时, 该系统属于广义 Lorenz 系统, 吸引子见图 1; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 该系统属于广义 Lü 系统, 吸引子见图 2; 当 $\alpha \in [0.8, 1]$ 时, 该系统属于广义 Chen 系统, 吸

引子见图 3. 该系统具备一系列良好的性质, 为研究混沌系统控制与同步提供了一个新的模型和思路.

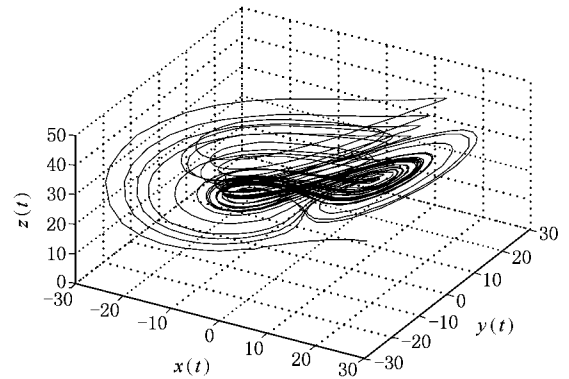


图3 Chen 混沌吸引子

考虑上一部分里介绍的耦合混沌系统模型, 则线性耦合后两个统一混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= (25\alpha + 10)(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) - \hat{d}_1(\hat{x}_1 + \hat{y}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= (28 - 35\alpha)\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_3 \\ &\quad + (29\alpha - 1)\hat{x}_2 - \hat{d}_2(\hat{x}_2 + \hat{y}_2), \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_1\hat{x}_2 - ((8 + \alpha)/3)\hat{x}_3 - \hat{d}_3(\hat{x}_3 + \hat{y}_3), \\ \dot{\hat{y}}_1 &= (25\alpha + 10)(\hat{y}_2 - \hat{y}_1) - \hat{d}_1(\hat{x}_1 + \hat{y}_1), \\ \dot{\hat{y}}_2 &= (28 - 35\alpha)\hat{y}_1 + \hat{y}_1\hat{y}_3 \\ &\quad + (29\alpha - 1)\hat{y}_2 - \hat{d}_2(\hat{x}_2 + \hat{y}_2), \\ \dot{\hat{y}}_3 &= -\hat{y}_1\hat{y}_2 - ((8 + \alpha)/3)\hat{y}_3 \\ &\quad - \hat{d}_3(\hat{x}_3 + \hat{y}_3),\end{aligned}\quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{pmatrix},$$

$$f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{x}_1\hat{x}_3 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 \end{bmatrix}, f(\hat{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{y}_1\hat{y}_3 \\ \hat{y}_1\hat{y}_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{d}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{d}_3 \end{pmatrix}.$$

所以系统 (3) 的动态误差描述为

$$\dot{\hat{e}} = A\hat{y} - f(\hat{y}) - \hat{D}\hat{e} + A\hat{x} + f(\hat{x}) - \hat{D}\hat{e}$$

$$\begin{aligned} &= (A + \hat{M} - 2D)\hat{e} - 2\tilde{D}\hat{e} \\ &= (G + \hat{M})\hat{e} - 2\tilde{D}\hat{e}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\tilde{D} = \hat{D} - D$, $\hat{M}e = f(\hat{x}) - f(\hat{y})$, $G = A - 2D$.
所以

$$G = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10 + 2d_1) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 - 2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -((8 + \alpha)3 + 2d_3) \end{pmatrix}.$$

由(4)式还可以推出

$$\begin{aligned} -\hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{y}_1\hat{y}_3 &= -\hat{x}_3\hat{e}_1 + \hat{y}_1\hat{e}_3, \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{y}_1\hat{y}_2 &= \hat{x}_2\hat{e}_1 - \hat{y}_1\hat{e}_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\hat{x}_3 & 0 & \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 & -\hat{y}_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

这样,两个线性耦合混沌系统的反同步可以转化为求动态误差(4)式的渐进稳定性.换句话说也就是求出适当的耦合系数 D 以使动态误差系统渐进稳定.

设 Lyapunov 函数为

$$V(\hat{e}, \tilde{D}) = \hat{e}^T \hat{e} + \chi \tilde{D} I)^T (\tilde{D} I), \quad (7)$$

其中 $I = [1, 1, 1]^T$, 计算它的导数,

$$\dot{V}(\hat{e}, \tilde{D}) = \hat{e}^T \dot{\hat{e}} + \hat{e}^T \hat{e}$$

$$\begin{aligned} &+ \chi \dot{\tilde{D}} I)^T (\tilde{D} I) + \chi \tilde{D} I)^T (\dot{\tilde{D}} I) \\ &= \hat{e}^T (G^T + G)\hat{e} + \hat{e}^T (\hat{M}^T + \hat{M})\hat{e} \\ &\quad - 4\hat{e}^T \tilde{D} \hat{e} + \chi (\tilde{D} I)^T (\dot{\tilde{D}} I) \\ &= \hat{e}^T B \hat{e} + \hat{e}^T \hat{N} \hat{e} \\ &\quad - 4\hat{e}^T \tilde{D} \hat{e} + \chi (\tilde{D} I)^T (\dot{\tilde{D}} I). \end{aligned} \quad (8)$$

如果选择 $-4\hat{e}^T \tilde{D} \hat{e} + \chi (\tilde{D} I)^T (\dot{\tilde{D}} I) = 0$, 即

$$-\sum_{i=1}^3 (\hat{d}_i - d_i) \hat{e}_i^2 + \sum_{i=1}^3 (\hat{d}_i - d_i) \dot{\hat{d}}_i = 0, \quad (9)$$

那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{e}, \tilde{D}) &= \hat{e}^T B \hat{e} + \hat{e}^T \hat{N} \hat{e} \leq \hat{e}^T B \hat{e} \\ &\quad + \lambda_{\max}(\hat{N}) \hat{e}^T \hat{e} = -\hat{e}^T \hat{Q} \hat{e}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$B = G + G^T = 2 \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10 + 2d_1) & -5\alpha + 19 & 0 \\ -5\alpha + 19 & (29\alpha - 1 - 2d_2) & 0 \\ 0 & 0 & -((8 + \alpha)3 + 2d_3) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{N} = \hat{M} + \hat{M}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -\hat{x}_3 & \hat{x}_2 \\ -\hat{x}_3 & 0 & 0 \\ \hat{x}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{Q} &= -(B + \lambda_{\max}(\hat{N})I), \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{\max}(\hat{N}) = \sqrt{\hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2} \leq \sqrt{2n}$, n 是统一混沌系统的最大值, 即 $n = \max\{|x_i|\}, i = 2, 3$, 令 $\beta = n\sqrt{2}$, 所以 $\hat{Q}$ 需要满足

$$\hat{Q} = 2 \begin{pmatrix} ((25\alpha + 10 + 2d_1) - \beta) & -5\alpha + 19 & 0 \\ 5\alpha - 19 & -(29\alpha - 1 - 2d_2) - \beta & 0 \\ 0 & 0 & ((8 + \alpha)3 + 2d_3) - \beta \end{pmatrix} > 0. \quad (11)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可以知道, 当 $\hat{Q}$ 为正定矩阵时, $\dot{V}$ 为负定, 即误差系统渐进稳定. 如果矩阵 $\hat{Q}$ 的各阶主子式均大于零, 则 $\hat{Q}$ 为正定.

$$\Delta_i = |\hat{Q}_{ii}| = m_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

由(12)式可以解得,

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= S_i(m_1, m_2, \dots, m_i) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (13)$$

并且

$$\frac{\partial d_i}{\partial m_i} \neq 0, \frac{\partial d_i}{\partial m_i} = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, i-1) (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

如果耦合系数之和取最小值, 则其各耦合系数相差最小, 令

$$f = \min(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3). \quad (15)$$

由(11)–(13)式可以得到

$$\hat{d}_1 = -5 - 25\alpha/2 + \beta/2 + m_1/4,$$

$$\hat{d}_2 = ((10\alpha - 38)^2 + (-2 + 58\alpha + 2\beta)m_1 + m_2)(4m_1),$$

$$\hat{d}_3 = ((-16 - 2\alpha + 6\beta)m_2 + 3m_3)(12m_2). \quad (16)$$

由(11)式可以知道 m_1 和 m_2 相互独立, m_2 和 m_3 满足如下关系:

$$m_3 = (8 + \alpha)/3 + 2\hat{d}_3 - \beta)m_2. \quad (17)$$

因为 m_2 和 m_3 均为正数, 所以

$$\hat{d}_3 > -(8 + \alpha)/6 + \beta/2. \quad (18)$$

由于 m_2 和 m_3 满足一定关系, 而 m_1 和它们相互独立, 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3) &= \hat{d}_1 + \hat{d}_2 + \hat{d}_3 \\ &= \mathcal{J}(m_1, m_2). \end{aligned} \quad (19)$$

根据最小值定理, 当 $\frac{\partial f}{\partial m_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial m_2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial m_1^2} > 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial m_2^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial m_1 \partial m_2} \right)^2 \text{ 时, 在点 } (m_1^*, m_2^*) \text{ 取得最}$$

小值, 必要条件 $\frac{\partial f}{\partial m_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial m_2} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} = (m_1^2 - (10\alpha - 38)^2 - m_2)(4m_1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_2} = 1(4m_1) \neq 0 \quad (20)$$

符合条件的最小值点

$$m_1^* = 38 - 10\alpha > 0, m_2^* \rightarrow 0^+. \quad (21)$$

所以将点 (m_1^*, m_2^*) 代入(16)式,

$$\hat{d}_1 = 9/2 - 15\alpha + (\sqrt{2}/4)\hat{n},$$

$$\hat{d}_2 = 9 + 12\alpha + (\sqrt{2}/4)\hat{n},$$

$$\hat{d}_3 = -4/3 - \alpha/6 + (\sqrt{2}/4)\hat{n}. \quad (22)$$

即

$$\hat{d}_i = r_i + s_i \hat{n}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (23)$$

求 $\hat{d}_i$ 有

$$\dot{\hat{d}}_i = s_i \dot{\hat{n}}_i. \quad (24)$$

由(9)式和(24)式可得

$$\dot{\hat{n}} = \sum_{i=1}^3 s_i \dot{\hat{e}}_i^2 / \sum_{i=1}^3 s_i^2. \quad (25)$$

4. 数值仿真

数值仿真中, 采用自适应步长算法进行仿真分析, 当 $\alpha = 1$ 时, 为 Chen 系统, 设两个系统的初始值为 $\hat{x}_0 = [50, 50, 0]$, $\hat{y}_0 = [0, 0, 50]$, 最大值 $\hat{n} = 1$, 两个线性耦合的统一混沌系统的反同步曲线如图 4 所示, 动态误差曲线如图 5 所示.

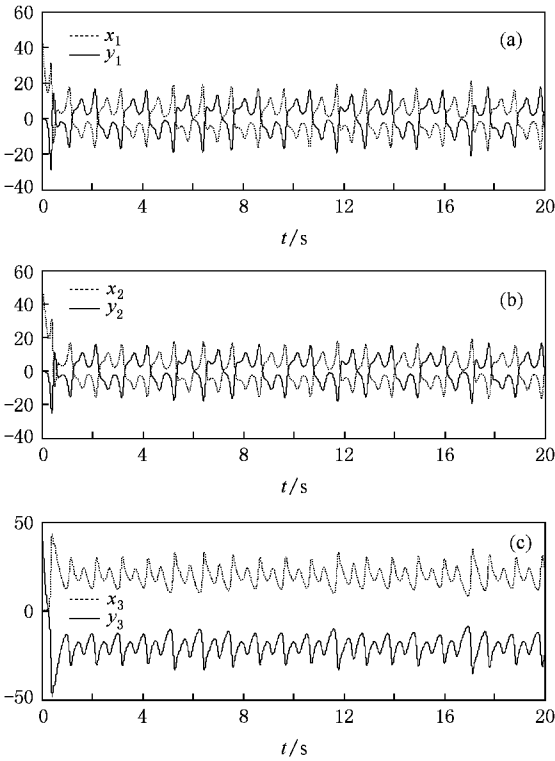


图 4 Chen 系统和 Chen 系统的反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线 (b) x_2 和 y_2 的反同步曲线 (c) x_3 和 y_3 的反同步曲线

数值仿真中, 采用自适应步长算法进行仿真分析, 当 $\alpha = 0.8$ 时, 为 Lü 系统, 设两个系统的初始值为 $\hat{x}_0 = [25, 32, 0]$, $\hat{y}_0 = [0, 0, -12]$, 最大值 $\hat{n} = 3$, 两个线性耦合的统一混沌系统的反同步曲线如图 6 所示, 动态误差曲线如图 7 所示.

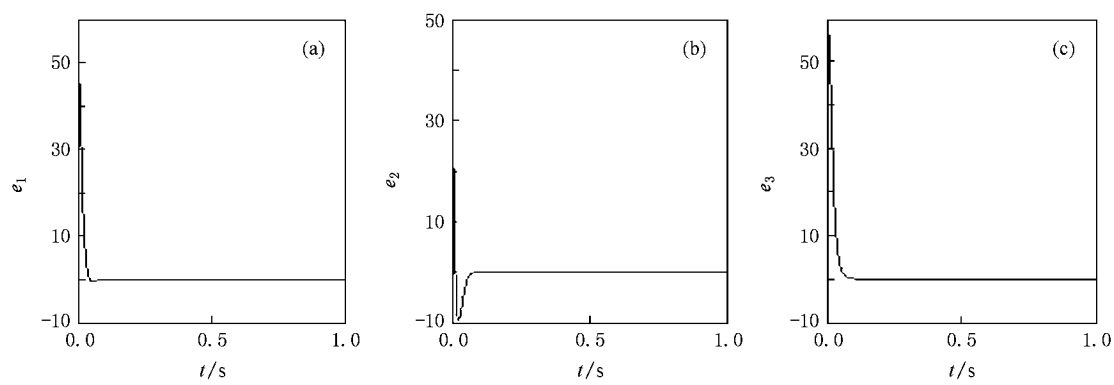


图 5 当 $\alpha = 1$ 时 ,两个线性耦合的统一混沌系统的动态误差曲线 (a) e_1 的误差曲线 (b) e_2 的误差曲线 (c) e_3 的误差曲线

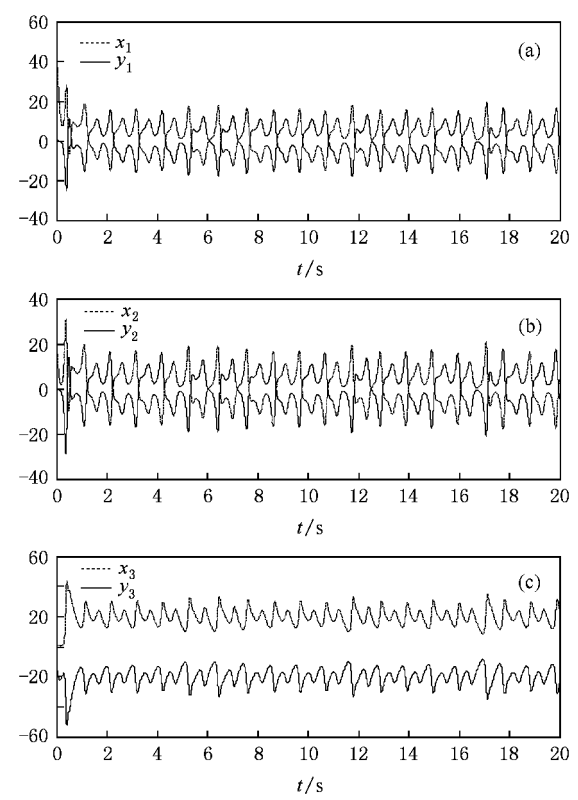


图 6 L_{ii} 系统和 L_{ii} 系统的反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线 (b) x_2 和 y_2 的反同步曲线 (c) x_3 和 y_3 的反同步曲线

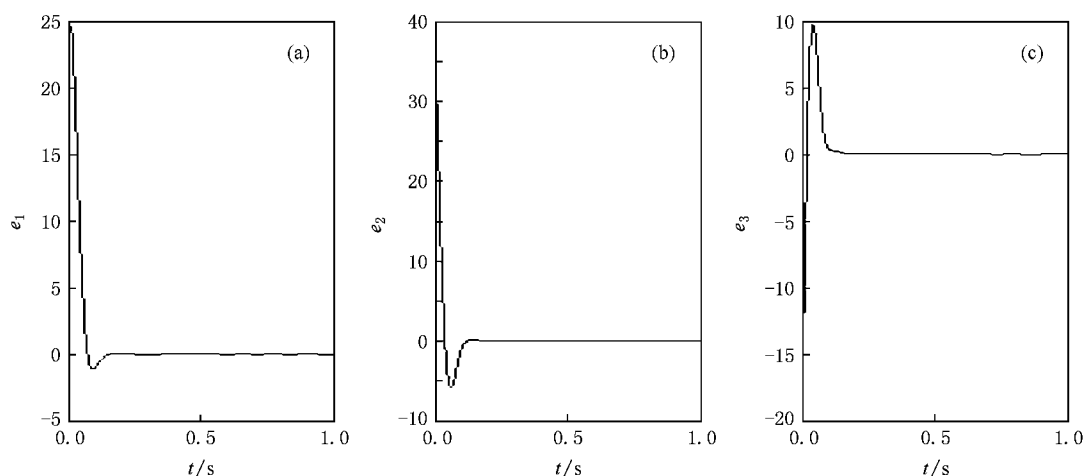


图 7 当 $\alpha = 0.8$ 时, 两个线性耦合的统一混沌系统的动态误差曲线 (a) e_1 的误差曲线 (b) e_2 的误差曲线 (c) e_3 的误差曲线

5. 结 论

本文以统一混沌系统为例, 研究了混沌系统的

反同步方法, 采用自适应的方法使统一混沌系统达到了反同步. 与其他反同步方法相比, 本文方法实现简便, 能很快达到反同步. 数值仿真进一步验证了该方案的有效性.

- [1] Jia F L, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3101 (in Chinese) [贾飞蕾、徐 伟 2007 物理学报 **56** 3101]
- [2] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [3] Li G H 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 1454
- [4] Yassen M T 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 913
- [5] Min F H, Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese)

- [6] Min F H, Wang Z Q 2004 *Control Theory & Applications* **21** 935 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2004 控制理论与应用 **21** 935]
- [7] Pu X C 2007 *Journal of Southwest University (Natural Science Edition)* **29** 141 (in Chinese) [蒲兴成 2007 西南大学学报(自然科学版) **29** 141]

Anti-synchronism of the bidirectional coupled chaotic system

Liu Fu-Cai[†] Zang Xiu-Feng Song Jia-Qiu

(*Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province ,Yanshan University ,Qinhuangdao 066004 ,China*)

(Received 1 November 2008 ; revised manuscript received 20 November 2008)

Abstract

For two linearly bidirectional coupled unified chaotic systems ,based on adaptive control technique , the anti-synchronization is completely realised . The adaptive-controller and the coupling coefficient are both estimated by the Lyapunov stable theorem and the minimum value theorem . This method can realise anti-synchronization , not requiring to know the scope of the coupling coefficient and the maximum value of the coupling chaotic systems . We apply this criterion to the case of the coupled Chen-Chen system to test our method ,the numerical simulations illustrate that this method has a good performance .

Keywords : unified chaotic system , linearly bidirectional coupling , adaptive anti-synchronization

PACC : 0545

[†] E-mail : lfc _ xb@263 . net