

双足模型步行中的倍周期步态和混沌步态现象^{*}

柳 宁 李俊峰 王天舒[†]

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

(2008 年 1 月 9 日收到, 2008 年 10 月 13 日收到修改稿)

被动行走模型只依赖重力可以在斜坡上形成自然的周期步态. 当模型参数改变时, 步态随之改变. 应用胞映射方法与 Newton-Raphson 迭代结合来获取被动行走模型周期步态的不动点, 消除了迭代方法在初值选取上的随机性, 并获得了模型的吸引盆. 通过对不同参数的模型的仿真, 讨论了参数变化对步态的影响. 结果表明, 转动惯量增大会导致倍周期步态到混沌步态的产生, 足半径减小和质心位置降低也会导致分岔的出现.

关键词: 胞映射, 双足步行, 倍周期, 混沌

PACC: 0545, 0547

1. 引言

生物的双足行走是一个简单而复杂的物理现象. 从宏观上看, 双足的反复交替支撑, 呈现出一个简单的周期过程. 但是从细节观察, 足与地面的碰

撞、摩擦以及支撑足交替引起的系统构型变化, 使得双足行走具有强烈的非线性动力学特性. 在单足支撑时, 系统呈不稳定的倒立双摆或多级摆构型, 但双足的交替支撑却使不稳定的倒立摆运动构成了稳定的行走.

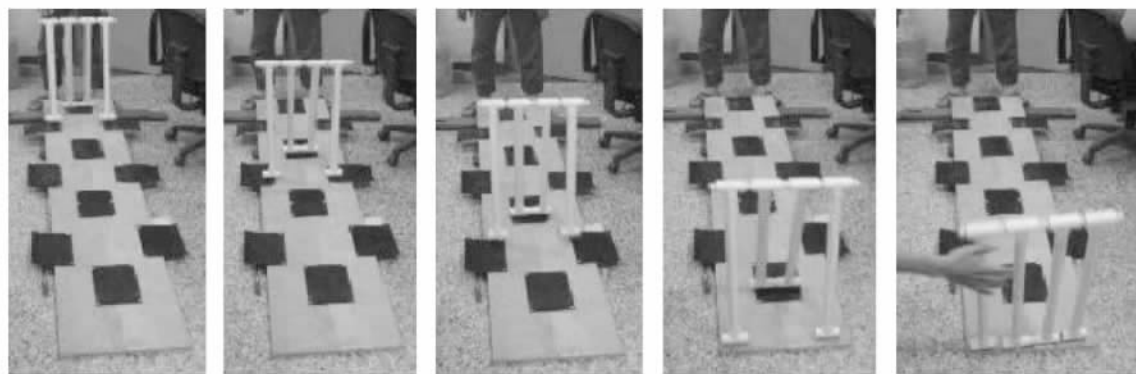


图 1 简单被动行走模型实验

被动行走模型是一种非常简单的机构, 仅靠重力就可以在下坡斜面上行走, 如图 1 所示为作者进行的简单直腿被动行走模型试验. 黑色方块是用于避免摆动腿的足擦地的橡胶垫, 成对布置的腿可以避免侧向摔倒, 该模型实质上是二维平面模型. 对被动行走动力学特性的系统研究始于 McGeer^[1]. 接下来多所大学的研究小组开始了由简单到复杂的渐进

式的动力学建模仿真和样机实验, 给纯被动机器人稍加驱动便可以实现平地的行走. 2005 年, Science 杂志上接连刊登了 3 篇关于被动行走机器人的文章^[2-4], 引起对该种类型的机器人的广泛关注. 被动行走的最大特点在于它的低能耗和自然的步态, 为从仿生学角度研究双足机器人提供了一个新途径. 被动机器人的能量消耗是以 ASIMO 为代表的传统

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10872102)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: tswang@tsinghua.edu.cn

双足机器人的十几分之一^[2].

被动行走的另外研究目标之一,是考察生物的双足步行有多大程度是被动的.Winter^[5]对人步行时小腿比目鱼肌的肌电图信号做了测量,发现在蹬地瞬间小腿肌肉电信号强烈,而腿摆动时肌肉的电信号很弱,这为双足行走是部分被动的说法提供了实验依据.人类的匀速步行大部分情况下可以视为以一步为周期的运动,然而,人完全可以依靠肌肉的作用实现非周期的运动,例如通过改变步长、步幅等.被动行走模型除了具有单周期的运动之外,在一定条件下,无需控制,也能够实现倍周期或者非周期的步态.Goswami等^[6]和 Garcia^[7]已经发现了斜面倾角增大可以导致倍周期步态的产生.

等步幅、步频的步行是一种周期运动,因此,可以用非线性动力学的方法来分析步行.周期步态可以看作是这个动力学系统的周期解.但是由于系统的强非线性,周期解的获取并不容易.首先,周期解的存在性缺乏证明,许多研究者的仿真和实验均发现,在某些模型参数下,周期解存在,但是至多存在一个稳定的周期解^[6,7].在某些参数下,被动行走模型不存在周期解或者只存在不稳定的周期解.其次,获取周期解通常采用的 Newton-Raphson 方法对迭代初值要求较高,猜测不准就难于收敛.因此,本文针对平面直腿圆弧足被动行走模型,分析其动力学特点,采用胞映射和 Newton-Raphson 迭代结合的方法获取周期解,并且利用胞映射得到不动点的吸引盆.在此基础上,讨论了模型参数与倍周期乃至混沌步态的关系.

2. 被动行走的动力学建模与仿真

2.1. 动力学方程

简单的平面被动行走两杆模型如图 2 所示,两条腿分别设为腿 1 和腿 2.设两腿具有完全相同的质量和几何参数.腿长 $HF_2=l$,不计腿粗,质心 C_1, C_2 到髋关节 H 的距离均为 c ,每条腿的质量和相对质心的转动惯量分别为 m 和 J .将坐标系建立在倾角为 γ 的斜面上,则重力在坐标系两个方向上都有分量.模型的足为部分圆弧形状,圆心位于腿上,足的半径为 r .在非碰撞时刻,只有一足与地面接触,且为纯滚动约束.

模型有两个自由度,分别设腿 1 和腿 2 与垂直

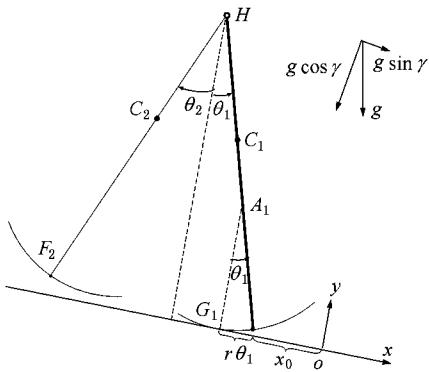


图 2 被动行走模型示意图

斜面的线的夹角为广义坐标 θ_1 和 θ_2 .称图 2 所示状态的腿 1 为支撑腿(Stance leg),腿 2 为摆动腿(Swing leg).由纯滚动条件,足圆心 A_1 在地面上的投影 G_1 到原点 O 的距离为 $x_0 + r\theta_1$,不妨设 $x_0 = 0$.在非碰撞时刻,系统为倒立双摆构型.为了使动力学方程具有普遍性,将方程无量纲化,设 $k_r = \frac{r}{l}, k_c = \frac{c}{l}, k_J = \frac{J}{ml^2}$,并将时间无量纲化为 $t\sqrt{\frac{g}{l}}$.由第二类 Lagrange 方程可推导出系统的动力学方程为

$$M\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}) \tag{1}$$

的形式,其中各项为

$$\begin{aligned} M_{11} &= k_J + (2k_r - 1)^2 + (k_c - 1)^2 \\ &\quad + 2k_c k_r - 2k_r \cos \theta_1 (2k_r + k_c - 2), \\ M_{12} &= k_c [(k_r - 1) \cos(\theta_2 - \theta_1) - k_r \cos \theta_2], \\ M_{21} &= k_c [(k_r - 1) \cos(\theta_2 - \theta_1) - k_r \cos \theta_2], \\ M_{22} &= k_c^2 + k_J, \\ f_1 &= k_r \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_1 (2 - k_c - 2k_r) \\ &\quad + k_c \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (k_r - 1) - k_c k_r \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\ &\quad + g \sin(\theta_1 - \gamma) (2 - k_c - 2k_r) - 2gk_r \sin \gamma, \\ f_2 &= -k_c (k_r - 1) \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad - gk_c \sin(\theta_2 - \gamma). \end{aligned}$$

2.2. 足地碰撞后状态变量的改变

行走过程中的足地碰撞是构成行走步态的基本条件,碰撞可能导致系统各部分状态变量的突变.碰撞模型有许多种,为简化起见,采用最简单的完全非弹性碰撞模型,这也是目前绝大部分被动行走研究者所采用的假设^[1,6,7].在碰撞瞬间,时间极短,且碰

撞力远大于其他力的作用,系统的位形没有突变,即各个角度不变,但是各部分的角速度有突变,且碰撞瞬间发生支撑腿和摆动腿的互换.如图3所示,设在 t_i 时刻足2与地面发生碰撞,碰前瞬间 t_i^- 腿1为支撑腿,腿2为摆动腿.碰后瞬间 t_i^+ 腿2为支撑腿,腿1为摆动腿.存在如下动量矩守恒关系:

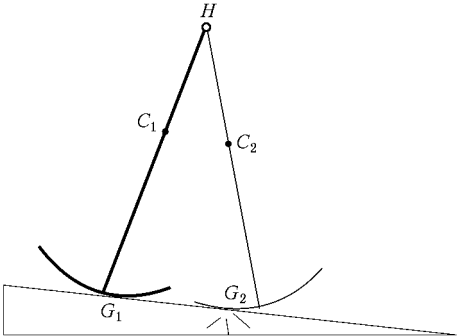


图3 足地碰撞示意图

- 1)系统相对于触地点 G_2 的动量矩 L_{G_2} ;
- 2)碰前的支撑腿即碰后的摆动腿相对于髋关节 H 的动量矩 L_H .

碰前系统的状态变量为 $[\theta_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_1^-, \dot{\theta}_2^-]$,碰后变为 $[\theta_1^+, \theta_2^+, \dot{\theta}_1^+, \dot{\theta}_2^+]$ 根据上面假设,存在 $\theta_1^+ = \theta_1^-, \theta_2^+ = \theta_2^-$,因此待求未知量只有 $\dot{\theta}_1^+, \dot{\theta}_2^+$.角动量的表达式为

$$\begin{aligned} L_{G_2}^- &= J\omega_2^- + G_2 C_2 \times m\mathbf{v}_{C_2}^- \\ &\quad + J\omega_1^- + G_2 C_1 \times m\mathbf{v}_{C_1}^-, \\ L_H^- &= J\omega_1^- + H C_1 \times m\mathbf{v}_{C_1}^-, \\ L_{G_2}^+ &= J\omega_2^+ + G_2 C_2 \times m\mathbf{v}_{C_2}^+ \\ &\quad + J\omega_1^+ + G_2 C_1 \times m\mathbf{v}_{C_1}^+, \\ L_H^+ &= J\omega_1^+ + H C_1 \times m\mathbf{v}_{C_1}^+, \end{aligned}$$

其中 $\omega_1^- = \dot{\theta}_1^- \mathbf{k}$, $\omega_2^- = \dot{\theta}_2^- \mathbf{k}$, $\omega_1^+ = \dot{\theta}_1^+ \mathbf{k}$, $\omega_2^+ = \dot{\theta}_2^+ \mathbf{k}$.由角动量守恒可得

$$\begin{aligned} L_{G_2}^-(\theta_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_1^-, \dot{\theta}_2^-) &= L_{G_2}^+(\theta_1^+, \theta_2^+, \dot{\theta}_1^+, \dot{\theta}_2^+), \\ L_H^-(\theta_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_1^-, \dot{\theta}_2^-) &= L_H^+(\theta_1^+, \theta_2^+, \dot{\theta}_1^+, \dot{\theta}_2^+). \end{aligned} \quad (2)$$

由代数方程组(2),可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^+ &= g_1(\theta_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_1^-, \dot{\theta}_2^-), \\ \dot{\theta}_2^+ &= g_2(\theta_1^-, \theta_2^-, \dot{\theta}_1^-, \dot{\theta}_2^-). \end{aligned} \quad (3)$$

2.3. 仿真算例

对于如下参数的模型:斜面倾角 $\gamma = 0.01 \text{ rad}$, $k_r = 0.25$, $k_c = 0.25$, $k_j = 0.0625$.仿真初值取为 $\theta_0 = [0.4, -0.40, -0.40, 1.0]$ 进行20个无量纲时间单位的仿真结果如图4(a)所示.在经历开始几步的幅值不均变化后,后面呈明显的等幅周期变化.模型的相图,图4(b)也表明状态变量逐渐收敛到极限环上来.

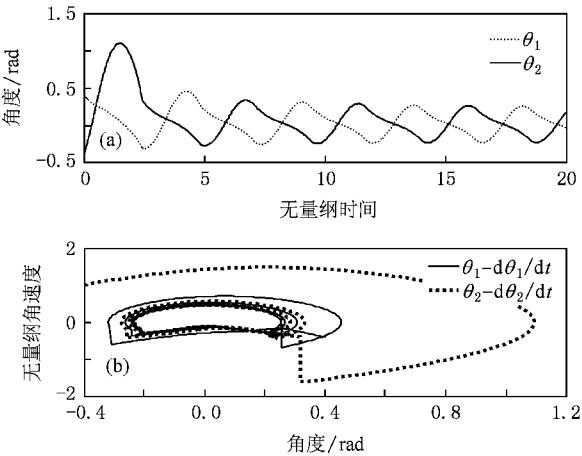


图4 仿真所得两腿角度曲线(a)以及相图(b)

3. 周期步态和不动点的计算

从图4的仿真曲线可以看出,被动行走模型的步态呈现出明显的周期特征.可以利用Poincaré映射对其进行分析.如图5是将相图加上时间维度得到的模型某一条腿的状态变量变化示意图.取足触地后瞬间为Poincaré截面,在截面上,角速度有个跳变(从“●”到“◆”).构造一个Poincaré映射 $S(\theta)$,

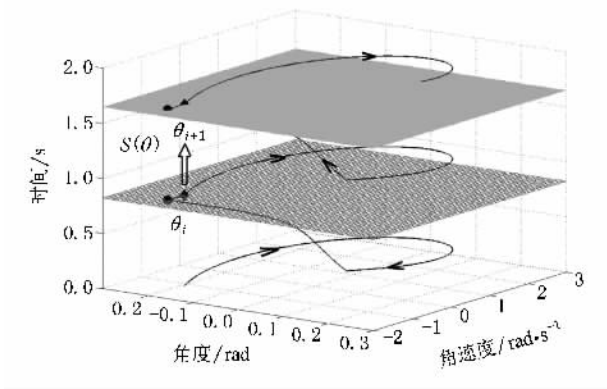


图5 Poincaré映射示意图

将足触地后瞬间的状态变量映射到下一次足触地后瞬间. 一个完整的步态周期包括运动过程和碰撞瞬间的状态变量突变. 前者由非线性常微分方程组(1)确定, 后者由代数方程组(3)确定. 二者结合起来整体考虑, 构成了 Poincaré 映射 S , 使得 $\theta_{i+1} = S(\theta_i)$, 若存在 θ^* 使得 $S(\theta^*) = \theta^*$, 则周期性的步态存在, θ^* 即为不动点.

对于给定参数的模型, 要进行成功的仿真, 首先要寻找模型的周期解, 即获取不动点. 由于系统的强非线性, 映射 S 的解析形式难于得到, 通常采用线性化的方法, 数值求解不动点. Newton-Raphson 方法常被用于获取不动点^[8]. 这是一种线性化的方法. 设 θ^* 为不动点, 则应满足 $S(\theta^*) = \theta^*$. 设初始猜测解为 θ_k , 映射一次后得到 $\theta_{k+1} = S(\theta_k)$, 同时设 $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta_k$, 则 θ_{k+1} 可展开为

$$\begin{aligned} S(\theta_{k+1}) &= S(\theta_k + \Delta\theta_k) \\ &= S(\theta_k) + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta\theta_k, \end{aligned} \quad (4)$$

将 $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta_k$, $\theta_{k+1} = S(\theta_{k+1})$ 代入, 得到

$$\theta_k + \Delta\theta_k = S(\theta_k) + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta\theta_k, \quad (5)$$

$$\Delta\theta_k = \left(I - \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^{-1} [S(\theta_k) - \theta_k]. \quad (6)$$

(6) 式和 $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta_k$ 组成迭代过程, 直至 $\Delta\theta_k$ 小于给定的误差允许值, 即可得到 $S(\theta^*) = \theta^*$. 该方法被绝大部分被动行走研究者用来寻找模型周期步态的不动点, 只要初始值选择得比较合适, 上述方法可以很快地收敛到不动点^[16, 17].

同时以上方法还可以用于判断不动点的稳定性. 假设模型尚未收敛到不动点, 某一次足触地后的状态变量为 θ_i , 下一步为 θ_{i+1} , 设它们与不动点之间的差距分别表示为

$$\theta_i = \theta^* + \delta\theta_i,$$

$$\theta_{i+1} = \theta^* + \delta\theta_{i+1},$$

一步映射之后, $\theta_{i+1} = S(\theta_i)$, 将上式代入并线性化得到

$$\begin{aligned} \theta^* + \delta\theta_{i+1} &= S(\theta_i) = S(\theta^* + \delta\theta_i) \\ &= S(\theta^*) + \frac{\partial S}{\partial \theta} \delta\theta_i, \end{aligned}$$

从而有 $\delta\theta_{i+1} = \frac{\partial S}{\partial \theta} \delta\theta_i$, 即雅克比矩阵 $J = \frac{\partial S}{\partial \theta}$ 可以把

上一步与不动点的误差传递到下一步. 如果雅克比矩阵的特征值的模, 即 Floquet 乘子均位于单位圆内, 每一步的误差会逐渐减小并收敛. 但是如果有一

个特征值的模大于 1, 误差就会被放大, 最终可能导致模型摔倒.

采用上述 Newton-Raphson 迭代方法来确定前面所给参数模型的不动点, 迭代初值取 $\theta_0 = [0.20, -0.20, -0.30, -0.20]$, 可以得到

$$\theta_1^* = [0.1689, -0.1689, -0.2618, -0.2484],$$

然而其对应的雅可比矩阵特征值最大的模为 2.0983, 是一个不稳定的不动点. 若迭代初值取 $\theta_0 = [0.20, -0.20, -0.28, -0.22]$, 则可以得到一个稳定的不动点

$$\theta_2^* = [0.2015, 0.2015, -0.2837, -0.2263],$$

其雅可比矩阵的特征值最大模为 0.65442. 选取其他的迭代初值, 只要能迭代收敛, 都会收敛到这两个不动点之一. 然而实际计算表明, 对于大多数迭代初值, 迭代不能收敛, 也就是说, 迭代初值选取不当, 无法获得周期步态.

在上面的讨论中, “初值”用在两个地方, 一个是用于模型仿真的仿真初值, 如果任意取的话, 模型仿真通常不会成功; 另一个是用于获得不动点而进行 Newton-Raphson 迭代时所选用的迭代初值, 这个初值随意选取, 会造成迭代无法收敛. 如果选取得好, 迭代能够收敛到一个不动点, 那么把这个不动点作为仿真初值来进行仿真, 可以得到周期的步态.

用迭代的方法可能得到稳定或不稳定的不动点. 稳定的不动点作为仿真初值可以得到稳定的周期步态, 不稳定的不动点作为仿真初值, 模型可能会倒掉, 也可能会跳到稳定的不动点上.

用 Newton-Raphson 方法求取不动点, 关键问题在于选取合适的迭代初值. 对于上述直腿模型而言, 尽管将 Poincaré 截面选在足触地后瞬间, 将 4 个状态变量减少到了 3 个, 但经验表明, 初值的选取还是比较困难的, 经常发生迭代无法收敛的情况. 因此, 需要一种合适的方法来确定用于进行 Newton-Raphson 迭代的初值. 另外, 迭代方法的不足还在于无法对模型在整个状态空间的性质进行分析, 即便获得了一个不动点, 也不知道是否还存在其他的不动点. 因此需要其他方法来弥补迭代方法在初值确定上面的不足, 并且需要对模型的全局性质进行分析.

4. 用胞映射计算不动点与吸引盆

胞映射的基本思想是把动力系统的状态空间离

散为状态胞的集合,通过胞映射来描述原系统的动力学行为.首先由 Hsu 提出^[9],并被广泛应用到非线性动力系统的分析中^[10-12].下面采用简单胞映射方法来获取被动行走模型的不动点.

首先确定一个较小的状态变量空间进行试算,设有效的范围为: $\theta_1 \in [0, 0.5]$, $\dot{\theta}_1 \in [-0.5, 0]$, $\dot{\theta}_2 \in [-0.5, 0.5]$,每个方向离散为 26 份,加上陷胞共计 17577 个胞.将所有正规胞依次进行映射计算,有

65 个胞能映射回到 6378 号胞,有 1641 个胞能映射回到 7055 号胞,其他则映射到陷胞.因此本模型存在两个周期胞,部分计算结果如表 1 所示.用周期胞对应的状态变量组合作为迭代初值进行计算,由 6378 号胞可以得到与上面相同的不稳定不动点

$\theta_1^* = [0.1689, -0.1689, -0.2618, -0.2484],$

由 7055 号胞可以得到稳定的不动点

$\theta_2^* = [0.2015, 0.2015, -0.2837, -0.2263].$

表 1 胞映射的部分结果

胞编号	一次映射后返回的胞编号	该胞对应的状态变量 $\theta_0 = [\theta_{10}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{20}]$		
1041	8977	0.02	-0.24	0.5
3196	6378	0.08	-0.14	0.38
6378	6378	0.18	-0.28	-0.26
7055	7055	0.20	-0.28	-0.22
7705	7055	0.22	-0.30	-0.22
8977	7705	0.26	-0.36	-0.30

胞映射同时可以计算得到不动点的吸引盆,经过几次试算,确定状态空间取为 $\theta_1 \in [0, 1]$, $\dot{\theta}_1 \in [-1.2, 0.4]$, $\dot{\theta}_2 \in [-4, 4]$,得到上述模型的吸引盆

及其在 3 个平面的投影如图 6 所示.白色圆点表示不动点的位置.吸引盆从全局角度描述了模型的性质,以阴影区域的点作为仿真初值,模型都能够形成周期的步态.从距离不动点较远的位置出发,模型也

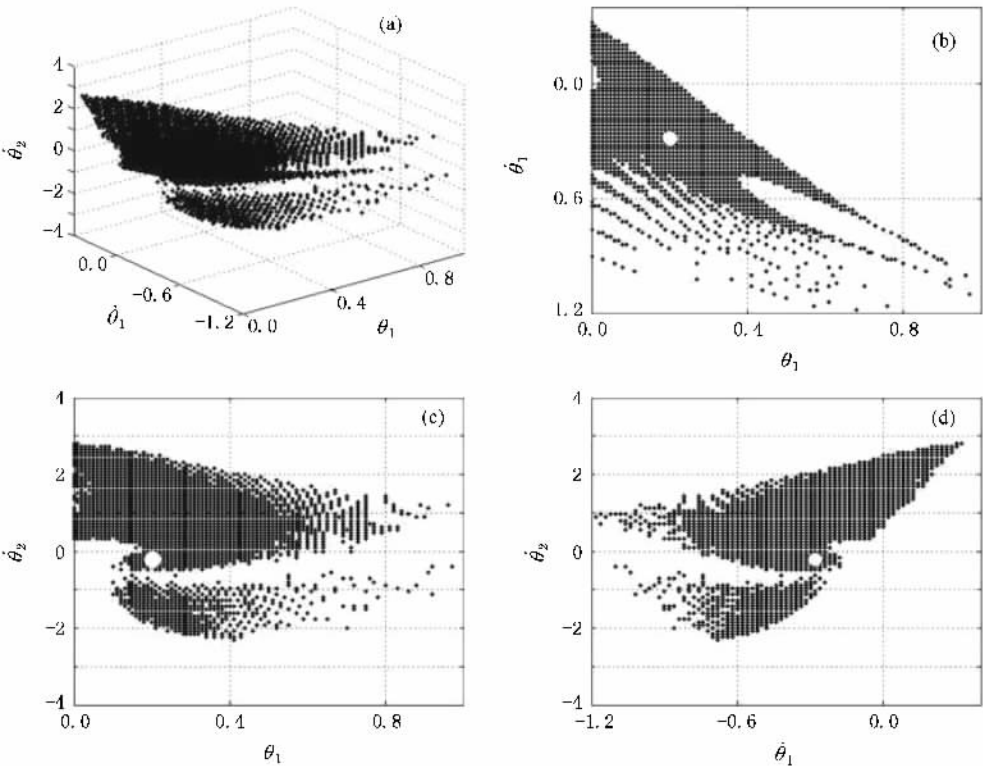


图 6 模型稳定不动点的吸引盆图 (a) 及其投影图 (b) $\dot{\theta}_1$ - θ_1 (c) $\dot{\theta}_2$ - θ_1 (d) $\dot{\theta}_2$ - $\dot{\theta}_1$

能逐渐形成周期的步态。

胞映射和 Newton-Raphson 迭代结合使用,把周期胞作为迭代初值来求取不动点,能够获得所有的不动点,并且利用吸引盆可以对被动行走模型的力学特性进行全面的分析。只要模型存在稳定的单周期不动点,采用该方法,无需猜测迭代初值就可以获得不动点。

5. 参数变化对于模型步态的影响

经过对不同参数模型的仿真发现,在某些参数下,模型不存在以单步为周期的不动点,但是却存在以两步为周期的不动点。这种情况下,胞映射获得周期胞,将其作为初值利用 Newton-Raphson 迭代来求取不动点的方法就不再适用了。这是因为,迭代方法是建立在以一步为周期的假设之上的,尽管胞映射可以获得多倍周期的周期胞,但是除非把迭代的周期性扩展到多步,才能够获得以两步或者四步乃至更多步为周期的不动点,这样显然很麻烦。为此,从倍周期出现开始,可以利用模型的连续性来获得多倍周期的步态。

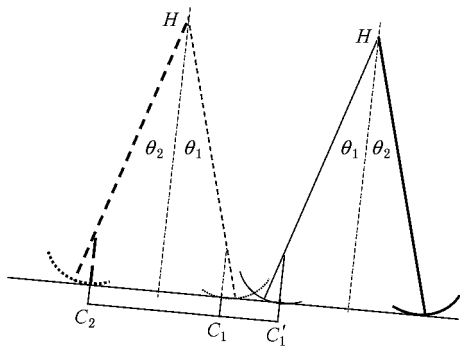


图 7 腿夹角与步长的关系示意图

从稳定不动点附近出发,经过一段时间的仿真可以回到不动点上来,模型的吸引盆就描述了这样的点的范围。同样这也给出了一种可供选择的获得不动点的方法,即在不动点未知的情况下,如果模型存在稳定不动点,而且仿真初值恰好选在了吸引盆内,经过足够长的时间,仿真会收敛到不动点上,并且,在模型参数变化很小的情况下,模型的吸引盆和不动点的变化都很小,因此,一旦已经用胞映射和迭代法联合获得了一组参数下模型稳定的不动点和其吸引盆,另外一组参数如果与它相差很小,可以用已知模型的不动点作为新参数模型的仿真初值,经过

一段时间仿真就可能收敛到新的不动点上,该方法在求取模型倍周期步态时尤为有效。

Goswami 等^[6]和 Garcia^[7]讨论了模型步态随斜面倾角变化的影响,发现倾角增大会出现倍周期步态。故本文主要讨论模型的质量参数及足半径的效果。首先考察转动惯量变化对于模型步态的影响,使用模型的步长来描述步态。由图 7 可以看出步长与双足触地时腿角度的关系为 $L_{step} = 2 C_2 C'_1 = 2 (C_2 C_1 + C_1 C'_1)$ 。由于此时 $|\theta_1| = |\theta_2|$,步长可以表示为 $2 (2l - r) |\sin(\theta_1)| + 2r |\theta_1|$,在我们所关心的腿角度区间内,步长是腿角度的单调增函数,无量纲模型为单位腿长,因此可以从腿角度的变化来观察步长的变化,即用模型不动点 θ^* 的第一个元素来描述步态。

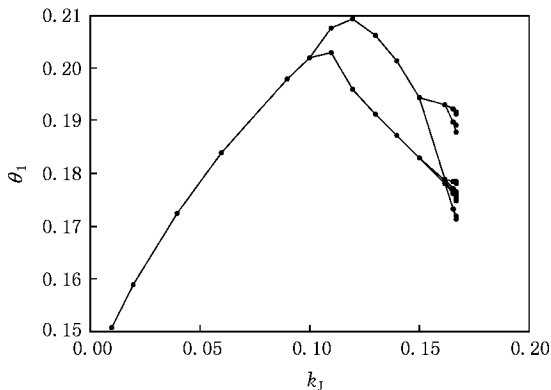


图 8 倍周期与转动惯量的关系

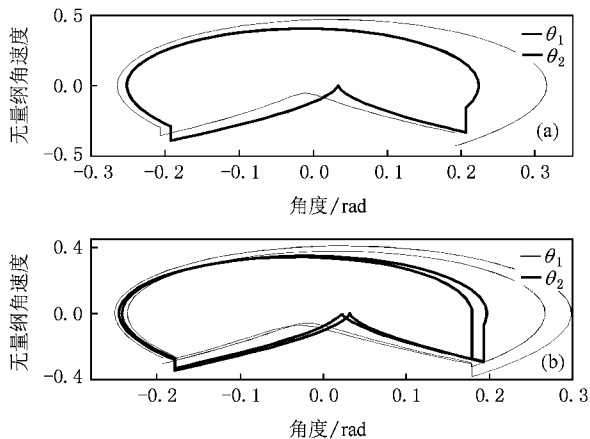


图 9 倍周期(a)和四倍周期(b)的相图

模型参数取为 $\gamma = 0.02 \text{ rad}$, $k_r = 0.2$, $k_c = 0.5$, k_j 从 0.01 逐渐增大的过程中,不动点的第一个元素也逐渐增大,但是到了 $k_j = 0.11$ 的时候,出现倍周

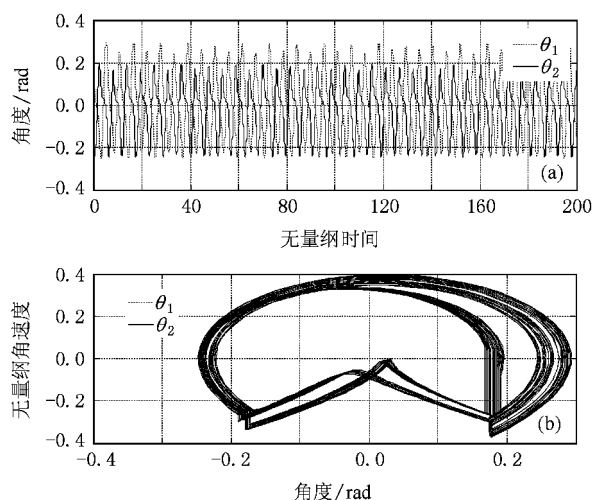
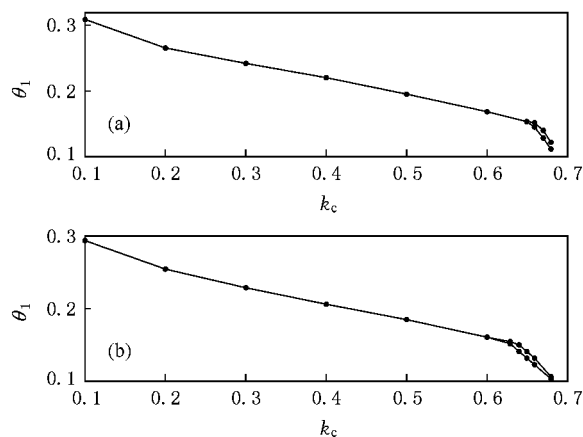


图 10 混沌状态下的腿角度曲线 (a) 和相图 (b)

图 11 质心位置改变, 不动点的变化情况 (a) $k_r = 0.3, k_j = 0.04$ (b) $k_r = 0.2, k_j = 0.06$

期现象, 即模型以两步为一个周期行走. 随着 k_j 进一步增大, 出现四倍周期, 八倍周期等, 如图 8 和图 9 所示.

当 k_j 增大到 0.17 时, 任何一步触地后瞬间的状态变量都与前一步不同, 模型的步态不再具有周期性, 呈现混沌态的步态, 如图 10 所示. 再继续增大转动惯量, 无法找到能够行走的步态.

质心位置变化同样会引起倍周期现象. 模型参数取 $\gamma = 0.02 \text{ rad}$, $k_r = 0.3$, $k_j = 0.04$, k_c 从 0.1 开始逐渐增大, 考察不动点第一个元素的变化情况. 如图 11(a) 所示, 随着 k_c 增大, 不动点第一个元素逐渐减小, 在 k_c 达到 0.65 左右时出现了分岔现象. 取另外的参数 $\gamma = 0.02 \text{ rad}$, $k_r = 0.2$, $k_j = 0.06$, 呈现类似的特点, 只不过分岔现象略微提前出现, 如图 11(b) 所示. 对不同足半径的仿真表明, 足半径减小会引起分岔的出现, 例如 $\gamma = 0.02 \text{ rad}$, $k_c = 0.5$, $k_j = 0.14$ 的模型, 如图 8 所示, 在足半径为 0.2 时是倍周期步态. 当足半径逐渐减小 0.13 时, 出现四倍周期步态; 到 0.095 时, 出现八倍周期步态; 减小到 0.085, 则出现混沌步态, 不再有周期性.

6. 结 论

本文详细介绍了被动行走模型仿真的一般过程, 将胞映射与 Newton-Raphson 迭代联合起来求取模型周期步态的不动点, 并且获得模型不动点的吸引盆. 实践表明, 用胞映射寻找周期胞的方法可以消除选取迭代初值的随意性, 在不动点存在的前提下, 该方法能获得不同参数组合的单周期不动点. 在得到了某组参数的稳定不动点之后, 可以利用映射的连续性获得参数小变化情况下的新的不动点, 进而获得倍周期直至混沌的步态. 不同参数的仿真表明, 在其他参数固定的情况下, 转动惯量增大, 或者质心位置降低, 或者足半径减小, 都会导致分岔的出现. 但是参数联合作用的效果还有待进一步研究.

[1] McGeer T 1990 *International Journal of Robotics Research* **9** 62
 [2] Collins S, Ruina A, Tedrake R, Wisse M 2005 *Science* **307** 1082
 [3] Alexander R M 2005 *Science* **308** 58
 [4] Kuo D 2005 *Science* **309** 1686
 [5] Winter D A 1991 *The Biomechanics and Motor Control of Human Gait: Normal, Elderly, and Pathological* (2nd ed) (Waterloo Ontario: University of Waterloo Press)
 [6] Goswami A, Thuijlt B, Espi 1998 *International Journal of Robotics Research* **17** 1282

[7] Garcia M 1999 (Ph.D. Dissertation) (Cornell University)
 [8] Wang P J, Wu G J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3034 (in Chinese)
 [王培杰、吴国祯 2005 物理学报 **54** 3034]
 [9] Hsu C S 1987 *Cell-to-Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear System* (New York: Springer)
 [10] Hong L, Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese)
 [洪 灵、徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
 [11] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese)
 [徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报

52 1365]

学、洪 灵 1999 力学学报 31 724]

[12] Xu J X , Hong L 1999 *Acta Mech. Sin.* 31 724 (in Chinese) [徐健

Period-doubling gait and chaotic gait of biped walking model^{*}

Liu Ning Li Jun-Feng Wang Tian-Shu[†]

(Department of Engineering Mechanics , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

(Received 9 January 2008 ; revised manuscript received 13 October 2008)

Abstract

Passive walking model can exhibit natural gait on a slope , depending only on the gravity . The gait changes with the changing of parameters . The fixed point of the periodical gait can be obtained by the combination of cell mapping method and Newton-Raphson iteration . By the aid of cell mapping method , periodical cells can be used as the initial value of iteration and the basins of attraction can be obtained . Simulations of models with different parameters show that the increasing of moment of inertia will result in the appearance of period-doubling and chaotic gaits . The same effect can be obtained by the decreasing of foot radius or position of center of mass .

Keywords : cell mapping , biped walking , period-doubling , chaos

PACC : 0545 , 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872102).

[†] Corresponding author. E-mail: tswang@tsinghua.edu.cn