

异常空心光束通过球差光阑透镜的聚焦 和在焦区的位相奇异特性^{*}

罗亚梅¹⁾²⁾ 吕百达^{1)†}

1) 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

2) 泸州医学院生物医学工程系, 泸州 646000)

(2008 年 4 月 23 日收到, 2008 年 11 月 5 日收到修改稿)

研究了用德拜公式对异常空心这类新型光束经过光阑透镜后的聚焦特性. 结果表明, 异常空心光束的形状一般不能保持传输不变性, 但选择合适的截断参数和球差异常空心光束在一定位置可保持其初始光强分布近似不变. 在焦区位相奇点会出现移动、产生和湮灭, 并与截断参数、球差和光阑透镜半角有关. 当无球差时, 出现鞍点, 奇点对的湮灭过程与鞍点对湮灭相伴发生, 导致亚波长结构. 用计算例对结果做了说明, 并与文献中已有工作做了比较.

关键词: 异常空心光束, 球差光阑透镜, 位相奇点

PACC: 4255, 4290

1. 引言

近年来, Wu 等^[1]在 Duke 储存环实验中观察到一种新的有实心核的异常空心电子束, 可用于研究束的横向不稳定性, 为研究储存环中线性和非线性粒子动力学提供了一个重要工具. Cai^[2]将异常空心束推广到光频段, 提出了异常空心光束的数学模型, 并推导出异常空心光束的近轴传输公式. 计算表明, 异常空心光束在近场($z = 0.5$ m)可保持其光强分布的初始形状不变, 随着传输距离的增加中心光强增加, 光束形状发生变化. 对在自由空间中光强分布的变化可用将异常空心光束看做像散高斯模和像散简并模的叠加来解释. 对这类新型光束值得进一步研究的问题有: 1) 异常空心光束在聚焦使用时, 在什么情况下可以保持初始形状不变? 2) 众所周知, 简并模是一类典型的奇点光束^[3], 那么, 异常空心光束是否也有位相奇异特性? 为解决这两个问题, 本文对异常空心光束通过球差光阑透镜的聚焦特性做了研究, 分析了光阑截断参数、球差、光阑透镜的半角宽度等对焦区光强和位相奇点分布的影响. 所得结果深化了对异常空心光束的传输变换和位相奇异特性

的认识, 并有助于探索其潜在应用.

2. 理论模型

如图 1 所示, 直角坐标系原点 O 取在焦距为 f 的透镜的焦点处, 半径为 a ($a \gg \lambda$) 的光阑置于透镜处, α 为光阑透镜的半角宽度. 由德拜公式, 焦区附近的光场可表示为^[4,5]

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Omega} A(Q) \exp(ik\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) d\Omega, \quad (1)$$

式中 $A(Q)$ 为 $z = -f$ 波阵面上 Q 点入射场的振幅因子, $\mathbf{R}$ 为 O 点到场点 P 的位置矢量, $\mathbf{q}$ 为 Q 到 O 点的单位矢量, Ω 为经透镜光阑的圆锥光线对焦点 O 所张的立体角.

将直角坐标系 (x, y, z) 化为球坐标系 (r, θ, φ) , 其中 θ 和 φ 分别为极角和方位角, 极轴沿 z 方向. 引入两个无量纲 Lommel 变量

$$u = kz \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

$$v = k\rho \sin \alpha, \quad (3)$$

式中 ρ 为场点 P 离 z 轴的径向距离. (1) 式可化为

$$E(u, v) = -ik \exp\left(\frac{iu}{\sin^2 \alpha}\right) \int_0^\alpha A(\theta) J_0\left(\frac{v \sin \theta}{\sin \alpha}\right)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10574097, 10874125)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: luoluoyan@126.com; baidalu0@tom.com

$$\times \exp\left[-\frac{iu(\sin\theta)^2}{2(\sin\alpha)^2}\right] \sin\theta d\theta, \quad (4)$$

式中 $J_0(\cdot)$ 为第一类零阶贝塞尔函数.

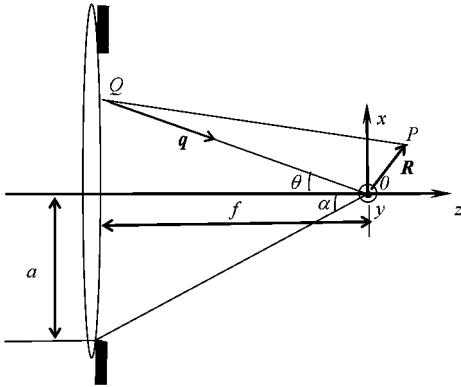


图1 聚焦系统示意图

设光阑透镜处有场分布为^[2]

$$E(\rho') = \left(-2 + \frac{8\rho'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho'^2}{w_0^2}\right) \quad (5)$$

的异常空心光束沿 z 轴正向入射, 式中, $\rho' = f \sin\theta$, w_0 为束腰宽度, 则(4)式中的 $A(\theta)$ 可表示为

$$A(\theta) = \left(-2 + \frac{8\delta^2 \sin^2\theta}{\tan^2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\delta^2 \sin^2\theta}{\tan^2\alpha}\right), \quad (6)$$

式中截断参数

$$\delta = \frac{a}{w_0}. \quad (7)$$

透镜球差可用位相因子 $\exp(ik\Phi_R)$ 描述, 其中, 球差函数^[6]

$$\Phi_R = \left(\frac{S_1}{w_0^4}\right) \rho^4, \quad (8)$$

S_1 为球差系数, (8)式可写为

$$\Phi_R = S_1 \delta^4 \left(\frac{\sin\theta}{\tan\alpha}\right)^4. \quad (9)$$

把(6)和(9)式代入(4)式, 则聚焦场可表示为

$$\begin{aligned} E(u, v) = & -ik \exp\left(\frac{iu}{\sin^2\alpha}\right) \int_0^\alpha \left(-2 + \frac{8\delta^2 \sin^2\theta}{\tan^2\alpha}\right) \\ & \times J_0\left(\frac{v \sin\theta}{\sin\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\delta^2 \sin^2\theta}{\tan^2\alpha} - \frac{ius \sin^2\theta}{2\sin^2\alpha}\right. \\ & \left.+ ikS_1 \delta^4 \frac{\sin^4\theta}{\tan^4\alpha}\right) \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

由(10)式得到聚焦场的光强分布为

$$I(u, v) = |E(u, v)|^2, \quad (11)$$

其位相分布为

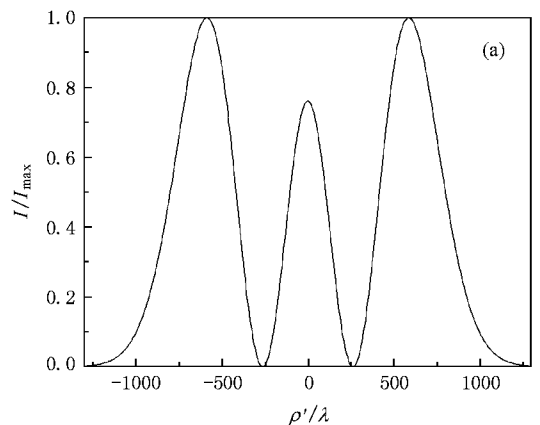
$$\phi = \arctan\left\{\frac{\text{Im}[E(u, v)]}{\text{Re}[E(u, v)]}\right\}. \quad (12)$$

由(11)(12)式知, 焦区的光强、位相分布与截

断参数 δ 、球差 kS_1 、光阑透镜的半角宽度 α 以及位置 u, v 等有关. 在以下的数值计算中, 除特殊说明外, 均取数值孔径 $NA = a/f = 0.1$, $f = 10000\lambda$ 和菲涅耳数 $N_a = a^2/\lambda f = 100$, 以确保德拜公式和近轴近似的有效性.

3. 焦区的光强分布

图2为球差 kS_1 和轴向位置 u 取不同值时, 异常空心光束经过球差光阑透镜的横向归一化光强 $I/I_{\max}$ 分布, $I_{\max}$ 为最大光强, 截断参数 $\delta = 1.905$. 图2(a)是按(5)式所做的初始光强分布, 图2(b)~(d)是无球差时的光强分布, 图2(e)~(g)是有球差时的光强分布. 由图可见, 光强分布随 u 而变化, 在焦面 $u=0$ 处, 异常空心光束的光强分布最集中, 随 $|u|$ 的增加光强分布呈现展宽的趋势. 但无球差时, 只要 $|u|$ 相同, 则对应的光强分布相同, 如图2(b); 有球差时, 光强分布展宽的程度与 kS_1, u 的正负有关, 例如图2(e)中, 对 $kS_1 = 0.01$ 时, $u < 0$ 比 $u > 0$ 展宽多, 对 $kS_1 = -0.01$ 时, 则 $u > 0$ 比 $u < 0$ 展宽多, 且 $kS_1 = 0.01$ 的 $u < 0$ 和 $kS_1 = -0.01$ 的 $u > 0$ (或 $kS_1 = 0.01$ 的 $u > 0$ 和 $kS_1 = -0.01$ 的 $u < 0$) 时相同 $|u|$ 的光强分布相同. 但是, 不管有无球差, 都可以找到一定位置使得其分布的形状和光束初始形状基本一致, 其具体位置和球差有关. 例如无球差时和初始形状基本一致的位置为 $u = \pm 32.1$ (图2(d)); $kS_1 = 0.01$ 时, 对应位置为 $u = -31.8$ 和 32.4 , 相对于无球差时向右移; $kS_1 = -0.01$ 时, 对应位置为 $u = -32.4$ 和 31.8 , 相对于无球差时向左移 (图2(f)(g)). 此外, 数值计算表明, $\delta = 1.905$ 的附近总可以找到和光束初始形状基本一致的位置. 因此, 选择合适的截断参数 δ 和球差 kS_1 , 就可找到与初始光强分布基本一致的位置.



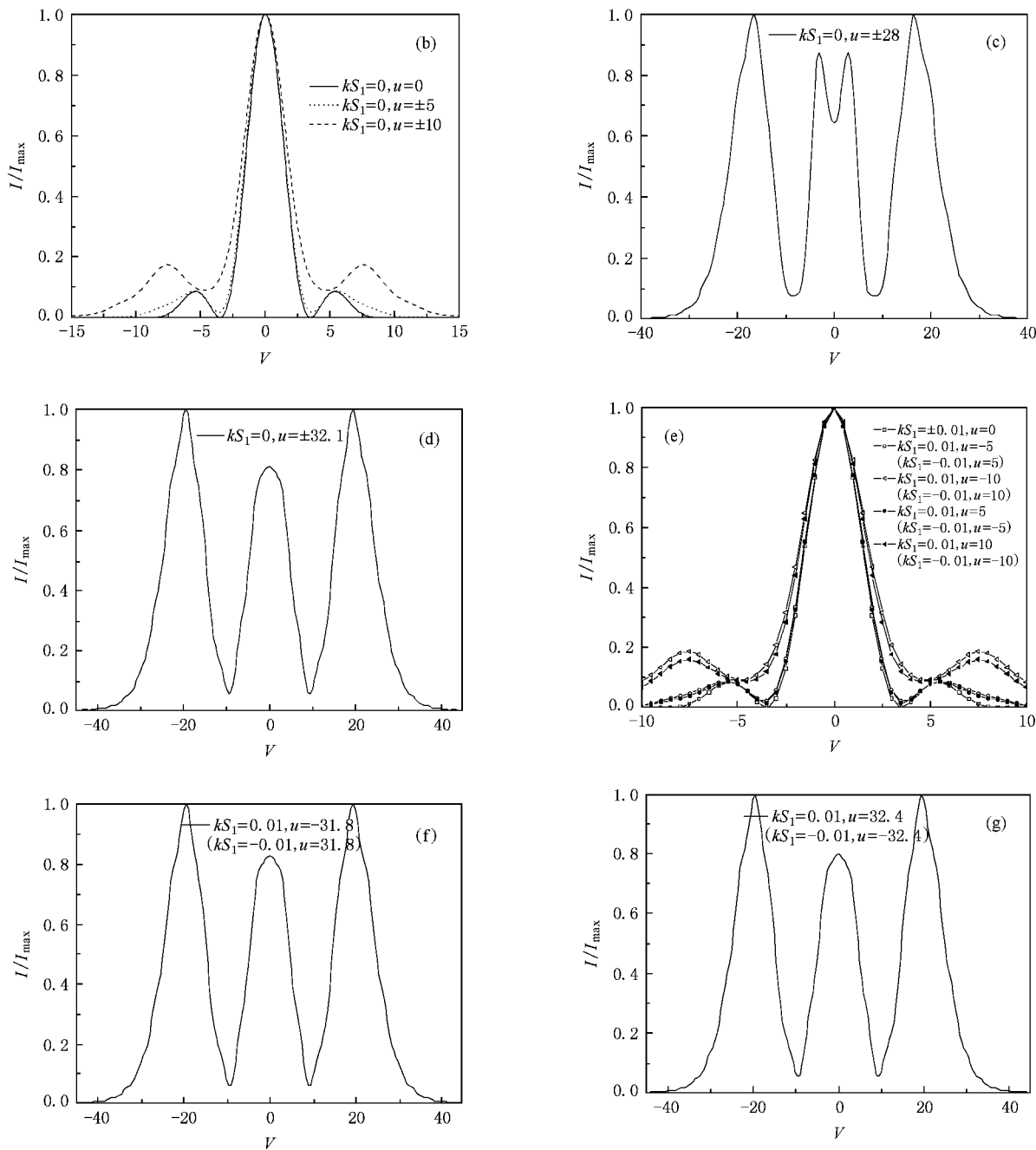


图2 球差 kS_1 和轴向位置 u 取不同值时,异常空心光束在焦区的横向归一化光强 $I/I_{\max}$ 分布 (a)按(5)式所做的初始光强分布 (b)–(d)无球差时的光强分布 (e)–(g)有球差时的光强分布

4. 焦区的位相奇异特性

4.1. 位相奇点与截断参数 δ 和半角宽度 α 的关系

图3A为异常空心光束经过不同截断参数光阑球差透镜后在焦区的等光强线和等位相线分布.在

图3中,(a)–(c): $kS_1 = 0.01$;(d)–(f): $kS_1 = -0.01$;(g)–(i): $kS_1 = 0$.截断参数分别为(a),(d),(g): $\delta = 1.667$;(b),(e),(h): $\delta = 1.912$;(c),(f),(i): $\delta = 2.000$.图4中(a)–(c)为图3(a)中各奇点的等位相线分布(d)–(f)为图3(g)中各奇点的等位相线分布(g),(h)为图3(b),(c)对应的等位相线分布(i)为图3(h)对应的等位相线分布.由

图 3(a) 可见, 当 $\delta = 1.667$ 时, 焦面附近有 A, B, C 三个奇点, 用文献 [7] 方法知各奇点的拓扑电荷均为 $+1$, 总拓扑电荷数为 $+3$. 当截断参数 δ 增大到 1.912 时, C 已分裂成 C, D, E 三个位相奇点 (图 3(b)), 其对应的拓扑电荷分别为 $-1, +1, +1$; A, B 的拓扑电荷不变为 $+1$. 当 δ 增大 2.000 时, B, C 两个奇点靠拢而湮灭, 剩下 A, D, E 三个位相奇点 (图 3(c)), 且各奇点的拓扑电荷均为 $+1$. 在整个过程中, 总的拓扑电荷守恒, 奇点 A 没有参加分裂和湮灭且保持在焦面附近.

由比较图 3(a)–(c): $kS_1 = 0.01$ (d)–(f): $kS_1 = -0.01$ 和 (g)–(i): $kS_1 = 0$ 的不同可见, 无球差时 (图 3(g)–(i)), 随着 δ 的增大, 位相奇点 A, B, C

在焦面上移动但并未离开焦面, 各奇点的位置为: $\delta = 1.667$ 时, $A(0, 3.26), B(0, 8.04), C(0, 10.60)$; $\delta = 1.912$ 时, $A(0, 3.53), B(0, 9.05), C(0, 10.50)$; $\delta = 2.000$ 时, $A(0, 3.64)$. 奇点 D, E 虽有移动但对称位于焦面两侧, 即 $\delta = 1.912$ 时, $D(-2.03, 10.90), E(2.03, 10.90)$; $\delta = 2.000$ 时, $D(-2.48, 11.20), E(2.48, 11.20)$, 这与在德拜近似下, 聚焦高斯光束位相奇点的演化规律^[4]在定性上是一致的. 当有球差时, 例如 $kS_1 = 0.01$ (图 3(a)–(c)), 位相奇点 A, B, C 不在焦面上而在其附近, 如 $\delta = 1.667$ 时, $A(0.15, 3.26), B(0.16, 8.04), C(0.44, 10.60)$; $\delta = 1.912$ 时, $A(0.20, 3.53), B(0.18, 9.05), C(-0.20, 10.50)$; $\delta =$

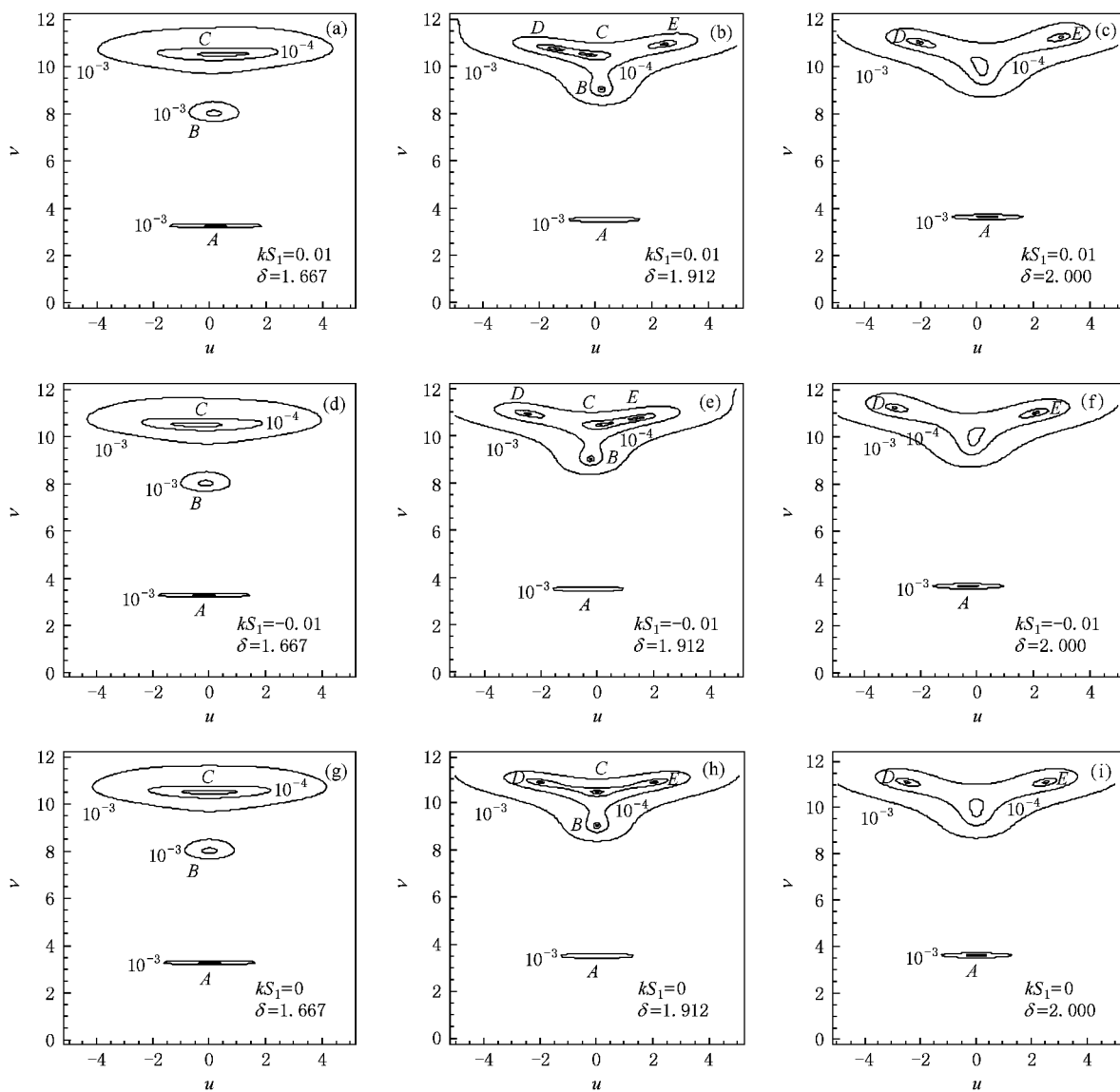


图 3 异常空心光束等光强线随球差 kS_1 和截断参数 δ 的变化 kS_1 及 δ 值分别为 (a) $0.01, 1.667$ (b) $0.01, 1.912$ (c) $0.01, 2.000$; (d) $-0.01, 1.667$ (e) $-0.01, 1.912$ (f) $-0.01, 2.000$ (g) $0, 1.667$ (h) $0, 1.912$ (i) $0, 2.000$

2.000 时, $A(0.23, 3.65)$ 。奇点 D, E 位于焦面两侧 (d)–(f)), 位相奇点 A, B, C 也不在焦面上而在其附近 如 $\delta = 1.667$ 时, $A(-0.15, 3.26), B(-0.16,$

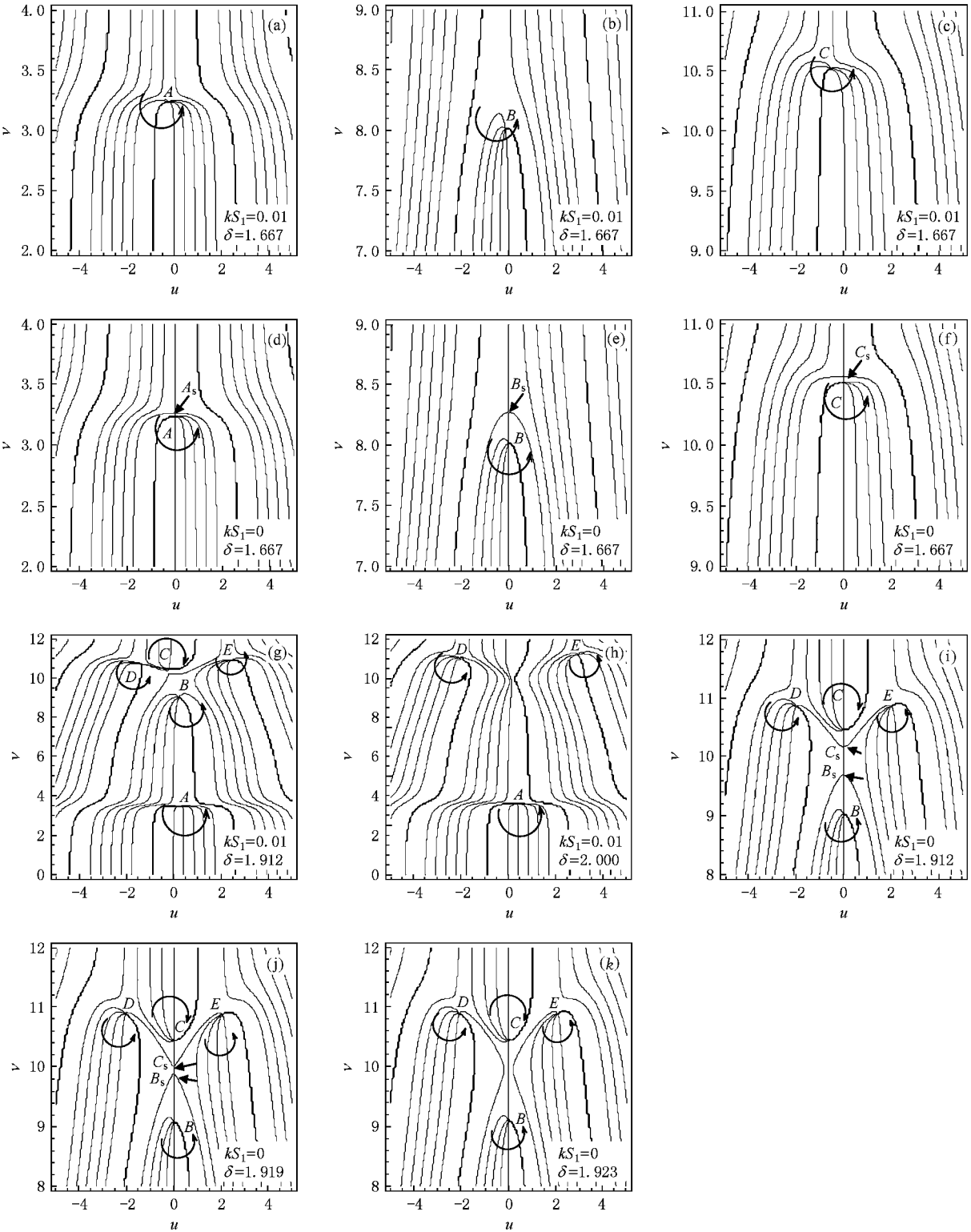


图 4 异常空心光束经过不同截断参数光阑球差透镜后聚焦场等位相线分布 (a)–(c)为图 3(a)中各奇点的等位相线分布 (d)–(f)为图 3(g)中各奇点的等位相线分布 (g)(h)为图 3(b)(c)对应的等位相线分布 (i)为图 3(h)对应的等位相线分布

8.04), $\alpha(-0.44, 10.60)$; $\delta = 1.912$ 时, $A(-0.20, 3.53)$, $B(-0.18, 9.05)$, $\alpha(0.20, 10.50)$; $\delta = 2.000$ 时, $A(-0.23, 3.65)$. 奇点 D, E 也位于焦面两侧但并不关于焦面对称, 即 $\delta = 1.912$ 时, $D(-2.41, 11.00)$, $E(1.45, 10.80)$; $\delta = 2.000$ 时, $D(-2.94, 11.30)$, $E(2.10, 11.10)$. 比较 $kS_1 = \pm 0.01$ 结果还可得知, 图 3(a)–(f) 中的位相奇点 A, B, C 对称位于焦面两侧, 图 3(b), (c) 中的奇点 D, E 和 (e), (f) 中的奇点 E, D 对称位于焦面两侧.

此外, 由图 4 等位相线分布知, 无球差且 δ 较小时每个奇点附近都有一个鞍点, 在该点的位相梯度为 $0^{[4]}$, 如图 4 中的 (d)–(f) 中的 A_s, B_s, C_s (箭头所指处), 但是有球差时, 鞍点消失, 如图 4 中的 (a)–(c). 随着 δ 的增大, 图 4(i) 中位相奇点 B, C 附近的鞍点 B_s, C_s 逐渐靠近而消失, 见图 4(j), (k); 当继续增加至 $\delta = 2.000$ (图 3(i)) 时, 位相奇点 B, C 也消失. 图 5(a)–(b) 给出了图 4(i) 中 B_s, C_s 以及 B, C

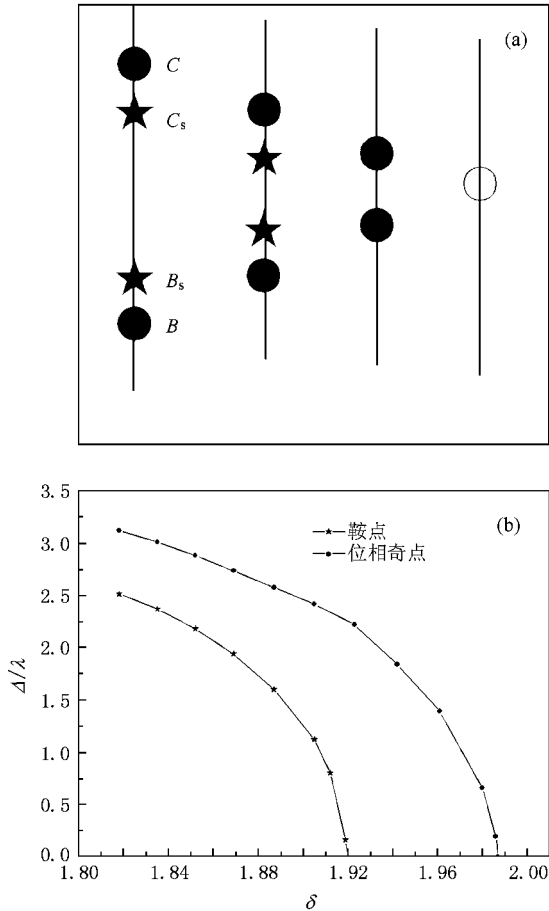


图 5 (a) 位相奇点对 B, C 和鞍点对 B_s, C_s 湮灭过程示意图, 图中“●”位相奇点, “★”鞍点, “○”鞍点和位相奇点都湮灭 (b) 位相奇点 B, C 和鞍点 B_s, C_s 间距离随 δ 的变化

的湮灭示意图和其间距离随 δ 的变化. 由图可见, 随着 δ 的增加, 焦面上两鞍点和两位相奇点间的距离不断减小达到亚波长量级, 如 $\delta = 1.912$ 时, B_s, C_s 间距离为 $\Delta = 0.80\lambda$, $\delta = 1.980$ 时, B, C 间距离为 $\Delta = 0.66\lambda$, 且鞍点在奇点湮灭之前消失. 将图 5(a) 与文献 [4] 中的图 8 比较知, 对异常空心光束鞍点随截断参数 δ 增加而变化和鞍点对湮灭的规律与高斯光束情况是不同的. 对高斯光束, 焦面上两个位相奇点附近的鞍点对随截断参数 δ 增加彼此靠近, 然后变为分布在焦面两侧的两个鞍点, 最后随奇点对一起湮灭.

图 6 为当半角宽度 α 和球差 kS_1 取不同值时, 异常空心光束的位相奇点 B, C 间距离随 δ 的变化. “—□—”为图 3 中 $\alpha = 0.10$ 且无球差时 B, C 所对应的距离变化; “—■—”为 $\alpha = 0.10$ 且 $kS_1 = \pm 0.01$ 时 B, C 所对应的距离变化; “—○—”为 $\alpha = 0.05$ 且无球差时 B, C 所对应的距离变化; “—●—”为 $\alpha = 0.05$ 且 $kS_1 = \pm 0.01$ 时 B, C 所对应的距离变化. 由图 6 可见, 对于相同的 α , 只要 δ 和 kS_1 绝对值相同, 两奇点间的距离和球差的正负无关. 随着 δ 的增大, 两奇点间距离变小产生亚波长结构以致湮灭, 有球差湮灭所对应的 δ 略大于无球差湮灭所对应的 δ , 如 $\alpha = 0.10$ 且无球差 B, C 湮灭时 $\delta = 1.987$, 有球差 $kS_1 = \pm 0.01$ 时则为 $\delta = 1.988$. 此外, α 越小, 湮灭所对应的 δ 越小, 如 $kS_1 = \pm 0.01$ 时, $\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.05$ 湮灭所对应的 δ 分别为 1.988 和 1.980.

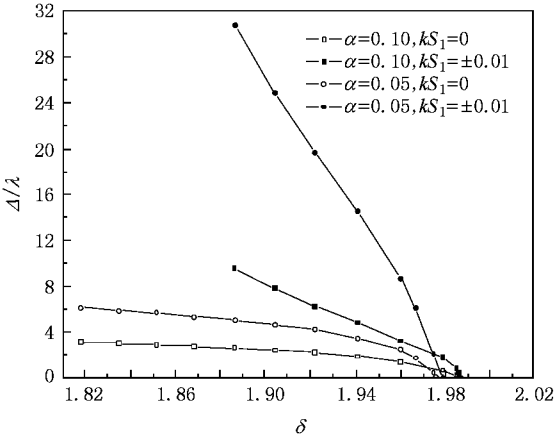


图 6 α 和 kS_1 取不同值时位相奇点 B, C 间距离随 δ 的变化

4.2. 位相奇点与球差的关系

图 7 为异常空心光束经过不同球差的光阑球差透镜后焦区的等光强线. 由图知, 随着球差 kS_1 的增

大,图 3(b)中 D, C 两位相奇点逐渐靠近并湮灭,剩下位相奇点 A, B, E (如图 7(a)),这些奇点的位置为 $A(0.93, 3.53), B(0.60, 9.05), E(3.21, 11.1)$,即相对于焦面右移.若为负球差,则图 3(e)中 E, C 湮灭,剩下 A, B, D (如图 7(b)),这些奇点的位置为 $A(-0.93, 3.53), B(-0.60, 9.05), D(-3.21, 11.1)$,即相对于焦面左移.图 8 给出了图 3(b)中奇点 C, D (或 C, E) 间的距离随球差 kS_1 的变化曲线.由图可见,截断参数一定时,随着 kS_1 绝对值的增

大,两奇点的距离越来越小,出现亚波长结构直至湮灭.截断参数不同,则湮灭时的 kS_1 也不相同,截断参数越大,湮灭所需要的 kS_1 越大.分析表明^[7],剩余奇点 A, B, E (或 A, B, D) 的拓扑电荷为 $+1$.若继续增大球差绝对值大小,剩余奇点会逐渐远离焦面.因此,改变球差会引起奇点的湮灭和移动,而其正负会影响奇点湮灭的位置和移动的方向.在湮灭过程中,拓扑电荷守恒.

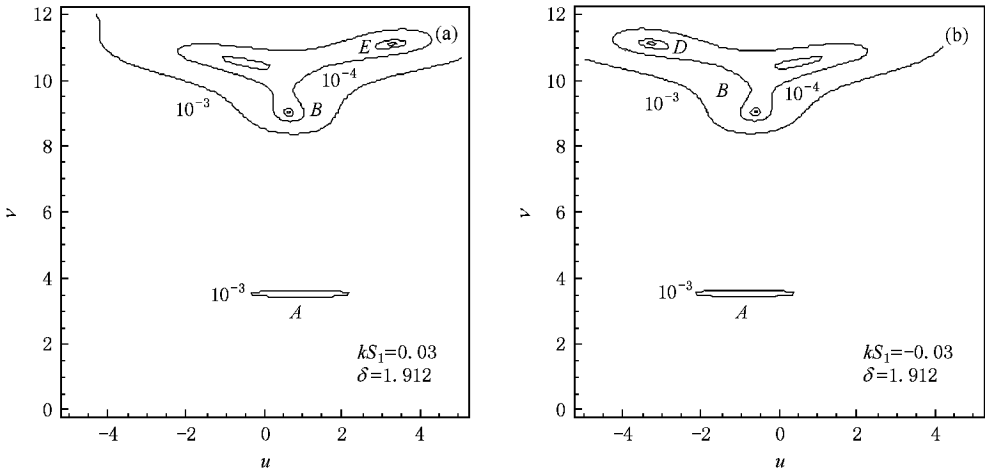


图 7 异常空心光束经过不同球差的光阑球差透镜后焦区的等光强线 $\delta=1.912$ (a) $kS_1=0.03$ (b) $kS_1=-0.03$

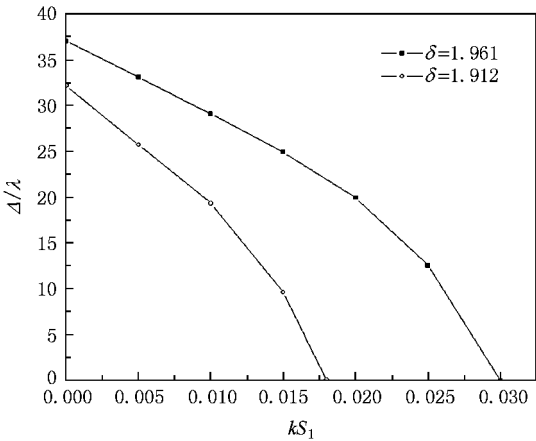


图 8 奇点 C, D (或 C, E) 间距离随球差 kS_1 的变化

5. 结 论

本文对异常空心光束经过光阑球差透镜聚焦后,光阑截断参数、球差和光阑透镜的半角宽度对焦区光强和位相奇点分布的影响做了详细研究.结果

表明,焦区光强分布形状随着 u 的不同而变化,选择合适的截断参数 δ 和球差 kS_1 ,可以找到光强分布与初始形状基本一致的位置 u .有球差($kS_1 \neq 0$)时,随着光阑截断参数的变化会有位相奇点的产生、移动和湮灭,且拓扑电荷守恒,这和文献[8,9]中无球差情况时的规律是相似的.然而,球差的存在使得焦面外的奇点不再对称分布且焦面附近的奇点会移动.球差的正负也会影响位相奇点的移动方向和湮灭位置.无球差时,位相奇点附近会出现鞍点,位相奇点对的湮灭过程与鞍点对的湮灭相伴发生,导致亚波长结构,但其湮灭规律和高斯光束情况不同^[4].有球差时,鞍点消失.光阑透镜的半角宽度 α 不同,位相奇点湮灭对应的 δ 不同, α 越小,湮灭所对应的 δ 越小.本文用德拜公式进行计算,所取参数满足德拜近似.直接的数值计算可验证,使用 Collins 公式也可得到相同结果,因为 Collins 公式在近轴近似下是适用的.本文所得结果深化了对异常空心光束传输变换和位相奇点演化规律的认识,并有助于探索这类可产生位相奇点光束在光镊、原子俘获等方面的潜在应用^[10,11].

- [1] Wu Y K , Li J , Wu J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 134802-1
- [2] Cai Y J 2007 *Opt. Lett.* **32** 3179
- [3] Vaughan J M , Willetts D V 1983 *J. Opt. Soc. Am.* **73** 1018
- [4] Karman G P , Beijersbergen M W , Duijl A V , Woerdman J P 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 884
- [5] Born M , Wolf E 1999 *Principles of Optics* (Cambridge : Cambridge University Press) p485
- [6] Yoshida A , Asakura T , Uozumi J 1996 *Opt. Commun.* **123** 694
- [7] Freund I , Shvartsman N 1994 *Phys. Rev. A* **50** 5164
- [8] Karman G P , Beijersbergen M W , Duijl A V , Woerdman J P 1997 *Opt. Lett.* **22** 1503
- [9] Diehl D W , Visser T D 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 2103
- [10] Dong L W , Ye F W , Wang J D , Li Y P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3353 (in Chinese)[董亮伟、叶芳伟、王建东、李永平 2004 物理学报 **53** 3353]
- [11] Cheng K , Yan H W , Lü B D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4911 (in Chinese)[程 科、闫红卫、吕百达 2008 物理学报 **57** 4911]

Focusing of an anomalous hollow beam by a spherically aberrated aperture lens and its phase singularities in the focal region^{*}

Luo Ya-Mei^{1 2)} Lü Bai-Da^{1)†}

¹ *Institute of Laser Physics & Chemistry , Sichuan University , Chengdu 610064 , China*)

² *Department of Biomedical Engineering , Luzhou Medical College , Luzhou 646000 , China*)

(Received 23 April 2008 ; revised manuscript received 5 November 2008)

Abstract

The focusing properties of a novel type of beam , i. e. an anomalous hollow beam focused by a spherically aberrated aperture lens , are studied by using the Debye formula. It is shown that , the shape of the anomalous hollow beam does not keep unchanged upon propagation. However , the anomalous hollow beam at a certain position can keep its initial profile nearly unchanged by selecting the suitable truncation parameter and spherical aberration. The motion , creation and annihilation of phase singularities occur in the focal region , which depends on the truncation parameter , the spherical aberration and the half angle of the aperture lens. The saddle points may appear , and the annihilation process of a pair of phase singularities is accompanied by the annihilation of a pair of saddle points in the spherical aberration-free case , which leads to the subwavelength structure. The results are illustrated by numerical examples and are compared with the results of previous work.

Keywords : anomalous hollow beam , spherically aberrated aperture lens , phase singularity

PACC : 4255 , 4290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10574097 , 10874125).

[†] Corresponding author. E-mail : luoluoyan@126.com ; baidalu0@tom.com