

薄壁曲线箱梁剪力滞计算的有限段方法^{*}

吴幼明^{1)†} 岳珠峰²⁾ 吕震宙²⁾

1) 佛山大学数学系, 佛山 528000)

2) 西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2008 年 4 月 14 日收到, 2008 年 6 月 10 日收到修改稿)

采用能量变分法导出的控制微分方程的齐次解作为梁段的有限元位移模式, 建立了考虑初曲率的弯曲、扭转、剪力滞耦合和畸变的半解析有限段模型. 由直接刚度法导出了梁段单元的刚度矩阵, 由功能原理获得单元荷载列阵, 提出了一种能对工程中常用的多跨连续曲线箱梁剪力滞计算的有限段法. 制作了一两跨连续曲线箱梁有机玻璃实验模型, 分别进行了在集中荷载和均布荷载作用下的剪力滞效应实验研究. 其结果与有限段法计算结果以及有限元法的计算值均符合良好, 从而验证了有限段方法的正确性.

关键词: 薄壁箱梁, 剪力滞, 有限段法, 模型实验

PACC: 4630

1. 引言

箱形截面梁具有结构自重较轻, 抗弯抗扭刚度大, 便于现代化施工等优点, 被广泛应用于国内外桥梁建设上. 腹板间距较大的宽箱梁承受对称弯曲荷载时, 翼板将产生剪切变形, 导致翼板上的正应力沿宽度方向呈不均匀分布, 其间存在剪滞效应. 以往应用有限段法^[1-4]研究剪力滞, 主要都是用于直线箱梁的剪力滞分析. 曲线箱梁由于存在弯扭耦合作用, 使得剪力滞分析变得复杂, 它的计算与分析通常运用空间有限元技术^[5-12], 但是计算量大, 不便于工程应用. 本文将分析直线箱梁剪滞效应的有限段法^[13]推广到曲线箱梁中去. 文中采用能量变分法导出的控制微分方程^[14]的齐次解作为梁段的有限元位移模式, 由直接刚度法导出了梁段单元的刚度矩阵, 由功能原理获得单元结点荷载列阵, 建立了考虑初曲率的弯曲、扭转、剪力滞耦合和畸变的半解析有限段模型. 将三维空间问题简化为一维空间, 实现了在结构分析中自动计入剪滞效应和畸变效应的功能. 制作了一两跨连续曲线箱梁有机玻璃模型, 进行了在集中荷载和均布荷载作用下的剪滞和畸变效应实验研究, 并结合模型梁作了有限元的数值分析. 本文方法计算结果与模型实验的实测值以及有限元法的计

算值均符合良好, 从而验证了有限段方法的正确性.

2. 基本假定

为描述曲线箱梁, 采用三维直角流动坐标系, 每一截面的局部坐标原点均在箱梁截面的形心上, z 轴指向曲率半径的切线方向, x, y, z 符合右手螺旋法则. 曲线箱梁截面尺寸及坐标系如图 1 所示. 曲线箱梁在分布竖向荷载和分布扭矩作用下, 产生竖向弯曲和扭转如图 2 所示.

图 1 及图 2 中, b_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为悬臂板净宽和顶、底板净宽的一半; $\bar{B}$ 为箱梁上翼板的宽度; h_i ($i = 1, 2, 3$) 分别是箱梁形心轴至悬臂板、顶板和底板中面的距离; h 为箱梁的高度; u, v, w 分别为坐标 x, y, z 方向的位移; t_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为悬臂板、顶板和底板的厚度; t_w, θ 分别是腹板的厚度和倾角; R_0 为箱梁中线的曲率半径; Q_y 为剪力; M_x 为弯矩; T_z 为扭矩; R 为箱梁的曲率半径; $\bar{\theta}$ 为箱梁的中心角.

根据薄壁结构理论, 本文采用以下的基本假定:

1) 竖向弯曲考虑初曲率的影响, 其他变形不考虑初曲率的影响.

2) 只在竖向弯曲中计入剪力滞效应.

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10472094, 10572117) 资助的课题.

[†] E-mail: wuyouming@fosu.edu.cn

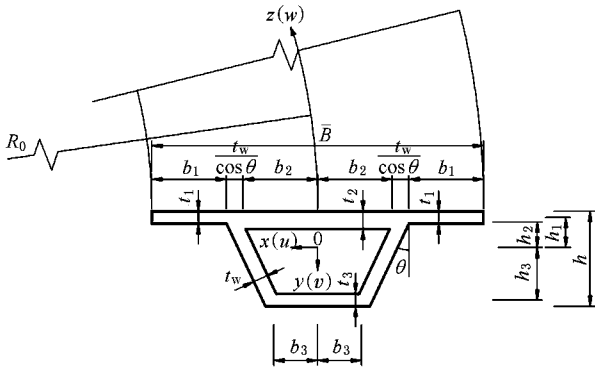


图 1 曲线箱梁截面尺寸及坐标系示意图

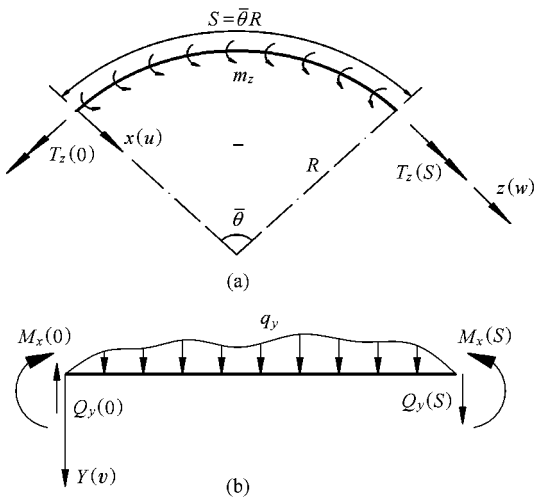


图 2 曲线箱梁荷载示意图 (a)分布扭矩 m_z (b)分布竖向荷载 q_y

3)翼板和腹板的平面外无限柔性,腹板中的应力可以由初等梁理论来确定,其应变能仅计算弯曲应变能。

4)忽略顶、底板竖向纤维间的挤压变形($\epsilon_y = 0$)、横向变形($\epsilon_x = 0$)、板平面外的剪切变形($\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = 0$)。

5)畸变由平面外的畸变横挠和平面内的畸变翘曲组成,取截面的畸变角 γ 为畸变广义坐标。

6)由于翼板除产生服从平截面假设刚性截面的均匀位移外,尚有剪力滞引起的翘曲位移,所以除了竖向位移函数 $v(z)$ 和扭转位移函数 $\phi(z)$ 外,尚需增设另外一个量测剪力滞效应尺度的翼板剪力滞翘曲位移函数 $\bar{\omega}_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$),才能准确地描述曲线箱梁翼板沿宽度方向的纵向位移。根据文献[15, 16]的研究,将翼板横截面上的悬臂板、顶板、底

板的剪力滞翘曲位移函数假设为

$$\bar{\omega}_i(x, y, z) = \mp h_i \left(1 - \frac{x^3}{b_i^3} \right) W(z) \quad (-b_i \leq x \leq b_i), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中, $W(z)$ 为翼板纵向位移差函数。

7)不考虑曲率变化对剪应力 τ 产生的影响。

根据上述假定,曲线箱梁翼板上的正应变,除了服从平截面假设刚性截面均匀位移产生的考虑曲率沿梁宽变化影响的正应变 ϵ_{z1i} ($i = 1, 2, 3$) 外,尚需要补充由剪力滞翘曲位移产生的正应变 ϵ_{z2i} ($i = 1, 2, 3$),可以写成

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \epsilon_{z1i} + \epsilon_{z2i} \\ &= \pm h_i \left[k_x \left(1 + \frac{x}{R} \right) + \left(1 - \frac{x^3}{b_i^3} \right) W'(z) \right] \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

式中, k_x 为梁轴线处的曲率。

3. 梁段单元的位移模式

根据上述基本假定和图 2 所示荷载条件,可建立箱梁的总势能泛函,通过变分运算,可得到剪滞控制微分方程和边界条件^[14]如下:

$$\left(EI_m + \frac{EI_w}{R^2} \right) v'''' - \frac{GK_T}{R^2} v'' + \frac{EI_w}{R} \phi'''' - \frac{EI_m + GK_T}{R} \phi'' + \frac{3}{4} EI_s W''' - q_y = 0, \quad (3)$$

$$\frac{EI_w}{R} v'''' - \frac{EI_m + GK_T}{R} v'' + EI_w \phi'''' - GK_T \phi'' + \frac{EI_m}{R^2} \phi - \frac{3EI_s}{4R} W' - m_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{9EI_s}{14} W''' + \frac{3EI_s}{4} \left(v''' - \frac{\phi'}{R} \right) - \frac{9GI_{sa}}{5} W = 0, \quad (5)$$

$$EI_d \gamma'''' + K_d \gamma - \frac{M_x}{2R} - \frac{m_z}{2} = 0, \quad (6)$$

$$\left[\left(EI_m + \frac{EI_w}{R^2} \right) v''' - \frac{GK_T}{R^2} v' + \frac{EI_w}{R} \phi''' - \frac{EI_m + GK_T}{R} \phi' + \frac{3}{4} EI_s W'' + Q_y \right] \delta v \Big|_0^s = 0, \quad (7)$$

$$\left[\left(EI_m + \frac{EI_w}{R^2} \right) v'' + \frac{EI_w}{R} \phi'' - \frac{EI_m}{R} \phi + \frac{3}{4} EI_s W' + M_x \right] \delta v' \Big|_0^s = 0, \quad (8)$$

$$\left[-\frac{EI_w}{R} v''' + \frac{GK_T}{R} v' - EI_w \phi''' + GK_T \phi' - T_z \right] \delta \phi \Big|_0^s = 0, \quad (9)$$

$$\left[EI_{\omega} \left(\phi'' + \frac{v''}{R} \right) \right] \delta \phi' \Big|_0^s = 0, \quad (10)$$

$$\left[EI_s \left(\frac{9}{14} W' + \frac{3}{4} v'' - \frac{3}{4R} \phi \right) \right] \delta W \Big|_0^s = 0, \quad (11)$$

$$[-EI_d \gamma'''] \delta \gamma \Big|_0^s = 0, \quad (12)$$

$$[EI_d \gamma''] \delta \gamma' \Big|_0^s = 0, \quad (13)$$

式中, E 和 G 分别为弹性模量和剪切模量; K_T 为抗扭惯性矩; I_{ω} 为扇性惯性矩; $I_m = I_x + I_f \frac{b_2^2}{R^2} + I_1 \left(\frac{b_1 b_2 + b_2^2}{R^2} + \frac{b_1^2}{3R^2} \right) + I_2 \frac{b_2^2}{3R^2} + I_3 \frac{b_3^2}{3R^2}$ 为广义惯性矩; $I_f = \frac{2}{3} t_w (h_2^3 + h_3^3)$ 为两腹板的惯性矩; $I_i = 2h_i^2 t_i b_i$ ($i = 1, 2, 3$) 分别是悬臂板、顶板和底板对截面中心轴的惯性矩; t_i ($i = 1, 2, 3, w$) 分别为悬臂板、顶板、底板和腹板的厚度; $I_s = I_1 + I_2 + I_3$ 为翼板惯性矩; $I_x = I_s + I_f$ 为截面惯性矩; $I_{sa} = 2h_1^2 \frac{t_1}{b_1} + 2h_2^2 \frac{t_2}{b_2} + 2h_3^2 \frac{t_3}{b_3}$ 为广义惯性矩; $\frac{M_x}{R}$ 为等代分布扭矩; I_d 为畸变翘曲惯性矩; K_d 为箱梁抗畸变框架刚度。

将曲线箱梁沿桥跨方向分成若干个梁段(单元). 每一个单元的两端结点各有 7 个位移基本未知量, 即 u (挠度)、 v' (转角)、 ϕ (扭转角)、 ϕ' (扭率)、 W (翼板纵向位移差函数)、 γ (畸变角)、 γ' (畸变翘曲位移)。

则梁段的位移模式来自剪滞控制微分方程(3)–(6)式的齐次解为

$$\begin{aligned} u(z) = & L_3 (C_1 \sinh kz + C_2 \cosh kz) \\ & + C_3 \left(N_3 z \cos \frac{z}{R} - M_3 \sin \frac{z}{R} \right) \\ & + C_4 \left(N_3 z \sin \frac{z}{R} + M_3 \cos \frac{z}{R} \right) \\ & + \frac{Ra^4}{R^2 + a^2} \left(C_5 \cosh \frac{z}{a} + C_6 \sinh \frac{z}{a} \right) \\ & - R \left(C_7 \cos \frac{z}{R} + C_8 \sin \frac{z}{R} \right) + C_9 z + C_{10}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v'(z) = & L_3 k (C_1 \cosh kz + C_2 \sinh kz) \\ & + C_3 \left[\left(N_3 - \frac{M_3}{R} \right) \cos \frac{z}{R} - \frac{N_3}{R} z \sin \frac{z}{R} \right] \\ & + C_4 \left[\left(N_3 - \frac{M_3}{R} \right) \sin \frac{z}{R} + \frac{N_3}{R} z \cos \frac{z}{R} \right] \\ & + \frac{Ra^3}{R^2 + a^2} \left(C_5 \sinh \frac{z}{a} + C_6 \cosh \frac{z}{a} \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(C_7 \sin \frac{z}{R} - C_8 \cos \frac{z}{R} \right) + C_9, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi(z) = & T_3 A_3 (C_1 \sinh kz + C_2 \cosh kz) \\ & - \frac{N_3}{R} \left(C_3 z \cos \frac{z}{R} + C_4 z \sin \frac{z}{R} \right) \\ & + \frac{R^2 a^2}{R^2 + a^2} \left(C_5 \cosh \frac{z}{a} + C_6 \sinh \frac{z}{a} \right) \\ & + \left(C_7 \cos \frac{z}{R} + C_8 \sin \frac{z}{R} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi'(z) = & T_3 A_3 k (C_1 \cosh kz + C_2 \sinh kz) \\ & - \frac{N_3}{R} \left[C_3 \left(\cos \frac{z}{R} - \frac{z}{R} \sin \frac{z}{R} \right) \right. \\ & \left. + C_4 \left(\sin \frac{z}{R} + \frac{z}{R} \cos \frac{z}{R} \right) \right] \\ & + \frac{R^2 a}{R^2 + a^2} \left(C_5 \sinh \frac{z}{a} + C_6 \cosh \frac{z}{a} \right) \\ & - \frac{1}{R} \left(C_7 \sin \frac{z}{R} - C_8 \cos \frac{z}{R} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} W(z) = & T_3 (C_1 \cosh kz + C_2 \sinh kz) \\ & + C_3 \cos \frac{z}{R} + C_4 \sin \frac{z}{R}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma(z) = & e^{\lambda z} (C_{11} \cos \lambda z + C_{12} \sin \lambda z) \\ & + e^{-\lambda z} (C_{13} \cos \lambda z + C_{14} \sin \lambda z), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma'(z) = & \lambda e^{\lambda z} [C_{11} (\cos \lambda z - \sin \lambda z) \\ & + C_{12} (\sin \lambda z + \cos \lambda z)] \\ & - \lambda e^{-\lambda z} [C_{13} (\cos \lambda z + \sin \lambda z) \\ & + C_{14} (\sin \lambda z - \cos \lambda z)], \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $L_3, N_3, M_3, k, a, T_3, A_3, \lambda$ 是与结构截面尺寸有关的常数; C_i ($i = 1, 2, \dots, 14$) 是积分常数。

所建立的位移模式中, 由 v, ϕ, W, γ 四个位移量, 反映了 7 个自由度. 故考虑剪力滞效应和畸变效应的梁段单元左右端的位移参数, 可表示为位移列向量

$$\{\delta\}^T = [v_i \quad v'_i \quad \phi_i \quad \phi'_i \quad W_i \quad \gamma_i \quad \gamma'_i \quad v_j \quad v'_j \quad \phi_j \quad \phi'_j \quad W_j \quad \gamma_j \quad \gamma'_j]^T, \quad (21)$$

式中, v_i 和 v_j 分别为 i 和 j 端的竖向杆端位移; v'_i 和 v'_j 分别为 i 和 j 端的杆端转角; ϕ_i 和 ϕ_j 分别为 i 和 j 端的杆端扭转角; ϕ'_i 和 ϕ'_j 分别为 i 和 j 端的杆端扭率; W_i 和 W_j 分别为 i 和 j 端的翼板的最大纵向位移差; γ_i 和 γ_j 分别为 i 和 j 端的杆端畸变角; γ'_i 和 γ'_j 分别为 i 和 j 端的杆端畸变曲率。

4. 单元刚度矩阵

根据力与变形的关系, 按位移法原理, 可建立梁段单元的刚度方程, 即

$$[k][\delta] = \{P\}, \tag{22}$$

式中 $[k]$ 为单元刚度矩阵,而且是对称矩阵,即

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & 0 & 0 & k_{18} & k_{19} & k_{110} & k_{111} & k_{112} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & 0 & 0 & k_{28} & k_{29} & k_{210} & k_{211} & k_{212} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 & 0 & k_{38} & k_{39} & k_{310} & k_{311} & k_{312} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & 0 & 0 & k_{48} & k_{49} & k_{410} & k_{411} & k_{412} & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & 0 & 0 & k_{58} & k_{59} & k_{510} & k_{511} & k_{512} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{66} & k_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{613} & k_{614} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{76} & k_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{713} & k_{714} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & 0 & 0 & k_{88} & k_{89} & k_{810} & k_{811} & k_{812} & 0 & 0 \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & 0 & 0 & k_{98} & k_{99} & k_{910} & k_{911} & k_{912} & 0 & 0 \\ k_{101} & k_{102} & k_{103} & k_{104} & k_{105} & 0 & 0 & k_{108} & k_{109} & k_{1010} & k_{1011} & k_{1012} & 0 & 0 \\ k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} & k_{115} & 0 & 0 & k_{118} & k_{119} & k_{1110} & k_{1111} & k_{1112} & 0 & 0 \\ k_{121} & k_{122} & k_{123} & k_{124} & k_{125} & 0 & 0 & k_{128} & k_{129} & k_{1210} & k_{1211} & k_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{136} & k_{137} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1313} & k_{1314} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{146} & k_{147} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1413} & k_{1414} \end{bmatrix} \tag{23}$$

由边界条件(7)–(13)式可知,与位移分量 v (挠度)、 v' (转角)、 ϕ (扭转角)、 ϕ' (扭率)、 w (翼板纵向位移差函数)、 γ (畸变角)、 γ' (畸变翘曲位移)对应的内力为

$$Q_y = - \left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v''' + \frac{GK_T}{R^2} v' - \frac{EI_\omega}{R} \phi''' + \frac{EI_m + GK_T}{R} \phi' - \frac{3}{4} EI_s W'' , \tag{24}$$

$$M_x = - \left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v'' - \frac{EI_\omega}{R} \phi'' + \frac{EI_m}{R} \phi - \frac{3}{4} EI_s W' , \tag{25}$$

$$T_z = - \frac{EI_\omega}{R} v''' + \frac{GK_T}{R} v' - EI_\omega \phi''' + GK_T \phi' \tag{26}$$

$$B = EI_\omega \left(\phi'' + \frac{v''}{R} \right) , \tag{27}$$

$$S = EI_s \left(\frac{3}{4} v'' + \frac{9}{14} W' - \frac{3}{4R} \phi \right) , \tag{28}$$

$$Q_d = - EI_d \gamma''' , \tag{29}$$

$$B_d = EI_d \gamma'' . \tag{30}$$

从刚度元素的物理含义可得如下各刚度元素的计算公式：

$$k_{1n} = \left[\left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v''' - \frac{GK_T}{R^2} v' + \frac{EI_\omega}{R} \phi''' - \frac{EI_m + GK_T}{R} \phi' + \frac{3}{4} EI_s W'' \right] \Big|_{z=0} , \tag{31}$$

$$k_{2n} = \left[- \left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v'' - \frac{EI_\omega}{R} \phi'' + \frac{EI_m}{R} \phi - \frac{3}{4} EI_s W' \right] \Big|_{z=0} , \tag{32}$$

$$k_{3n} = \left[\frac{EI_\omega}{R} v''' - \frac{GK_T}{R} v' + EI_\omega \phi''' - GK_T \phi' \right] \Big|_{z=0} , \tag{33}$$

$$k_{4n} = \left[- EI_\omega \left(\phi'' + \frac{v''}{R} \right) \right] \Big|_{z=0} , \tag{34}$$

$$k_{5n} = \left[- EI_s \left(\frac{3}{4} v'' + \frac{9}{14} W' - \frac{3}{4R} \phi \right) \right] \Big|_{z=0} , \tag{35}$$

$$k_{6n} = [EI_d \gamma'''] \Big|_{z=0} , \tag{36}$$

$$k_{7n} = [- EI_d \gamma''] \Big|_{z=0} , \tag{37}$$

$$k_{8n} = \left[- \left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v''' + \frac{GK_T}{R^2} v' - \frac{EI_\omega}{R} \phi''' + \frac{EI_m + GK_T}{R} \phi' - \frac{3}{4} EI_s W'' \right] \Big|_{z=s} , \tag{38}$$

$$k_{9n} = \left[\left(EI_m + \frac{EI_\omega}{R^2} \right) v'' + \frac{EI_\omega}{R} \phi'' - \frac{EI_m}{R} \phi + \frac{3}{4} EI_s W' \right] \Big|_{z=s} , \tag{39}$$

$$k_{10n} = \left[- \frac{EI_\omega}{R} v''' + \frac{GK_T}{R} v' - EI_\omega \phi''' + GK_T \phi' \right] \Big|_{z=s} , \tag{40}$$

$$k_{11n} = \left[EI_\omega \left(\phi'' + \frac{v''}{R} \right) \right] \Big|_{z=s} , \tag{41}$$

$$k_{12n} = \left[EI_s \left(\frac{3}{4} v'' + \frac{9}{14} W' - \frac{3}{4R} \phi \right) \right] \Big|_{z=s}, \quad (42)$$

$$k_{13n} = [-EI_d \gamma'''] \Big|_{z=s}, \quad (43)$$

$$k_{14n} = [EI_d \gamma''] \Big|_{z=s}. \quad (44)$$

为了求出单元刚度矩阵中的各个元素,根据梁段位移模式,由结点端条件(i 端 $z=0$, j 端 $z=s$)可以得到关于积分常数的14元1次线性方程组,依次令单元结点位移 $v_i, v'_i, \phi_i, \phi'_i, W_i, \gamma_i, \gamma'_i, v_j, v'_j, \phi_j, \phi'_j, W_j, \gamma_j, \gamma'_j$ 中的一个位移分量为单位位移,其他位移为零,可以从上述14元1次线性方程组中解出相应位移分量发生单位位移时的积分常数 $C_1 \sim C_{14}$.将积分常数代入梁段位移模式公式中,便得到结点发生单位位移时的单元变形函数.再代入各刚度元素的计算公式中,便求出 k_{in} ($i, n=1, 2, \dots, 14$).

5. 单元荷载列阵

在(22)式的刚度方程中, $\{P\}$ 为梁段单元结点荷载列向量,可表为

$$\{P\} = [Q_i \quad M_i \quad T_i \quad B_i \quad S_i \quad Q_{di} \quad B_{di} \quad Q_j \quad M_j \quad T_j \quad B_j \quad S_j \quad Q_{dj} \quad B_{dj}]^T, \quad (45)$$

式中, Q_i 和 Q_j 是对应结点位移 v_i 和 v_j 的剪力; M_i 和 M_j 是对应结点位移 v'_i 和 v'_j 的弯矩; T_i 和 T_j 是对应结点位移 ϕ_i 和 ϕ_j 的扭矩; B_i 和 B_j 是对应结点位移 ϕ'_i 和 ϕ'_j 的扭转翘曲双力矩; S_i 和 S_j 是对应结点位移 W_i 和 W_j 的广义弹性抗力; Q_{di} 和 Q_{dj} 是对应结点位移 γ_i 和 γ_j 的畸变力; B_{di} 和 B_{dj} 是对应结点位移 γ'_i 和 γ'_j 的畸变双力矩.

传统的梁单元由于采用平截面变形的假定,当其截面几何要素沿单元是常量时,杆间荷载引起的杆端反力与截面几何特征无关.但是考虑剪力滞的梁段单元反映剪力滞变化规律的纵向位移差函数,

将随荷载情况不同而改变,从而单元截面的变形没有恒定的模式,因此各种杆间荷载引起杆端反力均与截面的几何要素有关.为了形成单元结点荷载列阵,本文利用求单元刚度矩阵元素时所得到的杆端只发生一单位位移时的单元位移函数,由虚功原理求出薄壁曲线箱梁在4种代表性荷载(集中竖向荷载 P 、集中扭矩 T 、均布荷载 q_y 和均布扭矩 m_x)作用下的结点荷载列阵^[14](由于篇幅所限,具体公式不一列出).

6. 实验验证

6.1. 模型实验

为了验证本文的理论分析,制作了一个两跨等截面连续曲线箱梁有机玻璃模型.桥跨的布置为45 cm+45 cm,曲线箱梁桥的中线曲率半径为 $R_{\text{中线}}=42.97$ cm,曲线箱梁桥的中心角为 $\theta=120^\circ$,每一跨为 $\frac{\theta}{2}=60^\circ$.模型的截面尺寸如图3所示.

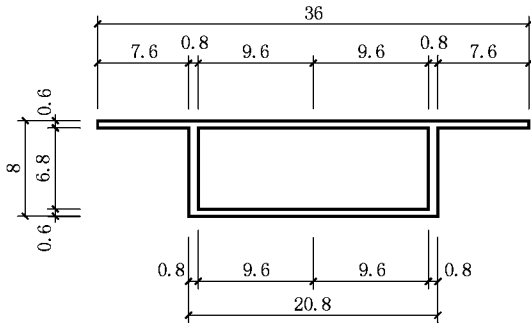


图3 截面尺寸图(单位:cm)

实验时,在典型横截面上布置了应变片.为了提高测试精度,减少加载点对测点应变的影响,在翼板

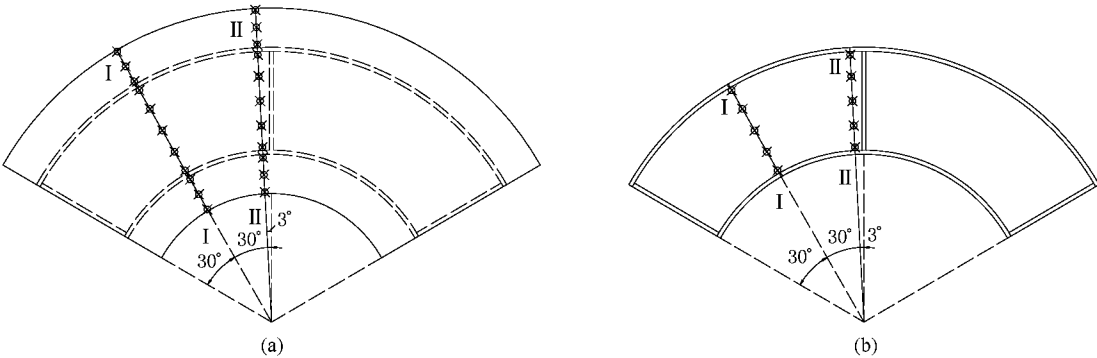


图4 测点布置平面图 (a)顶板测点布置位置图,(b)底板测点布置位置图

的同一位置上下两面均贴双向应变片.为了测试该模型的剪滞效应,分别在图 4 所示的两个截面处布置了测点.截面Ⅰ、截面Ⅱ顶板上下面各贴 11 个测点,底板上下面各贴 5 个测点,共计 64 个测点.各测点在横截面上的布置如图 5 所示.实验时主要测试跨中截面Ⅰ和靠近支座截面Ⅱ的剪滞效应.

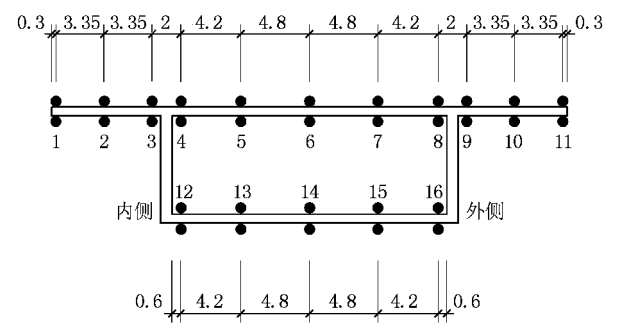


图 5 测点布置横断面图(单位:cm)

实验共分两种工况(A)一跨跨中正对腹板位置的上翼板处对称地施加竖向集中荷载(B)正对腹板位置的上翼板处对称地施加均布竖向线荷载.

竖向集中荷载是采用杠杆,并通过分配梁下垫小钢球传力加载,两小钢球分别对准腹板的上翼板处.为了测试施加荷载的大小在加力点处安装一个拉压传感器;为保证荷载读数准确,实验过程中调整

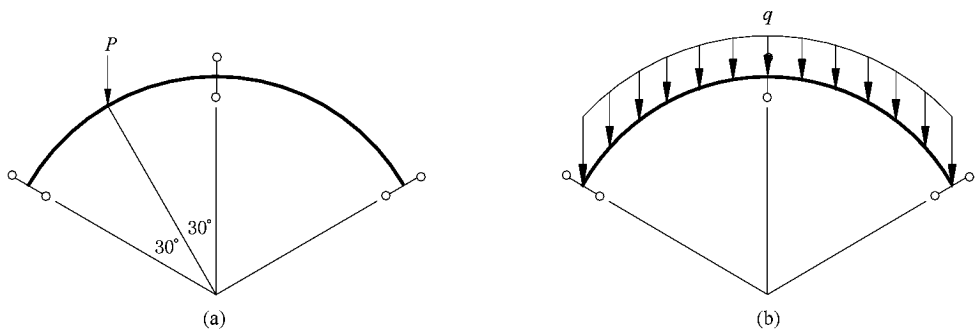


图 6 荷载布置示意图 (a)承受集中荷载 (b)承受均布荷载

- 从表 1 和表 2 可以看出:
- 1) 本文有限段法计算结果与实验值以及有限元计算结果均符合较好,特别是靠近腹板处翼板的最大应力值符合得更好,说明本文方法能满足工程精度要求.
 - 2) 由于本文方法将翼板作了平面应力假定,忽略翼板的横向剪切变形($\epsilon_x = 0$),尽管所获得的最

- 支点高度,保证杠杆的水平.
- 竖向均布荷载是先在两腹板上方放置两条 $\Phi 8$ mm 橡胶垫条,保证荷载均布,然后将特制条形砝码对称地横跨搁置在两个垫条的上面进行加载,特制条形砝码尺寸为 $2\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 32\text{ cm}$,标准质量为 2 kg .
- 实验分 5 级(集中荷载)和 3 级(均布荷载)加载,由于有机玻璃的变形持续时间较长,不易稳定,为保证数据的稳定性,每次加载后 10 min 才开始读数,并记录下来.
- 应变值采用静态电阻应变仪,并用半桥测量和通过电脑采集.挠度值采用百分表测定.实测的材料泊松比 $\mu = 0.32$,弹性模量 $E = 2.6\text{ GPa}$.
- 本文根据实验模型梁的尺寸和荷载工况,还应用 Ansys 有限元软件进行计算分析,采用 Ansys 程序中的 solid45 实体单元模拟曲线箱梁的翼板、腹板以及横隔板,共分 30708 个单元.
- ### 6.2. 结果与比较
- 利用本文有限段法和有限元法,计算了分别在集中荷载($P = 0.287\text{ kN}$)和均布荷载($q = 0.377\text{ kN/m}$)作用下跨中截面Ⅰ、中间支座截面Ⅱ(如图 4)的正应力,其结果与实验值一并列于表 1、表 2 以作比较.表中数据对应的测点号见图 5 所示,荷载布置示意图如图 6 所示.
- 大应力值与实验应力值相接近,但是悬臂板的自由端仍存在较大的误差,尤其是梁的外侧.
- 3) 底板的实测应力值与理论计算值比上翼板的结果符合得更好.
 - 4) 对于大曲率箱梁,考虑初曲率影响的结果比不考虑初曲率影响的结果更接近实验值.
 - 5) 无论是在对称集中荷载还是在对称均布荷载

表 1 二跨连续曲线箱梁受一跨跨中集中荷载作用下的应力结果(单位 : 10^{-1} MPa)

位置	测点	截面 I				截面 II			
		不考虑初曲率方法	本文方法	实验值	有限元法	不考虑初曲率方法	本文方法	实验值	有限元法
上翼板	1	- 1.331	- 2.355	- 2.019	- 2.790	0.387	0.760	0.836	0.684
	2	- 1.620	- 2.421	- 2.178	- 2.683	0.488	0.780	0.858	0.702
	3	- 2.929	- 3.438	- 3.611	- 3.731	1.009	1.197	1.216	1.201
	4	- 2.984	- 3.412	- 3.221	- 3.653	1.030	1.190	1.239	1.091
	5	- 1.504	- 1.753	- 1.928	- 1.824	0.445	0.536	0.589	0.512
	6	- 1.038	- 1.001	- 1.101	- 0.900	0.281	0.267	0.273	0.253
	7	- 1.026	- 0.673	- 0.740	- 0.605	0.304	0.177	0.159	0.194
	8	- 2.088	- 1.387	- 1.505	- 1.248	0.768	0.518	0.469	0.559
	9	- 1.988	- 1.216	- 1.317	- 1.094	0.725	0.450	0.415	0.473
	10	- 0.858	0.043	- 0.448	- 0.435	0.239	- 0.087	0.118	0.102
	11	- 0.745	0.200	- 0.231	- 0.175	0.174	- 0.131	0.014	0.035
底板	12	4.728	5.374	5.901	5.136	- 1.637	- 1.878	- 1.780	- 1.965
	13	2.390	2.765	2.648	3.041	- 0.715	- 0.853	- 0.812	- 0.938
	14	1.566	1.510	1.411	1.359	- 0.424	- 0.404	- 0.361	- 0.387
	15	1.429	0.895	0.981	0.805	- 0.415	- 0.223	- 0.245	- 0.200
	16	2.926	1.867	2.033	1.710	- 1.076	- 0.699	- 0.768	- 0.629

表 2 二跨连续曲线箱梁受均布荷载作用下的应力结果(单位 : 10^{-1} MPa)

位置	测点	截面 I				截面 II			
		不考虑初曲率方法	本文方法	实验值	有限元法	不考虑初曲率方法	本文方法	实验值	有限元法
上翼板	1	- 0.773	- 1.158	- 1.045	- 0.940	0.535	1.340	0.992	1.103
	2	- 0.860	- 1.161	- 1.101	- 1.044	0.824	1.454	2.034	1.745
	3	- 1.250	- 1.455	- 1.520	- 1.368	1.986	2.393	2.224	2.472
	4	- 1.252	- 1.427	- 1.491	- 1.342	2.075	2.419	2.277	2.229
	5	- 0.755	- 0.843	- 0.880	- 0.792	0.932	1.129	0.993	1.067
	6	- 0.551	- 0.525	- 0.567	- 0.552	0.676	0.647	0.616	0.602
	7	- 0.481	- 0.336	- 0.287	- 0.316	0.810	0.534	0.527	0.586
	8	- 0.736	- 0.476	- 0.436	- 0.490	1.846	1.303	1.406	1.421
	9	- 0.693	- 0.403	- 0.385	- 0.394	1.802	1.204	1.355	1.470
	10	- 0.360	- 0.004	- 0.114	- 0.118	0.874	0.167	0.410	0.474
	11	- 0.328	0.108	- 0.012	- 0.024	0.818	0.157	0.310	0.263
底板	12	2.056	2.321	2.425	2.182	- 3.041	- 3.561	- 3.383	- 3.537
	13	1.229	1.362	1.434	1.293	- 1.359	- 1.656	- 1.688	- 1.876
	14	0.831	0.792	0.823	0.756	- 1.021	- 0.977	- 0.863	- 0.959
	15	0.635	0.417	0.435	0.429	- 1.270	- 0.853	- 0.677	- 0.752
	16	0.944	0.550	0.541	0.565	- 2.874	- 2.055	- 1.946	- 1.854

作用下 ,曲线箱梁内侧的正应力比外侧的大。

6)模型实验表明 ,两跨连续曲线箱梁存在显著

的剪滞效应、畸变和翘翘效应 ,尤其对大曲率连续曲线箱梁设计时应注重考虑初曲率影响与剪滞、畸变

和翘翘效应。

7. 结 论

- 1)将直线箱梁中分析剪力滞效应的有限段法推广到曲线箱梁中并结合考虑初曲率和畸变的影响,其结果比较符合实际情况。
- 2)本文提出了一种以薄壁曲线箱梁剪力滞控制微分方程的齐次解作为梁段单元的位移模式,进而建立了考虑弯曲、扭转和剪力滞耦合(考虑初曲率影响)及畸变效应的半解析有限段模型,将三维空间问题简化为一维空间,实现了在普通梁杆单元中计入剪力滞效应和畸变效应的功能。比以往剪力滞理论有了发展,因此更具有一般性。

- 3)经模型实验和通用有限元方法验证,本文提出的有限段法是符合实际情况的。所建立的方法适用于等高度和变高度的直、曲线箱梁剪力滞分析和计算。与一般有限元法相比,大大节省时间和降低费用。
 - 4)本文将理性有限元和解析有限元的思想用于薄壁曲线箱梁的剪力滞分析,该方法不仅单元划分少、计算简便,而且计算精度高。实例显示了该方法良好的潜力,为薄壁箱梁等复杂结构的剪力滞研究开拓了一条有效的途径,在结构分析及设计中具有广阔的发展前景。
- 本文的实验工作得到了饶德军高级实验师和熊稚军、杜嘉斌研究生的帮助,谨此致谢。

[1] Luo Q Z 1991 *J. Hunan University* **18** 33 (in Chinese) [罗旗帜 1991 湖南大学学报 **18** 33]

[2] Luo Q Z , Tang T , Li Q S 2002 *J. Struct. Eng. ASCE* **128** 1617

[3] Luo Q Z , Li Q S , Liu D K , Yang L F 2001 *Struct. Build. Proc. Inst. Civ. Engrs.* **146** 41

[4] Luo Q Z , Wu Y M , Li Q S 2004 *Eng. Struct.* **26** 2113

[5] Peng D W , Wang Z 1998 *China J. Highway and Transport* **11** 41 (in Chinese) [彭大文、王 忠 1998 中国公路学报 **11** 41]

[6] Xiao M , Li X P 2004 *J. China & Foreign Highway* **24** 61 (in Chinese) [肖 敏、李新平 2004 中外公路 **24** 61]

[7] Pan J J , Ouyang Y G , Liu S Z 2002 *J. Lanzhou Railway Institute (Natural Sciences)* **21** 42 (in Chinese) [潘建杰、欧阳永金、刘世忠 2002 兰州铁道学院学报 (自然科学版) **21** 42]

[8] Wei C L , Zeng Q Y 2000 *J. Civil Engineering* **33** 81 (in Chinese) [韦成龙、曾庆元 2000 土木工程学报 **33** 81]

[9] Liu C Q , Jin Z J , Li M S , Huhe J F , Wu W T 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1137 (in Chinese) [刘长清、金柱京、李美栓、呼和吉夫、吴维 1992 物理学报 **41** 1137]

[10] Cheng Y M , Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民、李九红 2005 物理学报 **54** 4463]

[11] Qin Y X , Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校、程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]

[12] Yao X H , Han Q , Xin H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 639 (in Chinese) [姚小虎、韩 强、辛 浩 2008 物理学报 **57** 639]

[13] Wu Y M , Luo Q Z , Yue Z F 2003 *China Railway Science* **24** 64 (in Chinese) [吴幼明、罗旗帜、岳珠峰 2003 中国铁道科学 **24** 64]

[14] Wu Y M 2008 (Ph. D. Thesis) (Xi ' an : Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [吴幼明 2008 (博士学位论文) (西安 : 西北工业大学)]

[15] Guo J G , Fang Z Z , Lou X D 1983 *J. Civil Engineering* **16** 1 (in Chinese) [郭金琼、房贞政、罗孝登 1983 土木工程学报 **16** 1]

[16] Cheng X Y , Luo Q Z 1991 *J. Civil Engineering* **24** 52 (in Chinese) [程翔云、罗旗帜 1991 土木工程学报 **24** 52]

Finite segment method for calculating the shear lag in thin-walled curved box girders^{*}

Wu You-Ming^{1)†} Yue Zhu-Feng²⁾ Lü Zhen-Zhou²⁾

¹⁾ *Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China*

²⁾ *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

(Received 14 April 2008; revised manuscript received 10 June 2008)

Abstract

The homogeneous solutions to the governing difference equations derived from energy variational method were used as the displacement patterns of finite segment. A finite segment model considering the initial curvature, bending, torsion, shear lag and distortion was established. The stiffness matrix and load column matrix were obtained based on the directed stiffness method and the working energy principle. A finite segment method was presented to calculate the shear lag effects with multi-span continuous curved box girder generally used in engineering. A perspex glass model of a two-span continuous curved box girder was made. The test on the perspex model were performed to study the shear lag effects respectively under concentrated load and uniformly distributed load. The calculation results of finite segment method were in agreement with the experimental results and results of finite element method, which verifies the accuracy of the finite segment method.

Keywords: thin walled box girder, shear lag, finite segment method, model experiment

PACC: 4630

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472094, 10572117).

[†] E-mail: wuyouming@fosu.edu.cn