

# 利用 Bayesian-MCMC 方法从雷达回波反演海洋波导\*

盛 嶂 黄思训† 曾国栋

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

(2008 年 7 月 22 日收到, 2008 年 8 月 4 日收到修改稿)

应用贝叶斯-蒙特卡罗(Bayesian-MCMC)方法将海洋波导参数的先验信息描述为先验概率密度,结合雷达回波资料(电磁波传播损耗),得到待反演海洋波导参数的后验概率密度,用马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)-Gibbs 采样器采样后验概率密度分布,并用样本最大似然估计值作为对海洋波导参数分布的估计.数值实验结果表明,该方法对先验信息进行了有效利用,反演精度高于遗传算法的反演精度.该方法较为充分利用先验信息,得到解的概率分布,即解的不确定性分析,这在实际应用中有一定的参考价值.

关键词:波导,电磁波传播损耗,贝叶斯-蒙特卡罗,概率分布

PACC:9260V,7430G

## 1. 引 言

大气波导是一种反常的大气现象,可影响无线电系统的工作性能.通常的无线电系统,如微波雷达的性能设计和评估是基于标准大气模式的,但无线电系统工作的大气环境却是随时随地变化的,往往偏离所谓的标准大气,处在反常大气环境条件下,可能导致工作性能与设计标准不符.从遥感原理来看,微波遥感也许是实现实时监测大气波导的唯一手段.此外微波遥感具有安全、成本低、大面积观测等特点.与其他反问题一样,电磁场中的反问题大多是非适定性的,解的存在性、唯一性或稳定性不能得到满足.这一特点导致了求解电磁场反问题的困难.所以选择高效、稳定的方法是求解的关键.近年来,国内外对海洋环境中的大气波导研究十分关注,对大气波导的机理、监测等正问题方面展开了较多工作<sup>[1,2]</sup>,但对雷达回波功率损耗反演折射率廓线的反问题研究较少.Gerstoft 等<sup>[3]</sup>利用遗传算法对模拟和实测数据进行了反演实验,估计了波导发生时的大气折射率结构;Vasudevan 等<sup>[4]</sup>利用重要序列性采样算法从雷达杂波中估计表面波导结构;盛嶂和黄思训<sup>[5]</sup>利用遗传算法对模拟数据进行了反演试验,并对算法的抗噪能力进行了研究.但是,遗传算法、重

要序列性采样算法存在局部区域过度采样的缺点,这在以往的研究中表现明显;同时,这些算法也存在局部收敛的问题.

与遗传算法等全局最优化反演算法不同,贝叶斯方法将先验信息表述为先验概率密度,遥感观测信息以似然函数表述.二者结合起来,得到所谓的“后验概率密度”.该后验概率密度表示了问题的“完全”解,即同时给出相应解的出现概率.通过后验概率密度某些统计特性的计算来获取解的点估计,如均值和最大似然值.实现该目标的可行的计算方法之一是马尔可夫链蒙特卡罗法(MCMC).该方法通过定义在高维空间,且没有明确数学表达式的概率密度的采样,用样本均值或最大似然估计作为对总体期望的估计.

## 2. Bayesian-MCMC 方法的数学描述

实际海洋中可能出现的三种大气波导的情形,可采用美国加利福尼亚海军物理实验室提出的 5 参数的经验模型<sup>[6]</sup>,它们用矢量

$$\mathbf{m} = (\delta, c_1, z_b, z_{\text{thick}}, M_d)^T, \quad (1)$$

表示.其中, $\delta$ 为蒸发波导厚度(evaporation duct height), $z_b$ 为波导层底的高度(base height), $c_1$ 为混合层的斜率(mixed layer slope), $z_{\text{thick}}$ 为表面波导的厚

\* 国家自然科学基金(批准号:40775025)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: huangxsp@yahoo.com.cn

度 (thickness),  $M_d$  为表面波导对应的折射指数 (M-deficit). 电磁波在波导环境中传播的数值方程可用地型抛物方程进行近似 [详见文献 7]. 这种近似利用了全波、前向散射模型, 对任意折射率梯度结构下电磁波的传播进行描述. 可以对非均匀大气环境 (大气折射率在传播路径上随距离和高度变化) 下的电磁波传播进行有效的模拟, 在视距以内、附近以及超视距的距离上都具有良好的模拟效果和稳定性.

基于贝叶斯-马尔可夫链蒙特卡罗 (Bayesian-MCMC) 方法, 反演大气波导特征参数是通过采样构造一条马尔可夫链, 使其稳态分布服从于目标参数的真实分布, 并利用采样的样本, 计算特征参数的估计值和概率分布. 马尔可夫链生成各参数随机采样的样本目标分布. 当马尔可夫链收敛后, 可以从中选取足够多的样本来进行相应的操作, 处理参数估计中的不确定性, 估计参数的均值、方差和边缘后验概率分布等信息. MCMC 采样方法中使用分步傅里叶算法求解地型抛物方程作为反演求解的正模型.

$n$  维空间后验概率分布函数写成  $p(m|d)$ , 其中  $m$  为 (1) 式定义的待反演参数,  $d$  为观测资料. 这里可计算出最大后验估计 (MAP, 即  $p(m|d)$  的最大值) 和 Bayesian 最小均方差 (MMSE). 使用 Bayesian 公式得到后验概率密度

$$p(m|d) = \frac{L(m)p(m)}{p(d)}, \quad (2)$$

$$p(d) = \int_m p(d|m)p(m)dm, \quad (3)$$

其中,  $L(m)$  为似然函数,  $p(m)$  是环境参数  $m$  的先验信息, 且假设与测得的结果  $d$  相互独立,  $p(d)$  为  $p(m|d)$  的标准因子, 且与  $m$  相互独立. (2) 式可以被简化为

$$p(m|d) \propto L(m). \quad (4)$$

假设误差服从 Gaussian 分布, 则似然函数可被表示为

$$L(m) = (2\pi)^{-N_R/2} \cdot |C_d|^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{(d - \mathcal{E}(m))^T C_d^{-1} (d - \mathcal{E}(m))}{2}\right] \quad (5)$$

式中,  $\mathcal{E}(m)$  表示正演所得函数值,  $d$  表示观测得到的回波资料,  $C_d$  表示资料协方差矩阵,  $N_R$  表示水平距离采样点的数目, 即向量  $d$  的维数. 假设向量  $d$  的各元素之间空间不相关, 则可得到  $C_d = \nu I$ , 其中  $\nu$  为误差方差,  $I$  为单位矩阵. 定义误差函数  $\mathcal{E}(m)$  为<sup>[8]</sup>

$$\mathcal{E}(m) = |d - \mathcal{E}(m)|^2 = \sum_{i=1}^{N_R} |d_i - \mathcal{E}(m_i)|^2 \quad (6)$$

则似然函数可以被简化为

$$L(m) = (2\pi\nu)^{-N_R/2} \cdot \exp\left[-\frac{\mathcal{E}(m)}{2\nu}\right]. \quad (7)$$

因此 (2) 式可以表示为

$$p(m|d) \propto \exp\left[-\frac{\mathcal{E}(m)}{2\nu}\right]. \quad (8)$$

MCMC 方法的最大优点在于, 将有效的采样方法与蒙特卡罗积分结合起来, 它实际上是对  $n$  维空间后验概率密度进行采样. 显然, 一旦马尔可夫链收敛, MCMC 方法得到的  $N_R$  个样本值可直接用来计算多维积分.

### 3. Bayesian-MCMC 方法的实现

用五参数三段式经验模型来描述  $m$  廓线,  $m$  用 (1) 式表示. 每一个参数  $m_i$  均是未知的随机变量. 在充分采样的条件下, 利用 MCMC 可以确保结果收敛于真实的分布. 如果采用经典的 Gibbs 采样, 在运算速度上比较慢, 在不影响最后结果的情况下, 有必要对其运算速度做一些提高. 另外, MCMC 方法有两个缺陷制约了它的运算速度. 第一, 如果初始点与高概率分布区之间的间距较大, MCMC 可能需要大量的迭代才能到达高概率分布区; 第二, 参数之间存在相关性, 如果只在平行于参数轴的方向上进行操作, 使得与高度相关的后验概率密度的采样变得很难.

#### 3.1. 初始点的选择和参数坐标旋转的实现

在开始采样之前, 必须做好正确的初始化. 对经典的 MCMC 方法进行修正, 使之包含一个初始化阶段 (称为 'burn-in' 阶段). 在大多数的情况下, burn-in 阶段自身是进行整体最佳化采样, 也就是在使用快速模拟退火 (SA) 算法时, 必须降低温度直到  $T = 1$ , 使得用于 SA 的玻尔兹曼 (Boltzmann) 分布函数  $P_{SA}(m)$  真正成为那个温度下的似然函数

$$P_{SA}(m) = \exp\left[-\frac{\mathcal{E}(m)}{2\nu T}\right] \Rightarrow L(m). \quad (9)$$

Gibbs 采样过程如果只允许在水平和垂直方向上运动, 将需要对歪曲的高概率分布区域进行大量的采样. 然而, 对于不相关的情况, 只需要做很少数量的采样. 解决的方法是: 在  $n$  维参数空间中, 对坐标进行旋转. 在具有相关性的参数空间中不应用 Gibbs 采样, 而是通过直角坐标变换 (使模型协方差矩阵  $C_m$  对角化) 定义一组新的不相关的参数. 通过对  $C_m$  特征值和特征向量的分解得到旋转矩阵  $R$ ,

$$C_m = RAR^T, \tilde{m} = R^T m, \quad (10)$$

其中  $A$  是包含协方差矩阵  $C_m$  特征值的对角矩阵,  $R$  是旋转矩阵, 它的列向量包含  $C_m$  的特征向量.  $\tilde{m}$  是被旋转模型参数向量. 在 burn-in 阶段之后, 用

后验概率密度进行采样所得的样本, 得到模型协方差矩阵  $C_m$ . 由于它的收敛速度快, 大概 1000 个 MCMC 采样样本就可以得到  $C_m$ . 初始点的选择和参数坐标旋转的实现参见图 1.

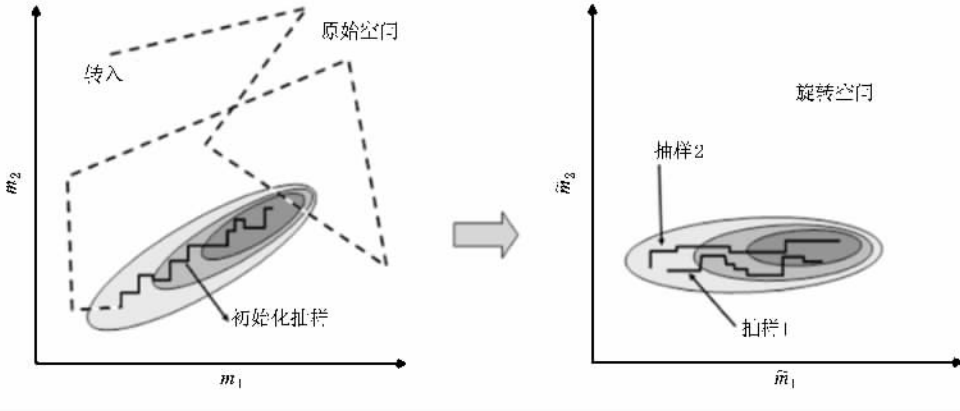


图 1 初始点的选择和参数坐标旋转的实现

### 3.2. MCMC 采样实现与收敛准则

遗传算法(GA)、快速退火算法(SA)等全局优化算法都不满足整体平衡原理, 而且, 它们通常会对高密度分布区域进行过度采样(这主要是因为它们主要用来针对点估计), 以此快速获得点估计最佳的解. 它们不对状态矢量空间进行随机采样. 相反, MCMC 利用 Gibbs 采样进行随机采样, 由样本生成的柱状分布图会收敛于真实的分布.

在实际采样阶段由两个相互独立的、平行运行的 Gibbs 采样组成, 且在被旋转的空间中对相同的后验概率密度分布 (posterior probability density, PPD) 进行采样. 这种算法使用的收敛标准是基于边缘后验分布的 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 统计函数  $D$ . 运用 (4) 式和 MCMC 积分计算  $p(m_j | d)$ , 每一个参数的 K-S 统计函数由下式计算

$$D_j = \max_j |p_2(m_j | d) - p_1(m_j | d)|, \quad (13)$$

其中  $p_1(m_j | d)$  和  $p_2(m_j | d)$  表示两个相互平行运行采样样本的累积边缘分布函数. 当  $D_j$  的最大值小于  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.05$ ) 时, 就认为采样结果收敛. 当收敛标准得到满足, 将两个相互独立的采样样本结合起来, 得到一个两倍大的采样样本, 则缩小了实际分布于估计值之间的误差. 图 2 表示整个 Bayesian-MCMC 方法的实现过程.

Gibbs 采样原理如下:

假设第  $i$  次的采样样本为  $m^i = [m_1^i, m_2^i, m_3^i, \dots, m_n^i]$ , 在  $i$  维样本空间中, 第  $i+1$  次的采样样本由如下过程得到:

第一步: 固定除第一个参数以外的其他参数, 在  $m_1^i$  附近选取一个任意值构成

$$[m_1^{i+1}, m_2^i, m_3^i, \dots, m_n^i].$$

第二步: 固定除第  $n$  个参数以外的其余参数, 在  $m_n^i$  附近选取一个任意值构成. 直到此时, 所有的参数都更新一次, 得到

$$m^{i+1} = [m_1^{i+1}, m_2^{i+1}, m_3^{i+1}, \dots, m_n^{i+1}].$$

更新第  $j$  个参数的标准如下:

$$a = \frac{P(m_j^{proposed})}{P(m_j^i)}, \quad (11)$$

$$m_j^{i+1} = \begin{cases} m_j^{proposed} & (\text{接收}) \quad (a > \text{rand}[0, 1]), \\ m_j^i & (\text{拒绝}) \quad \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$(12)$$

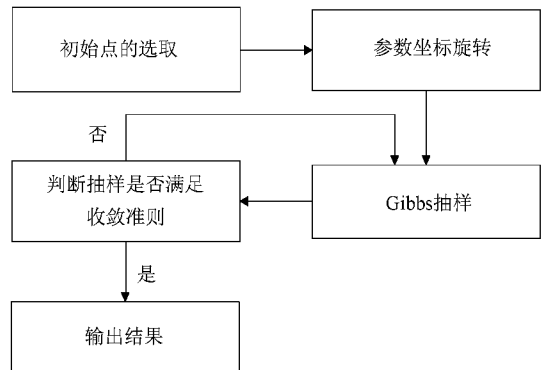


图 2 Bayesian-MCMC 方法的实现过程

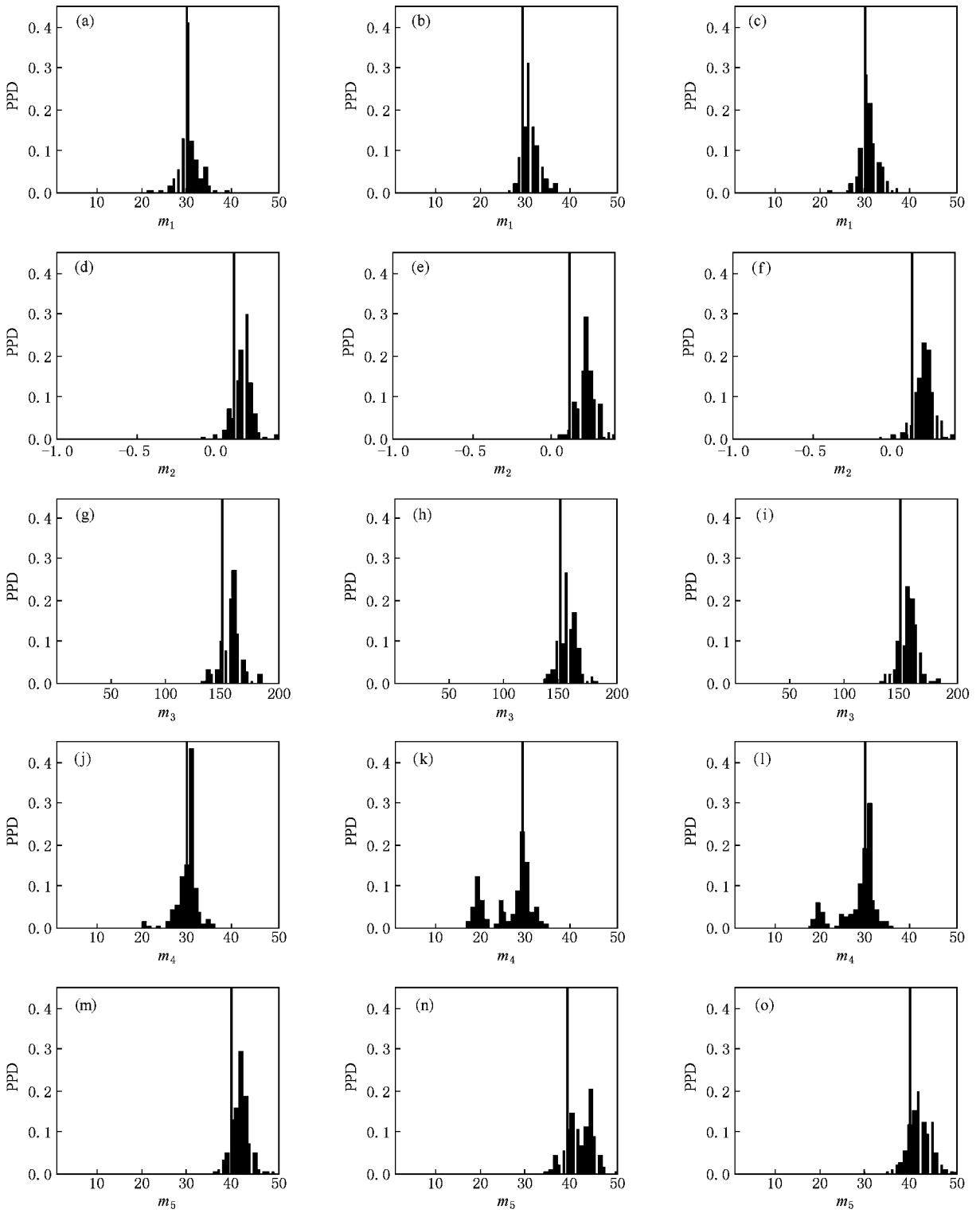


图3 特征参数最终采样结果 (a)(b)(c)为反演参数蒸发波导高度的 PPD 分布图 (d)(e)(f)为反演参数混合层斜率的 PPD 分布图 ; (g)(h)(i)为反演参数混合层底高度的 PPD 分布图 ;(j)(k)(l)为反演参数陷获层厚度的 PPD 分布图 (m)(n)(o)为反演参数负修正折射指数的 PPD 分布图. 左列 (a)(d)(g),(j)(m)对应马尔可夫链 I 的抽样结果 ;中列 (b)(e)(h),(k)(n)对应马尔可夫链 II 的抽样结果 ;右列 (c)(f)(i),(l)(o)对应马尔可夫链 I + II 的抽样结果

### 4. 数值实验与结果分析

为了验证 Bayesian-MCMC 方法反演海洋波导参数的可行性及其精度,设计了以下反演的数值实验.实验过程分为以下四步 ( I )选择雷达参数<sup>[9]</sup>:雷达频率 8000 MHz ;天线类型辛克类型 ;天线增益 30 dB 极化 ;水平极化、垂直波束角 1.5°, 16° ;抬升角 0° ;雷达天线高度 15 m. ( II )选择大气波导参数 :选用五参数的三段式模式廓线来模拟垂直大气修正折射指数分布 ,且假设与水平距离无关. ( III )求解正问题 :利用 TPEM 模式计算模拟雷达传播的损耗空间分布 ,将该模拟数据作为观测值. ( IV )利用 MCMC 方法反演大气波导特征参数.

在初始阶段采用快速退火算法选择初始点 ,用

迭代法计算  $T = 1$  的初始值.利用此初始值进行 MCMC 采样 ,本次实验选用 Gibbs 采样方式.在 burn-in 阶段后 ,对各参数进行去相关性处理 ,对参数空间进行旋转.最终采样过程中 ,两条马尔可夫链同时进行 ,分别进行了 41093 次有效采样 ,将两个样本结合起来成为 82186 次采样的数据集 ,样本所形成的柱状图如图 3 所示.从上往下依次是蒸发波导高度、混合层斜率、混合层底高度、陷获层厚度、负修正折射指数的 PPD 分布 ,左列为第一条马尔可夫链的 PPD 分布 ,中列为第二条马尔可夫链的 PPD 分布 ,右列为结合后马尔可夫链的 PPD 分布 ,图中黑色实线代表真值.

从图 3 可以看出 ,采样结果在总体上比较接近各特征参数实际分布.特别是蒸发波导高度、混合层底高度的反演结果最为合理 ;其次为陷获层厚度、负

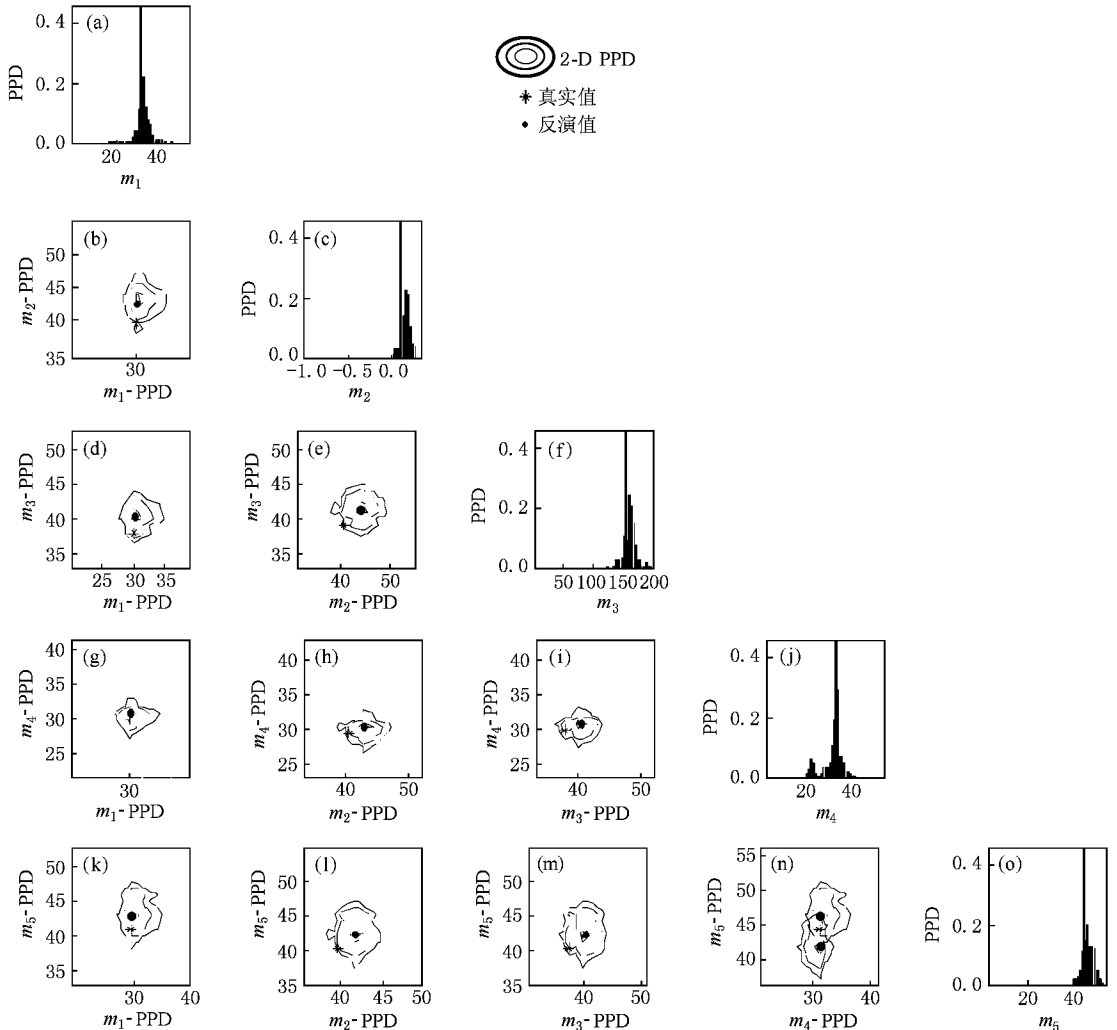


图 4 二维联合概率密度 \* 代表真值 ● 代表采样后的均值 ( a ) ( c ) ( f ) , ( j ) ( o ) 为各反演参数的 PPD 分布图 ,其中的实线表示真实值 ( b ) ( d ) ( e ) , ( g ) ( h ) ( i ) , ( k ) , ( l ) , ( m ) ( n ) 为反演参数的 2-D PPD 图 轮廓线表示相应两反演参数的 2-D PPD 分布情况

修正折射指数,对混合层斜率的反演相对较差,这基本上与前面敏感性分析的结论一致.混合马尔可夫链后,得到两倍大的采样样本更接近实际概率分布,缩小了估计值与真实值之间的误差.

表 1 参数真实值、边界范围、GA 和 MCMC 反演值

	蒸发波导高度/m	混合层斜率	波导层底高度/m	陷获层厚度/m	负的修正折射指数/M
真值	30	0.13	150	30	40
设定边界范围	[0.50]	[-1.0, 0.4]	[3.200]	[0.50]	[0.50]
MCMC(相对误差)	30.6(1.2%)	0.212(5.9%)	155.4(2.7%)	31.3(2.6%)	42.5(5.0%)
GA(相对误差)	30.6(1.2%)	0.269(9.9%)	152.0(1.3%)	42.4(41.3%)	43.1(7.7%)

为了进一步验证 Bayesian-MCMC 方法反演的精度,对另外一组实验样本也进行了数值实验结果分析,结论与表 1 相似,从而论证了此反演算法的可靠性.这里限于篇幅,没有具体列出分析结果.

图 4 表示从采样所获得的五参数一维边缘概率密度分布以及二维联合概率密度分布,斜对角线上的图表示一维边缘概率密度分布,非对角元上的等值线图表示它们的横、纵位置相应的两个参数的二维联合概率密度.由于采样点在一定范围过于集中,在二维联合概率分布图中,为了更好地显示高密度区域的分布情况,等值线图的横、纵坐标的范围有所缩小.另外,图中没有具体标出每层等值线的置信区间,最外层等值线区域内的置信度都大于 90%.

## 5. 结 论

与传统的整体最优化反演算法(GA, SA 等)相

比, Bayesian-MCMC 方法需要进行更多的采样,但是它的反演精度相对高一些.由于所需的采样数较大,每一次采样均需调用 TPEM 计算正模型,造成 Bayesian-MCMC 方法计算量过大的困难,使得它在实时反演应用上受到限制.如果将 Bayesian-MCMC 方法与其他整体最优化反演算法(如 GA, SA 等)结合起来,则可能大幅度地减小计算量,使 Bayesian-MCMC 方法在实时反演的应用成为可能.与整体最优化反演算法相比, Bayesian-MCMC 方法在反演数据的不确定分析上具有优势.该方法充分利用先验信息,同时得到解的概率分布,即解的不确定性分析,这在实际应用中有一定的参考价值.整体最佳化方法往往对重点区域进行过度采样,只对一个具体的“点”进行估计,这样容易在局部收敛.在理论上, Bayesian-MCMC 方法只要采样次数足够多,马尔可夫链就可收敛,它的解可逼近最优值.

- [1] Yan H J, Fu Y, Hong Z J 2006 *Introduction to Modern Atmospheric Refraction* (Shanghai: Science and Educational Press) (in Chinese) [严豪健、符 养、洪振杰 2006 现代大气折射引论(上海:上海科技教育出版社)]
- [2] Hong Z J, Guo P, Yan H J 2006 *Chin. Astron. Astrophys.* **30** 330
- [3] Gerstoft P, Rogers L T, Krolik J L, Hodgkiss W S 2003 *Radio Sci.* **38** 8053
- [4] Vasudevan S, Anderson H R, Kraut S, Gerstoft P 2007 *Radio Sci.* **42** 2014

- [5] Sheng Z, Huang S X 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 4328 (in Chinese) [盛 峥、黄思训 2008 物理学报 **58** 4328]
- [6] Gerstoft P, Hodgkiss S W, Rogers L T, Jablecki M 2004 *Radio Sci.* **39** 6006
- [7] Barrios A E 1994 *IEEE Antennas Propag.* **42** 90
- [8] Huang S X, Sheng Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6720 (in Chinese) [黄思训、盛 峥 2006 物理学报 **55** 6720]
- [9] Sheng Z, Xu R H, Shi H Q 2008 *Modern Radar.* **30** 18 (in Chinese) [盛 峥、徐如海、石汉青 2008 现代雷达 **30** 18]

# Ocean duct inversion from radar clutter using Bayesian-Markov chain Monte Carlo method<sup>\*</sup>

Sheng Zheng Huang Si-Xun<sup>†</sup> Zeng Guo-Dong

( *Institute of Meteorology , PLA University of Science and Technology , Nanjing 211101 , China* )

( Received 22 July 2008 ; revised manuscript received 4 August 2008 )

## Abstract

Using the Bayesian-Markov chain Monte Carlo ( MCMC ) method , based on the measurement information of radar clutter ( electromagnetic propagation loss ) , we obtain the posterior probability density of the duct parameter by describing the prior information of the duct parameter as the prior probability density. And then , Gibbs sampler of the MCMC method is used to sample the posterior probability density. The sample maximal likelihood is regarded as an evaluation of the duct parameter distribution. The results of simulation experiment show that this set of methods make good use of the prior information and the inversion precise is better than the genetic algorithm. In addition , it is capable of describing ( definite or indefinite ) prior information in a convenient and controllable way , as well as capable of giving the complete solutions , which is very important to practical applications.

**Keywords** : duct , electromagnetic propagation loss , Bayesian-Markov chain Monte Carlo method , probability distribution

**PACC** : 9260V , 7430G

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 40775025 )

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : huangexp@yahoo.com.cn