第 58 卷 第 7 期 2009 年 7 月
1000-3290/2009/58(07)/4373-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.7,July,2009

(G'/G)展开法和(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新精确解*

李帮庆[1)2)] 马玉兰[1)†]

1)(北京工商大学，北京 100048)

2)(中国矿业大学(北京)，北京 100081)

(2008 年 10 月 12 日收到；2008 年 11 月 12 日收到修改稿)

通过引入并扩展 (G'/G)展开法，构造出(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的三种形式的新精确通解：双曲函数通解，三角函数通解，有理函数通解．当双曲函数通解中的常数取特定值时，通解变为相应孤立波解．

关键词：(G'/G)展开法，(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统，精确解，孤立波解

PACC：0230，0340，0290

1.引 言

构造非线性发展方程的精确解是非线性科学的重要研究内容．寻找新的求解方法和获取新精确解已成为非线性发展方程领域的研究热点之一．已经有不少行之有效的方法可用于寻找显式精确解，如双曲函数法[1]，齐次平衡法[2]，Jacobi 椭圆函数展开法[3—5]，辅助方程法[6—8]，符号计算代数法[9]，Riccati 函数法[10—13]，扩展的 Riccati 映射法[14—16]．

新近，由 Wang 等创立了(G'/G)展开法[17]，并成功应用于构造多个非线性方程的精确解．已有的应用主要是针对低维非线性发展方程的情形[17—19]．

对于高维非线性发展方程，由于计算过程复杂，在求精确解时显得更为困难．将(G'/G)展开法应用于高维非线性方程的求解是一种新的探索．

本文的主要工作是引入(G'/G)展开法，扩展后用于构造高维非线性发展方程的精确解．考虑如下(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov(ANNV)系统：

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_{xxx} - 3v_x u - 3vu_x = 0,\\
&u_x = v_y .
\end{aligned} \tag{1}
$$

方程组(1)最早由 Boiti 等导出[20]．文献[21]讨论了 ANNV 系统的一组倍周期解列，文献[22]讨论了 ANNV 系统多种形态孤子间的相互作用．文献[23]得到了 ANNV 系统的新精确解，构造出不同形状的峰孤子结构，研究了孤子的分形现象．我们用(G'/G)展开法，获得了方程组(1)的三种形式的新精确通解：双曲函数通解、三角函数通解和有理函数通解．当双曲函数通解中的常数取特定值时，通解变为孤立波解．

2.(G'/G)展开法

根据文献[17]提出的(G'/G)展开法，我们对其扩展，使之适用于高维非线性发展方程的情形．本节给出扩展后的(G'/G)展开法求解高维方程时的主要步骤．

对于含独立变量 $x,y,z,\cdots,t$ 的非线性方程

$$
\begin{aligned}
&F(u,u_t,u_x,u_y,u_z,\cdots,u_{xt},u_{yt},u_{zt},\cdots,\\
&u_{tt},u_{xx},u_{yy},u_{zz},\cdots) = 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $u = u(x,y,z,\cdots,t)$ 是未知函数，F 是 u 及 u 的关于 $x,y,z,\cdots,t$ 各阶偏导数的多项式．使用(G'/G)展开法求解方程(2)的主要步骤如下．

步骤 1 通过行波变换将独立变量 $x,y,z,\cdots,t$ 转化为行波变量 ξ，设定

$$u(x,y,z,\cdots,t) = u(\xi),$$

* 北京市优秀骨干教师项目(批准号：19004811009,PXM2007-014213-044566)资助的课题．

† E-mail：mayl@th.btbu.edu.cn

$$\xi = \tau_1 x + \tau_2 y + \tau_3 z + \cdots - st, \tag{3}$$

(2)式就可转化为只含行波变量 ξ 的常微方程(ODE)

$$H(u, u', u'', \cdots) = 0, \tag{4}$$

其中 $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$, $u'' = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}$, …, H 是含 u 及 u 的关于 ξ 各阶导数的多项式.

步骤 2 假设方程(4)的解可表示成 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的多项式形式

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \tag{5}$$

其中 $G = G(\xi)$ 满足如下二阶线性常微方程(LODE):

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{6}$$

(5)与(6)式中的 $a_0, a_1, \cdots, a_m, \lambda, \mu$ 为待定常数,且 $a_m \neq 0$. 正整数 m 由齐次平衡法确定.

步骤 3 将(5)式代入(4)式,运用常微方程(6)来合并 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的相同幂次项,方程(4)的左端变成一个关于 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的多项式. 令该多项式的 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 各阶幂次的系数为零,导出关于 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, m)$, τ_j, s, λ, μ 的一组代数方程.

步骤 4 求解步骤 3 中建立的含 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, m)$, τ_j, s, λ, μ 的代数方程,而常微方程(6)的通解容易解得. 将(4)式的通解和 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, m)$, τ_j, s 代入到(5)式,即可得到方程(2)的多个精确行波解.

3. (2+1)维 ANNV 系统的新精确解

对方程组(1)引入变换 $\xi = x + ly - st$,则 $u(x, y, t) = u(\xi)$, $v(x, y, t) = v(\xi)$,且 $u_x = u'(\xi)$, $v_y = lv'(\xi)$, $u_t = -su'(\xi)$, $u_{xxx} = u'''(\xi)$, $v_x = v'(\xi)$. 方程组(1)变换为常微分方程组

$$-su'(\xi) + u'''(\xi) - 3(uv)'(\xi) = 0, \tag{7a}$$

$$u'(\xi) = lv'(\xi). \tag{7b}$$

方程(7b)对 ξ 积分可得

$$u = lv + C_0, \tag{8}$$

其中 C_0 为积分常数. 将(8)式代入方程(7a)可得

$$lv''' - (3C_0 + sl)v' - 3l(v^2)' = 0. \tag{9}$$

方程(9)对 ξ 积分一次并取积分常数为零,得到

$$lv'' - (3C_0 + sl)v - 3lv^2 = 0. \tag{10}$$

寻求方程(10)的关于 (G'/G) 多项式形式的解,可表示为

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \tag{11}$$

其中 G 满足方程(6), $a_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ 是待定常数.

由齐次平衡法可知, $n + 2 = 2n$,即 $n = 2$. 所以

$$v(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2, a_2 \neq 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} v^2 = {} & a_0^2 + 2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + (a_1^2 + 2a_0a_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ & + 2a_1a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + a_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v'' = {} & (a_1\lambda + 2a_2\mu)\mu \\ & + (a_1\lambda^2 + 6a_2\lambda\mu + 2a_1\mu)\left(\frac{G'}{G}\right) \\ & + (4a_2\lambda^2 + 8a_2\mu + 3a_1\lambda)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ & + (10a_2\lambda + 2a_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 6a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^4. \end{aligned} \tag{14}$$

将(12),(13),(14)式代入(10)式,合并 $\left(\frac{G'}{G}\right)^i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 的相同幂次系数,并令这些系数为零,得到一个非线性方程组

$$\begin{aligned} & 6la_2 - 3la_2^2 = 0, \\ & l(10a_2\lambda + 2a_1) - 6la_1a_2 = 0, \\ & l(4a_2\lambda^2 + 8a_2\mu + 3a_1\lambda) - 3l(a_1^2 + 2a_0a_2) \\ & - (3C_0 + sl)a_2 = 0, \\ & l(a_1\lambda^2 + 6a_2\lambda\mu + 2a_1\mu) - 6la_0a_1 \\ & - (3C_0 + sl)a_1 = 0, \\ & l\mu(a_1\lambda + 2a_2\mu) - 3la_0^2 - (3C_0 + sl)a_0 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

解方程组(15)得

$$\begin{aligned} & a_0 = \frac{1}{6}[(\lambda^2 + 8\mu) \pm |\lambda^2 - 4\mu|], \\ & a_1 = 2\lambda, \; a_2 = 2, \; l(\lambda^2 + 8\mu - 6a_0 - s) = 3C_0. \end{aligned} \tag{16}$$

下面对 $\lambda^2 - 4\mu$ 的取值分三种情形讨论.

情形 1 $\lambda^2 - 4\mu > 0$.

1) 若 $C_0 = 0$,当 $l = 0$ 时可得平凡解 $u = 0$,当 $l \neq 0$ 时, $s = \lambda^2 + 8\mu - 6a_0 = \mp(\lambda^2 - 4\mu)$, $a_0 = \frac{1}{6}[(\lambda^2 + 8\mu) \pm (\lambda^2 - 4\mu)]$, $a_1 = 2\lambda$, $a_2 = 2$. 将

s，a_0，a_1，a_2 代入(12)式可得

$$v(\xi)=\frac{1}{6}[(\lambda^2+8\mu)\pm(\lambda^2-4\mu)]$$

$$+2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+2\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \tag{17}$$

其中

$$\frac{G'}{G}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2=\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}$$
$$+\frac{\lambda^2-4\mu}{4}\left(\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2, \tag{19}$$

其中 C_1，C_2 是任意常数. 将(18)，(19)式代入(17)式可得到方程组(1)的两组精确通解

$$v_1(x,y,t)=-\frac{\lambda^2-4\mu}{6}+\frac{\lambda^2-4\mu}{2}\left(\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2,$$
$$u_1(x,y,t)=lv_1(x,y,t), \tag{20}$$

其中 $\xi=x+ly+(\lambda^2-4\mu)t$，及

$$v_2(x,y,t)=-\frac{\lambda^2-4\mu}{2}+\frac{\lambda^2-4\mu}{2}\left(\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2,$$
$$u_2(x,y,t)=lv_2(x,y,t), \tag{21}$$

其中 $\xi=x+ly-(\lambda^2-4\mu)t$.

特别地，取 $C_1=0$，$C_2\neq0$，$\lambda>0$，$\mu=0$，通解(20)和(21)式分别变为方程组(1)的孤立波解

$$v_{1a}(x,y,t)=-\frac{\lambda^2}{6}\left(-2+3\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi\right),$$
$$u_{1a}(x,y,t)=-\frac{l\lambda^2}{6}\left(-2+3\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi\right), \tag{22}$$

其中 $\xi=x+ly+\lambda^2t$. 及

$$v_{2a}(x,y,t)=-\frac{\lambda^2}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi,$$
$$u_{2a}(x,y,t)=-\frac{l\lambda^2}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi, \tag{23}$$

其中 $\xi=x+ly-\lambda^2t$.

2）若 $C_0\neq0$，则 $s=s$，$l=\frac{3C_0}{-[s\pm(\lambda^2-4\mu)]}$，$\xi=x-\frac{3C_0}{s\pm(\lambda^2-4\mu)}y-st$，从而方程组(1)有如下形式的双曲函数通解：

$$v_3(x,y,t)=-\frac{\lambda^2-4\mu}{6}+\frac{\lambda^2-4\mu}{2}\left(\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2,$$
$$u_3(x,y,t)=-\frac{3C_0}{s+(\lambda^2-4\mu)}v_3(x,y,t)+C_0, \tag{24}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s + (\lambda^2 - 4\mu)} y - st$，以及

$$v_4(x,y,t) = -\frac{\lambda^2 - 4\mu}{2} + \frac{\lambda^2 - 4\mu}{2}\left(\frac{C_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi + C_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{C_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi + C_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2,$$

$$u_4(x,y,t) = -\frac{3C_0}{s - (\lambda^2 - 4\mu)} v_4(x,y,t) + C_0, \tag{25}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s - (\lambda^2 - 4\mu)} y - st$.

特别地，当 $C_1 = 0$，$C_2 \neq 0$，$\lambda > 0$，$\mu = 0$ 时，通解(24)和(25)变为方程组(1)的两组孤立波解

$$v_{3a}(x,y,t) = \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi,$$

$$u_{3a}(x,y,t) = -\frac{3C_0}{s + \lambda^2} v_{3a}(x,y,t) + C_0, \tag{26}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s + \lambda^2} y - st$，以及

$$v_{4a}(x,y,t) = -\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{sech}^2\frac{\lambda}{2}\xi,$$

$$u_{4a}(x,y,t) = \frac{-3C_0}{s - \lambda^2} v_{4a}(x,y,t) + C_0, \tag{27}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s - \lambda^2} y - st$.

用类似的方法可得以下两种情形时方程组(1)的精确通解.

情形 2 $\lambda^2 - 4\mu < 0$.

1) 若 $C_0 = 0$，当 $l = 0$ 时可得平凡解 $u = 0$. 当 $l \neq 0$ 时，可得方程组(1)的三角函数通解为

$$v_5(x,y,t) = \frac{4\mu - \lambda^2}{2} - \frac{4\mu - \lambda^2}{2}\left(\frac{-C_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}{C_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}\right)^2,$$

$$u_5(x,y,t) = lv_5(x,y,t), \tag{28}$$

其中 $\xi = x + ly - (4\mu - \lambda^2)t$，以及

$$v_6(x,y,t) = \frac{4\mu - \lambda^2}{6} + \frac{4\mu - \lambda^2}{2}\left(\frac{-C_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}{C_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}\right)^2,$$

$$u_6(x,y,t) = lv_6(x,y,t), \tag{29}$$

其中 $\xi = x + ly - (4\mu - \lambda^2)t$.

2)若 $C_0 \neq 0$，$s = s$，$l = \frac{3C_0}{-[s \pm (4\mu - \lambda^2)]}$，可得方程组(1)的另一组三角函数通解为

$$v_7(x,y,t) = \frac{4\mu - \lambda^2}{2} - \frac{4\mu - \lambda^2}{2}\left(\frac{-C_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}{C_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}\right)^2,$$

$$u_7(x,y,t) = -\frac{3C_0}{s - \lambda^2 - 4\mu} v_7(x,y,t) + C_0, \tag{30}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s - \lambda^2 + 4\mu} y - st$，以及

$$v_8(x,y,t) = \frac{4\mu - \lambda^2}{6} - \frac{4\mu - \lambda^2}{2}\left(\frac{-C_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}{C_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + C_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}\right)^2,$$

$$u_8(x,y,t) = -\frac{3C_0}{s-\lambda^2+4\mu}v_8(x,y,t)+C_0, \tag{31}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s+\lambda^2-4\mu}y - st$.

情形 3 $\lambda^2 - 4\mu = 0$.

1）若 $C_0 = 0$，取 $l \neq 0$，则 $s = 0$，得到方程组(1)的有理函数通解

$$v_9(x,y,t) = 2\left(\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}\right)^2,$$

$$u_9(x,y,t) = lv_9(x,y,t), \tag{32}$$

其中 $\xi = x - ly$.

2）若 $C_0 \neq 0$，取 $s \neq 0$，$l = -\frac{3C_0}{s}$，得到方程组(1)的另一组有理函数通解

$$v_{10}(x,y,t) = 2\left(\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}\right)^2,$$

$$u_{10}(x,y,t) = -\frac{3C_0}{s}v_{10}(x,y,t), \tag{33}$$

其中 $\xi = x - \frac{3C_0}{s}y - st$.

4. 结 论

本文通过引入(G'/G)展开法，经扩展后应用于$(2+1)$维 ANNV 系统，获得了该系统十组新的精确通解，这些通解分为三类，即双曲函数通解、三角函数通解和有理函数通解. 当双曲函数通解中的常数取特殊值时，可得到对应通解的孤立波解. 本文工作拓展了(G'/G)展开法的应用，丰富了非线性$(2+1)$维 ANNV 系统的解系. 从求解精确解的过程来看，使用(G'/G)展开法构造非线性方程精确解有明显的优势：更直接、更简洁. 因此，这一方法也适用于构造其他更为复杂的非线性方程的新精确解.

[1] Li Z B，Zhang S Q 1997 *Acta Math*. -*Phys*. *Sin*. **17** 81（in Chinese）[李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]

[2] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[3] Liu S K，Liu S D，Fu Z T 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068（in Chinese）[刘式适、刘适达、付遵涛 2001 物理学报 **50** 2068]

[4] Liu S D，Fu Z T，Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718（in Chinese）[刘式达、付遵涛、刘适式等 2002 物理学报 **51** 718]

[5] Wu G J，Han J H，Shi L M *et al* 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3858（in Chinese）[吴国将、韩家骅、史良马等 2006 物理学报 **55** 3858]

[6] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 13（in Chinese）[套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]

[7] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3246（in Chinese）[套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]

[8] Li X Z，Li X Y，Zhao L Y，Zhang J L 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 22031（in Chinese）[李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2008 物理学报 **57** 2203]

[9] Gao L，Xu W，Tang Y N *et al* 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 1860（in Chinese）[高 亮、徐 伟、唐亚宁等 2007 物理学报 **56** 1860]

[10] Fang J P，Zheng C L，Zhu J M 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **44** 203

[11] Fang J P，Zheng C L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 670

[12] Fang J P，Zheng C L，Zhu J M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2990（in Chinese）[方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[13] Ma S H，Wu X H，Fang J P，Zheng C L 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 11（in Chinese）[马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[14] Ma S H，Fang J P 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 5611（in Chinese）[马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[15] Ma S H，Fang J P，Zheng C L 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 2767

[16] Ma S H，Fang J P，Hong B H，Zheng C L 2008 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **49** 1245

[17] Wang M L，Li X Z，Zhang J L 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 417

[18] Zhang S，Tong J L，Wang W 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 2254

[19] Bekir A 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 3400

[20] Boiti M，Leon J J P，Manan M，Penpinelli F 1986 *Inver*. *Prob*. **2** 271

[21] Chen Y，Wang Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1796

[22] Dai C Q，Zhou G Q 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 1201

[23] Ma S H，Fang J P，Ren Q B 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6784（in Chinese）[马松华、方建平、任清褒 2007 物理学报 **56** 6784]

(G'/G)-expansion method and new exact solutions for $(2+1)$-dimensional asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov system*

Li Bang-Qing[1)2)] Ma Yu-Lan[1)†]

1)(*Beijing Technology and Business University*, *Beijing* 100048, *China*)

2)(*China University of Mining and Technology Beijing*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 12 October 2008; revised manuscript received 12 November 2008)

Abstract

By introducing and extending the (G'/G)-expansion method, the new exact general solutions are constructed for $(2+1)$-dimensional asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov system. These solutions include general hyperbolic function solutions, general trigonometric function solutions and general rational function solutions. The solitary ware solutions are obtained when the constants involved in the general hyperbolic solutions are set at special values.

Keywords: (G'/G)-expansion method, $(2+1)$-dimensional asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov system, exact solution, solitary wave solution

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Excellent Key Techers Project of Beijing, China (Grant Nos. 19004811009 and PXM2007-014213-044566).

† E-mail: mayl@th.btbu.edu.cn