第 58 卷 第 7 期 2009 年 7 月
1000-3290/2009/58(07)/4379-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58,No.7,July,2009

广义 Boussinesq 方程的同伦映射近似解*

莫嘉琪[1)2)†]　程　燕[3)]
1)(安徽师范大学数学系,芜湖　241000)
2)(上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所,上海　200240)
3)(中国人民解放军炮兵学院基础部,合肥　230031)
(2008 年 10 月 9 日收到;2008 年 11 月 6 日收到修改稿)

研究了一个广义非线性 Boussinesq 方程.利用同伦映射方法,首先构造了相应的同伦变换;其次选取了适当的初始近似;然后用同伦映射方法得到了孤立子波近似解;最后得到了微扰渐近表示式.

关键词:Boussinesq 方程,非线性,孤立子,近似方法
PACC:0340,0230

1. 引　言

孤子理论是目前非线性科学的一个重要研究部分.它已经在自然科学领域中广泛地被应用.特别在化学、生物学、应用数学、流体力学、场论、光学、凝聚态物理学等学科中都有这方面的重要研究结果[1—6].近来,在研究非线性孤子解的理论方面出现了许多新的方法,例如双曲正切函数法,齐次平衡法,Jacobi 椭圆函数法,辅助函数法等等[7,8].利用这些方法,许多学者在量子力学、大气物理、神经网络等领域中解决了大量的非线性孤子波理论的有关问题[9—11].渐近方法是目前研究非线性理论孤子波的一种新方法.这种方法的主要实质是将非线性问题通过解的渐近展开式转化为对应的线性问题来处理.同伦映射方法[12,13]就是属于这种方法.近十几年来许多非线性近似方法不断地在发展和优化,包括平均法、匹配渐近展开法和多重尺度法等.一些学者也做了不少工作,例如 Ni 和 Wei[14],Bartier[15],Llibre,Silva 和 Teixeira[16] 以及 Guarguaglini 和 Natalini[17] 等等.利用微分不等式等方法,莫嘉琪等人也做了反应扩散[18],催化反应[19],生态环境[20],激波[21],孤子波[22—24],激光脉冲[25,26],海洋科学[27—29],大气物理[30—33]等方面的问题.本文是研究一类非线性发展方程[34],并用同伦映射方法得到其孤子波的近似解.

考虑如下一类广义非线性 Boussinesq 方程[35,36]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=f(u),\quad(1)$$

式中 c,α,β 为常数;f 为关于其自变量为充分光滑的函数,它表示非线性 Boussinesq 方程的超非线性扰动项.

2. 孤子波与同伦映射

广义非线性 Boussinesq 方程(1)当 $f(u)=0$ 时为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0.\quad(2)$$

设 $u=u(\xi),\xi=k(x-ct)$ 方程(2)可变为

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha k^2\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4}-\beta\frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}\xi^2}=0,\quad(3)$$

式中 k,c 分别为波数和波速.利用 Jacobi 椭圆函数法可得方程(2),即(3)式的一个孤子解[34]

$$u=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct),\quad(4)$$

式中 $c_0^2=c^2-4\alpha k^2$.

为了得到广义非线性 Boussinesq 方程(1)的近似解,今引入一个同伦映射[12] $H(u,p):R\times I\to R$:

$$H(u,p)=L[u]-L[u_0]+p(L[u_0]$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,40876010),国家重点基础研究发展计划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号:E03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}-f(u)), \tag{5}$$

式中 $R=(-\infty,+\infty)$, $I=[0,1]$, u_0 是方程(1)的初始近似,而线性算子 L 为

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

显然,$H(u,1)=0$ 就是方程(1).所以广义非线性 Boussinesq 方程(1)的解 $u(t,x)$ 就是 $H(u,p)=0$ 的解当 $p\to 1$ 的情形.

设 $H(u,p)=0$ 的解 u 为

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x)p^i, \tag{6}$$

式中 $u_0(t,x)$ 为方程(1)解的初始近似,并取其为方程(2)的解(4),即

$$u_0(t,x)=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\times\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct). \tag{7}$$

将(6),(7)式代入

$$H(u,p)=0, \tag{8}$$

按 p 的幂展开非线性项,合并 p 的同次幂项,并令其为零,可以依次得到函数 $u_i(t,x)$, $i=1,2,\cdots$,应满足的微分方程.依次求出其解 $u_i(t,x)$.再将求得的解 $u_i(t,x)$ 代入(6)式.由此得到的 $\sum_{i=0}^{n}u_i(t,x)$ 便是广义非线性 Boussinesq 方程(1)相应孤子波的 n 次近似解[13].

3. 孤子波的近似解

将(6)式代入关系式(8),将非线性项展开为 p 的幂级数,合并 p 的同次幂项,令 p^1 项的系数为零可得到

$$L[u_1]=f(u_0), \tag{9}$$

式中 u_0 由(7)式表示.

对(9)式两端进行 Fourier 变换,我们有

$$\frac{d^2\tilde{u}_1}{dt^2}+(c\lambda^2-\alpha\lambda^4)\tilde{u}_1=\tilde{f}(u_0), \tag{10}$$

其中 $\tilde{u}_i(t,\lambda)$ 为 $u_1(t,x)$ 的 Fourier 变换,$\tilde{f}$ 为 f 的 Fourier 变换.由方程(10),并附以零初始条件,可得其解为

$$\tilde{u}_1(t,\lambda)=\int_0^t\frac{\tilde{f}}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\times[\sin(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1))]dt_1.$$

故方程(9)的解为

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Big[\frac{\tilde{f}}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\times[\sin(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1))\times\exp(i\lambda x)\Big]dt_1d\lambda. \tag{11}$$

将(6)式代入关系式(8),将非线性项展开为 p 的幂级数,合并 p 的同次幂项,令 p^2 项的系数为零可得到

$$L[u_2]=2\beta\frac{d^2(u_0u_1)}{dx^2}+f_u(u_0)u_1, \tag{12}$$

其中 u_0, u_1 分别由(7),(11)式表示.

由方程(12),并附以零初始条件,对(12)式两端进行 Fourier 变换,我们有

$$\frac{d^2\tilde{u}_2}{dt^2}+(c\lambda^2-\alpha\lambda^4)\tilde{u}_2=\tilde{F}_0+\tilde{F}_1, \tag{13}$$

其中 $\tilde{F}_0$, $\tilde{F}_1$ 分别为

$$\tilde{F}_0=-2\beta\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{u}_1(\lambda-\tau)\tilde{u}_0(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{F}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{u}_1(\lambda-\tau)\tilde{f}_u(u_0(\tau))d\tau. \tag{14}$$

由方程(13),并附以零初始条件,可得其解为

$$\tilde{u}_2(t,\lambda)=\int_0^t\frac{\tilde{F}_0+\tilde{F}_1}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\times[\sin(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1))]dt_1.$$

故方程(12)的解为

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Big[\frac{\tilde{F}_0+\tilde{F}_1}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\times[\sin(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1))\times\exp(i\lambda x)\Big]dt_1d\lambda. \tag{15}$$

由(6),(7),(11),(15)式,我们便得到广义非线性 Boussinesq 方程(1)孤子波的一次、二次近似解 $u_{1\mathrm{hom}}$ 和 $u_{2\mathrm{hom}}$:

$$u_{1\mathrm{hom}}(t,x)=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\Big[\frac{\tilde{f}}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\times[\sin(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1))\times\exp(i\lambda x)\Big]dt_1d\lambda,$$

$$u_{2\mathrm{hom}}(t,x)=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\left[\frac{\tilde{f}+\tilde{F}_0+\tilde{F}_1}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\right.$$

$$\times\left[\sin\left(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1)\right)\right.$$

$$\times\exp(\mathrm{i}\lambda x)\Big]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}\lambda,\tag{16}$$

其中 $\tilde{f}$ 为 f 的 Fourier 变换,$\tilde{F}_0$,$\tilde{F}_1$ 由(14)式所示.

继续用同样的方法,我们可以得到广义非线性 Boussinesq 方程(1)孤子波的比(16)式更高次的近似解.

4. 微扰渐近解

当广义非线性 Boussinesq 方程(1)的强扰动项 $f(u)=\varepsilon g(u)$,其中 $0<\varepsilon\ll1$ 时,利用微扰理论和同伦映射方法,不难得到相应方程孤子波的一阶、二阶摄动渐近解 $u_{1\mathrm{per}}$,$u_{2\mathrm{per}}$ 分别为

$$u_{1\mathrm{per}}(t,x)=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct)$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\left[\frac{\tilde{g}}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\right.$$

$$\times\left[\sin\left(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1)\right)\right)$$

$$\times\exp(\mathrm{i}\lambda x)\Big]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}\lambda+O(\varepsilon^2),$$

$$0<\varepsilon\ll1,$$

$$u_{2\mathrm{per}}(t,x)=\frac{3(c^2-c_0^2)}{2\beta}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{4\alpha}}(x-ct)$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\left[\frac{\tilde{g}+\tilde{G}_0}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\right.$$

$$\times\left[\sin\left(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1)\right)\right)$$

$$\times\exp(\mathrm{i}\lambda x)\Big]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}\lambda$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\left[\frac{\tilde{G}_1}{\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}}\right.$$

$$\times\left[\sin\left(\lambda\sqrt{c-\alpha\lambda^2}(t-t_1)\right)\right)$$

$$\times\exp(\mathrm{i}\lambda x)\Big]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}\lambda+O(\varepsilon^3),$$

$$0<\varepsilon\ll1,$$

其中 $\tilde{g}$,$\tilde{g}_u$ 分别为 g,g_u 的 Fourier 变换,$\tilde{G}_0$,$\tilde{G}_1$ 分别为

$$\tilde{G}_0=-2\beta\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{u}_{1\mathrm{per}}(\lambda-\tau)\tilde{u}_0(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\tilde{G}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\tilde{u}_{1\mathrm{per}}(\lambda-\tau)\tilde{g}_u(u_0(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

上式中 u_0 由(7)式表示,$\tilde{u}_0$,$\tilde{u}_{1\mathrm{per}}$ 分别为 u_0,$u_{1\mathrm{per}}$ 的 Fourier 变换.

5. 结　　论

孤子波是描述一类复杂的自然现象. 因此我们需要把它规化为基本模型,并去求解它. 然后去解释对应的自然现象的典型规律. 用同伦映射方法去求解相应模型的近似解,就是一种简单而有效的方法.

同伦映射方法是一个解析方法. 它不是一般的数值方法,更不是简单的模拟方法. 用同伦映射方法得到的近似解,还可对这近似解再进行解析运算. 从而可以进一步得到与所讨论的自然现象相关的物理量. 因而可得到更深层的结果.

[1] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[2] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662

[3] Loutsenko I 2006 *Commun. Math. Phys.* **268** 465

[4] Gedalin M 1998 *Phys. Plasmas* **5** 127

[5] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154

[6] Li, X Z, Wang M L 2007 *Phys. Lett. A* **361** 115

[7] *Wang M L* 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169

[8] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett. A* **309** 387

[9] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[10] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[11] Pan, L X, Zuo, W M, Yan, J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]

[12] He J H 2006 *Inter. J. of Modern Phys.* B **20** 1141

[13] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)

[14] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Differ. Eqns.* **221** 158

[15] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325

[16] Llibre J, da Silva P R, Teixeira M A 2007 *J. Dyn. Differ. Eqns.* **19** 309

[17] Guarguaglini F R, Natalini R 2007 *Commun. Partial Differ. Eqns.* **32** 163

[18] Mo J Q 1989 *Science in China Ser* A **32** 1306

[19] Mo J Q, Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. & Complexity* **20** 119

[20] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sinica* **27** 4366

[21] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Nat. Sci.* **13** 768

[22] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[23] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[24] Mo J Q, Chen L H, He M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4646 (in Chinese) [莫嘉琪、陈丽华、何 铭 2008 物理学报 **57** 4646]

[25] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[26] Lin W T, Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4641 (in Chinese) [林万涛、莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2008 物理学报 **57** 4641]

[27] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin. Geographical Sci.* **18** 193

[28] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230

[29] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 743

[30] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]

[31] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671

[32] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951

[33] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 370

[34] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys.* B **7** 2767

[35] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[36] Zheng X, Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1476 (in Chinese) [曾 昕、张鸿庆 2006 物理学报 2005 **54** 1476]

Approximate solution of homotopic mapping for generalized Boussinesq equation*

Mo Jia-Qi[1)2)†] Cheng Yan[3)]

1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

2) (*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai 200240, Chian*)

3) (*Base Department, Artillery Academy of PLA, Hefei 230031, China*)

(Received 9 October 2008; revised manuscript received 6 November 2008)

Abstract

The generalized nonlinear Boussinesq equation is studied. Using the homotopic mapping perturbation method, firstly, the corresponding homotopic mapping transform is constructed; secondly, the suitable initial approximation is selected; and then by using the homotopic mapping, the approximate solution for the solitary wave is obtained. Finally, the small perturbation asymptotic expansions are obtained.

Keywords: Boussinesq equation, nonlinear, soliton, approximate method

PACC: 0340, 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 40876010), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Direction Program of the Knowledge Innovation Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), in part by E-Institute of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn