

# 周期驱动玻色-爱因斯坦凝聚系统的棘齿效应

曲春雷<sup>†</sup> 赵 清

(北京理工大学理学院物理系 北京 100081)

(2008 年 9 月 29 日收到 2008 年 10 月 23 日收到修改稿)

研究了周期脉冲驱动下的玻色-爱因斯坦凝聚体系(BEC)的动力学演化.其中着重考虑了 BEC 原子间的非线性相互作用对量子棘齿效应的影响.数值计算结果表明,较弱的非线性相互作用可以减弱定向动量流的强度,而较强的非线性相互作用则会使量子棘齿效应消失甚至发生反转,即系统会出现反向的定向动量流,而且随着时间的演化,动量流会表现出微弱的饱和趋势.计算还发现,高阶量子共振下系统的棘齿效应变得很不明显,而且外部驱动势的周期噪声很容易破坏体系的棘齿效应.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚,量子混沌,量子共振,棘齿效应

PACC:0365, 0560, 0545

## 1. 引 言

1995 年,在实验上实现了碱金属原子稀有气体的玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation, BEC)<sup>[1]</sup>,从而引发了该领域实验和理论方面的广泛兴趣.BEC 是一种具有宏观量子相干、宏观量子隧穿及量子超流性质的量子流体<sup>[2]</sup>,BEC 的奇特性,使它不仅对基础研究有重要意义,而且在芯片技术、精密测量和纳米技术等领域都让人看到了非常美好的应用前景.

在理论研究方面,平均场近似下的 GPE(Gross-Pitaevskii equation)<sup>[3]</sup>被成功的应用于研究 BEC 的动力学性质,如整体频率<sup>[4]</sup>、混沌行为<sup>[4-6]</sup>、自俘获现象<sup>[7]</sup>、隧穿现象<sup>[8]</sup>和量子涡旋的亚稳态<sup>[9]</sup>等.从实验物理学角度,利用日益精密地激光技术等实验手段人们可以精确控制凝聚体,不仅可以高精度地制备特定的初态,而且还可以利用 Feshbach 共振来调节原子间的非线性相互作用的大小<sup>[10]</sup>.目前,关于非线性相互作用对量子混沌系统影响的研究还处在开始阶段<sup>[11-14]</sup>.

研究经典混沌模型所对应的量子系统的输运性质有很重要的基础意义和实用价值.在很多简单而有代表性的哈密顿动力学系统的量子化模型中,已经发现了大量有趣的量子输运现象.这些现象表现

出纯粹的量子特性.周期受击转子是研究经典混沌的一个典型模型,而量子化的受击转子则表现出量子混沌系统的特有现象:动力学局域化和量子共振<sup>[15]</sup>.动力学局域化是经典混沌的量子抑制效应.而量子共振则发生在驱动周期  $T$  取特定值的时候,它表现为系统平均能量随时间以二次方的形式增长.最近,实验上已经利用原子光学技术实现了量子受击转子<sup>[16,17]</sup>,这是研究量子混沌系统动力学行为的重大突破.近年来,对于经典与量子输运系统,提出了一个非常重要的概念,即棘齿效应.这是周期驱动系统在均匀无偏差微扰下产生的定向粒子流现象<sup>[18]</sup>.由于棘齿效应在生物输运,分子马达,纳米技术等方面具有潜在的应用价值而得到人们的广泛关注<sup>[19]</sup>.一般情况下,只有当系统的空间或时间对称性被破坏,在外部噪声或耗散的影响下才会出现定向流.经典物理中的棘齿效应已经得以实现.在经典哈密顿混沌系统中,没有耗散项,噪声也被混沌所代替<sup>[20]</sup>.其相应的量子化系统也可以表现出奇特的棘齿效应.在系统量子共振条件下,不仅理论预言出量子棘齿效应,即定向流(粒子平均动量)的线性增加,而且实验上也已观测到了该现象<sup>[21-26]</sup>.

本文中,通过数值模拟方法研究了周期脉冲驱动下的玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学演化及其产生的棘齿效应.

<sup>†</sup> E-mail: chunleiqu@163.com

## 2. 物理模型:环上周期脉冲驱动下的玻色-爱因斯坦凝聚

考虑  $N$  个玻色原子被限制在一个半径为  $R$  的环形势中,圆环截面半径为  $r$ ,且满足  $r \ll R$ .因而,系统可以近似看成是一维的.稀薄凝聚原子在周期脉冲驱动势下的动力学演化由 GPE 描述

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\theta, t) = \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k \cos(\theta) \delta(t) + g |\psi|^2 \right] \times \psi(\theta, t), \quad (1)$$

其中,  $\delta(t) = \sum_n \delta(t - nT)$  表示一系列  $\delta$  脉冲,  $\theta$  是圆环角坐标,非线性参数  $g = 8NaR/r^2$ .表示原子间非线性相互作用强度( $g \geq 0$  对应排斥相互作用,反之是吸引相互作用). $a$  是  $s$  波散射长度, $k$  是驱动势的强度, $T$  为驱动周期.注意到我们已把普朗克常数  $\hbar$  取为 1.长度和能量单位取为  $R$  和  $\hbar^2/mR^2$ .波函数满足的归一化条件为  $\int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\theta = 1$ , 周期边界条件是  $\psi(\theta, t) = \psi(\theta + 2\pi, t)$ .系统的初始波函数取为  $\psi_0(\theta) = (1 + e^{-i(\theta-\phi)})/\sqrt{4\pi}$ ,  $\phi$  是常数相因子.在

计算中,我们用劈裂算符<sup>[27]</sup>的方法对方程(1)进行数值积分,来研究系统的动力学演化行为,从而得到系统的平均动量.系统演化时间取为  $n = 30$  个驱动周期.我们考虑系统处于量子共振的情况,即驱动周期  $T$  取为 Talbot<sup>[28]</sup> 时间  $T_T = 4\pi$ .这时,系统每经过一个周期  $T$  的自由演化,其状态也周期性地复现.

## 3. 非线性相互作用的影响

当系统的初始波函数取本征动量为 0 和  $-1$  的叠加态,即  $\psi_0(\theta) = (1 + e^{-i(\theta-\phi)})/\sqrt{4\pi}$  时,该初态及驱动势  $k \cos(\theta)$  同时具有一定的对称性,这时不需要破坏时空对称性就可以产生很明显的量子棘齿效应,其出现定向流的大小和方向则依赖于初态两个叠加的本征动量的相对相位因子  $\phi$ .

首先,考虑没有非线性相互作用的情况.在量子共振条件  $T = 4\pi$  下系统的  $n$  周期幺正演化算符为  $U = e^{-i k \cos(\theta)}$ .作用在初始波函数上,则得到末态波函数的本征动量为  $m$  的分量为

$$\psi_{\text{out}}(m) = \frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} [ J_m(nk) - i e^{i\phi} J_{1+m}(nk) ], \quad (2)$$

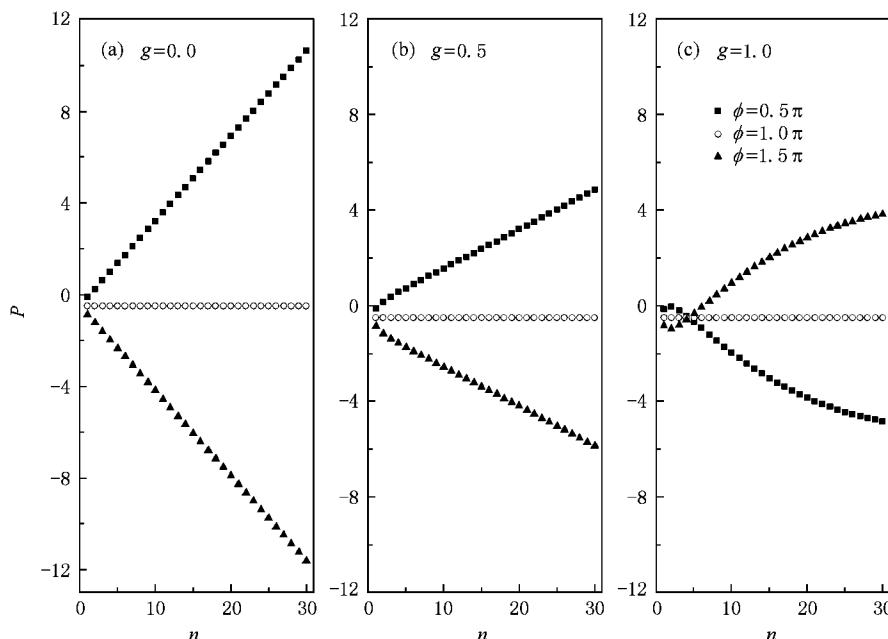


图 1 系统平均动量  $P$  在不同非线性相互作用下随时间  $n$  的变化关系.非线性相互作用参数的大小分别是(a)  $g = 0.0$  (b)  $g = 0.5$  (c)  $g = 1.0$

其中  $J_m(x)$  是  $m$  阶贝塞尔函数.

因而 动量分布函数为

$$P(m) = |\psi_{\text{out}}(m)|^2 = \frac{1}{2} [J_m^2(nk) + J_{m+1}^2(nk) + 2\sin(\phi)J_m(nk)J_{m+1}(nk)], \quad (3)$$

所以 动量的平均值为

$$P = \sum_m m P(m) = -0.5 + \frac{k}{2} n \sin(\phi). \quad (4)$$

可以看出,当非线性参数为  $g = 0$  时,定向动量流的大小和方向依赖于初始波函数两叠加本征动量分量的相对相位  $\phi$ ,改变该相位因子就可以改变动量流的大小和方向. 相对相位  $\phi$  对动量定向流产生影响的原因在于,对于同样存在对称性的初始波函数和驱动外势,它们的对称中心一般是不一致的. 当  $\phi = 0, \pi$  时,势场对称中心与初始波函数的对称中心重合,从而不存在动量的定向流动,系统没有棘齿效应. 而当  $\phi = 0.5\pi$  时,两个对称中心差别最大,动量流最强(见图 1(a)).

在图 1(b)和(c)中,我们考虑了存在非线性相互作用的情况. 当非线性参数  $g = 0.5$  时,对于系统  $\phi = 0.5\pi, 1.5\pi$  时的情况,仍然存在棘齿效应,只是其动量流的强度有所减弱(图 1(b)). 当非线性参数  $g = 1.0$  时,出现了新的现象: 经过四个周期,系统的

动量流与没有相互作用时的动量流方向相反了,即出现了棘齿效应的反转. 而且随着时间的演化,动量流出现了微弱的饱和趋势. 这些新的现象都是非线性相互作用导致的结果,原子间的非线性相互作用对周期脉冲驱动下的玻色-爱因斯坦凝聚体的动量扩散有很大的影响. 此外,我们注意到,非线性相互作用对于初始相对相位  $\phi = \pi$  的情况没有影响,无论是否存在非线性相互作用,都没有产生量子棘齿效应. 不过根据我们对系统的动量分布情况的计算结果表明,在  $\phi = \pi$  时,无论是否存在非线性相互作用,系统的动量谱都是在初始动量分布的基础上均匀对称地向两边扩散,只是在存在非线性相互作用时,系统的动量扩散速度要慢一些.

另一方面,根据理论计算的结果,可以发现当系统不存在非线性相互作用时,系统随时间演化后的动量与相对相位角  $\phi$  存在正弦函数关系(如图 2 中  $g = 0.0$  曲线所示). 图 2 还给出了存在非线性相互作用的情况下,即  $g$  不为零时,动量随相位角  $\phi$  的变化曲线. 系统的演化时间取定为 30 个周期,改变非线性参数  $g$  与相位角  $\phi$ ,可以得到相应的最终动量值. 计算中我们不仅考虑了排斥相互作用  $g > 0$  的情况(如图 2(a)所示),同时还计算了吸引相互作用  $g < 0$  的情况(如图 2(b)所示).

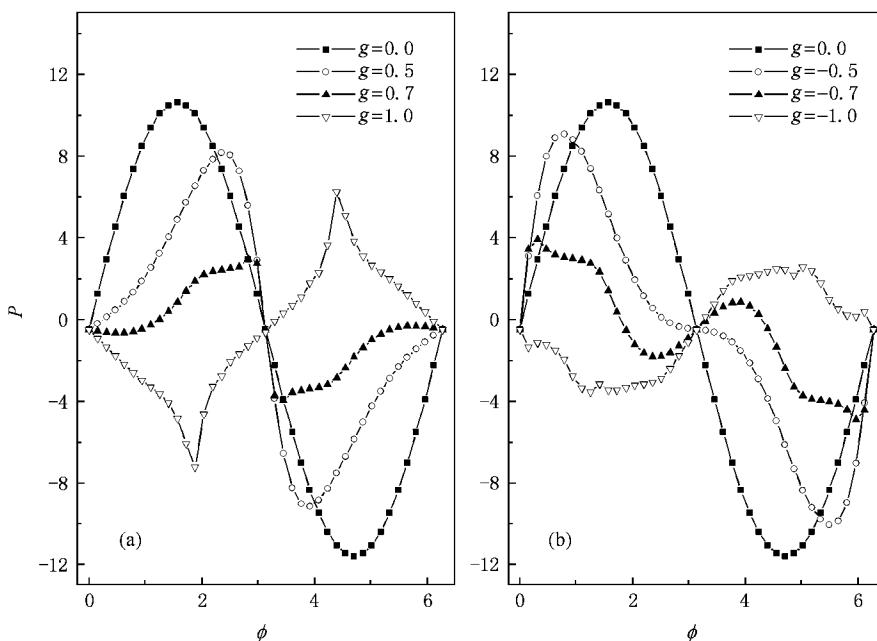


图 2 经过 30 个周期后,系统最终动量  $P$  与相因子  $\phi$  的依赖关系 (a) 是不同排斥相互作用情况 (b) 对应不同吸引相互作用

计算结果表明,当存在非线性相互作用时,系统动量与相位角  $\phi$  的关系出现了很大的变化。首先,在  $[0, \pi]$  区间出现最大动量流的相位角  $\phi_m$  不再是线性情况下的  $\phi = 0.5\pi$ ,而是随着非线性强度的增加而有规律的移动。对于排斥相互作用(图 2(a)),随  $g$  增大,  $\phi_m$  向  $\phi = \pi$  点移动,当  $g$  达到一定值时,系统所有的棘齿效应都基本消失,这时  $\phi_m = \pi$ 。继续增大  $g$ ,  $\phi_m$  则开始由  $\phi = \pi$  向  $\phi = 0$  移动,同时产生的系统定向流也开始与无相互作用时方向相反(如图 2(a)中的  $g = 1.0$  曲线)。对于吸引相互作用的情况(图 2(b))随着非线性相互作用的增强,在  $[0, \pi]$  区间,  $\phi_m$  则是先向  $\phi = 0$  点移动,在  $g = 0.7$  附近  $\phi_m = 0$ ,继续增大  $g$ ,  $\phi_m$  开始向  $\phi = \pi$  点移动。图 2(a)和(b)的变化趋势并非完全一致。注意到,当  $g = 1.0$  和  $g = -1.0$  时,动量与相因子  $\phi$  的依赖关系已是非常不一样了。不过还应该注意到,系统最终的平均动量对于相位角  $\phi$  仍然存在对称性,即无论非线性相互作用是否存在,都有  $P(\phi) + P(2\pi - \phi) = -1.0$ 。相对相位因子  $\phi$  只出现在初始波函数中,而相互作用  $g$  对它是没有影响的。当没有非线性相互作用时,根据(4)式,系统就存在关系式  $P(\phi) + P(2\pi - \phi) = -1.0$ 。改变非线性参数,这个关系仍然保持。

#### 4. 高阶共振下的量子棘齿效应

周期驱动玻色-爱因斯坦凝聚的高阶量子共振已经在实验中被观测到<sup>[28]</sup>,并引起了理论工作者的广泛关注。在高阶共振中,系统的能量仍然表现为随时间的二次方增长,只是,随着共振阶数的增加,能量的增长变得缓慢而且出现震荡的趋势。

根据文献[26],系统的驱动周期  $T$  分别取为  $T_T, \frac{3}{4}T_T, \frac{4}{3}T_T$  时,这分别对应系统的一阶,二阶和三阶量子共振。由图 3 所示的数值计算结果可以看到,在高阶共振下,棘齿效应不明显,动量值几乎趋于 0。不过对于二阶量子共振,还是可以看到出现缓慢震荡的棘齿效应。这时动量出现振荡的原因是因为,对于二级共振,在每个周期的自由演化过程中,只有部分量子态重复出现。

#### 5. 噪声对棘齿效应的影响

分析噪声对量子共振条件下的量子棘齿效应的

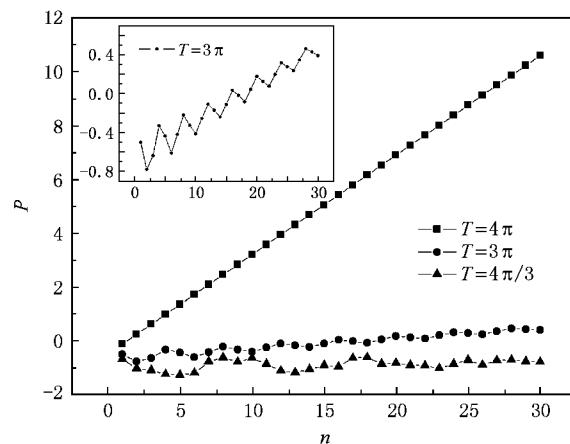


图 3 系统平均动量  $P$  在三种驱动周期下对时间的函数

影响也是一个很重要的问题。为此,我们引入对于周期驱动强度  $k$  及驱动周期  $T$  的无记忆涨落来模拟外界噪声,即  $k \rightarrow k_\sigma = k + \sigma(t)$ ,  $T \rightarrow T_\sigma = T + \sigma(t)$ 。其中噪声值  $\sigma(t)$  均匀随机的分布在区间  $[-\sigma, +\sigma]$  内。动量流对驱动强度噪声及周期噪声的依赖关系如图 4 所示。我们注意到,噪声使得棘齿效应有减弱的趋势。但系统对驱动周期上的噪声的敏感度要远大于驱动强度上的噪声(如当噪声幅度  $\sigma = 0.5$  的时候),即系统的定向动量流在驱动周期上的噪声影响下更容易被破坏。这是由于受击转子系统的量子共振条件对周期  $T$  的严格依赖性所决定的。

### 6. 结 论

本文研究了环上周期脉冲驱动的玻色-爱因斯坦凝聚系统在量子共振条件下产生的棘齿效应。数值计算过程中,我们考虑了原子间非线性相互作用对系统所产生的定向动量流的影响。计算结果表明,较弱的非线性相互作用可以减弱定向动量流的强度。而较强的非线性相互作用则会使量子棘齿效应发生反转,即系统会出现反向的定向动量流。有意思的是,最大定向动量流对应的相位角  $\phi_m$  会随着非线性相互作用的改变而有规律的移动。因此,除了相位角  $\phi$ ,我们还可以把非线性相互作用  $g$  作为控制定向动量流强弱及方向的一个参量。此外,我们还研究了高阶共振条件下的棘齿效应,发现在高阶共振下的量子棘齿效应变得很不明显。同时,定向动量流对加在驱动势周期上的噪声是非常敏感的,棘齿效应很容易被很小的噪声所破坏。文中所用的物理模型在现有实验中很容易实现,希望我们的计算结果

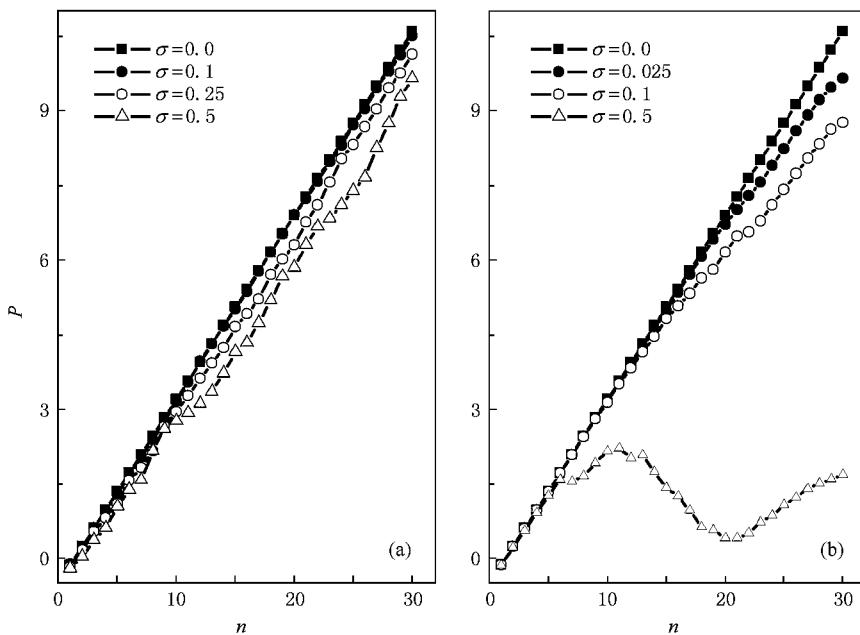


图4 噪声强度对量子棘齿效应的影响 (a)为加在驱动势强度  $k$  上的不同噪声产生的影响 (b)是加在驱动周期  $T$  上的不同噪声所带来的影响

对实验研究有所帮助.

- [1] Anderson M H ,Ensher J R ,Matthews M R ,Wieman C E ,Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- Davis K B ,Mewes M O ,Andrews M R ,Drutin N J ,Durfee D S ,Kurn D M ,Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- Bradley C C ,Sackett C A ,Tollett J J ,Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [2] Franco D ,Giorgini S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- Anthony L J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [3] Zhang L ,Ge M L 2000 *Fashionable Problem in Quantum Mechanics* (Peking : Tsinghua University Press) (in Chinese) [ 张 礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题 (北京 清华大学出版社) ]
- [4] Smerzi A ,Fantoni S 1977 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589
- [5] Kagan Y ,Surkov E L ,Shlyapnikov G V 1997 *Phys. Rev. A* **55** R18
- [6] Liu J ,Wang W G ,Zhang C W ,Niu Q ,Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [7] Wang G F ,Fu L B ,Zhao H ,Liu J 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [ 王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003 ]
- [8] Wang G F ,Liu H 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 0667 ( in Chinese ) [ 王冠芳、刘 红 2008 物理学报 **57** 0667 ]
- [9] Dodd R J ,Burnett K ,Edwards M ,Clark C 1997 *Phys. Rev. A* **56** 587
- Rokhsar D S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2164
- [10] Gerton J M ,Strelakalov D ,Prodan I ,Hulet R G 2000 *Nature (London)* **408** 692

- Donley E A ,Claussen N R ,Cornish S L ,Roberts J L ,Cornell E A ,Wieman C E 2001 *Nature (London)* **412** 295
- [11] Zhang C W ,Liu J ,Raizen M G ,Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054101
- [12] Liu J ,Zhang C W ,Raizen M G ,Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [13] Wimberger S ,Mannella R ,Morsch Oliver ,Arimondo E 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 130404
- [14] Rebuzzini L ,Artuso R ,Fishman S ,Guarneri I 2007 *Phys. Rev. A* **76** 031603(R)
- [15] Fishman S ,Grempl ,Prange R E 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 509
- Wimberger S 2003 *Nonlinearity* **16** 1381
- [16] Moore F L ,Robinson J C ,Bharucha C ,William P E ,Raizen M G 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2974
- [17] Moore F L ,Robinson J C ,Bharucha C F ,Sundaram B ,Raizen M G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4598
- [18] Feynman R P ,Leighton R B ,Sands M 1966 *The Feynman Lectures on Physics* ( Addison-Wesley ,Reading ,MA ) Vol. 1 ,Chap. 46
- [19] Jülicher F ,Ajdari A ,Prost J 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 1269
- [20] Schanz H ,Otto M F ,Ketzmerick R ,Dittrich T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 070601
- [21] Sadgrove M ,Horikoshi M ,Sekimura T ,Nakagawa K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 043002
- [22] Dana I ,Ramareddy V ,Talukdar I ,Summy G S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 024103

- [ 23 ] Lundh E ,Wallin M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 110603  
[ 24 ] Kenfack A ,Gong J ,Pattanayak A K 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100**  
044104  
[ 25 ] Poletti D ,Benenti G ,Casati G ,Li B W 2007 *Phys. Rev. A* **76**  
023421  
[ 26 ] Morales-Molina L ,Flach S 2008 *New J. Phys.* **10** 013008  
[ 27 ] Bandrank A D ,Shen H 1994 *J. Phys. A* **27** 7147  
[ 28 ] Ryu C ,Anderson M F ,Vaziri A ,d'Arcy M B ,Grossman J M ,  
Helmerson K ,Phillips W D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 160403

## Quantum-resonance ratchet in a kicked Bose-Einstein condensate

Qu Chun-Lei<sup>†</sup> Zhao Qing

( Department of Physics ,School of Science ,Beijing Institute of Technology ,Beijing 100081 ,China )

( Received 29 September 2008 ; revised manuscript received 23 October 2008 )

### Abstract

The dynamical evolution of a periodically kicked Bose-Einstein condensate was investigated by simulation. Emphasis was placed on the influence of the nonlinear interaction between atoms on the quantum-resonance ratchet effect. It was found that weak nonlinear interaction reduces the ratchet effect while the strong nonlinear interaction causes the ratchet current to disappear or even reversed. The ratchet effect under high-order quantum resonance conditions was further studied. The ratchet effect is not obvious in this case and can be easily destroyed by the noise of the kicking potential period.

**Keywords** : Bose-Einstein Condensate ( BEC ) , quantum chaos , quantum resonance , ratchet effect

**PACC** : 0365 , 0560 , 0545

<sup>†</sup> E-mail : chunleiqu@163.com