第 58 卷 第 7 期 2009 年 7 月
1000-3290/2009/58(07)/4402-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.7,July,2009

分数阶系统的一种稳定性判定定理及在分数阶统一混沌系统同步中的应用

胡建兵[†]　韩 焱　赵灵冬

(中北大学仪器科学与动态测试教育部重点实验室,电子测试技术国家重点实验室,太原　030051)

(2008 年 6 月 30 日收到;2008 年 9 月 8 日收到修改稿)

根据 Lyapunov 稳定定理及其逆定理和分数阶系统稳定定理,提出了如果整数阶系统稳定,其对应的阶次小于 1 的分数阶形式的系统也稳定的分数阶系统稳定的判定定理,并给出了详细的证明过程. 并将该理论运用于分数阶混沌系统的同步,实现了未知参数分数阶统一混沌系统的自适应同步,仿真结果证实了该理论的正确性.

关键词:分数阶系统, 混沌, Lyapunov 稳定定理, Lyapunov 稳定逆定理

PACC:0545

1. 引　言

1983 年文献[1]指出自然界中存在大量分数维现象且在整数阶和分数阶部分间存在自相似现象以来,分数阶微分方程比整数阶微分方程更具有普遍性而迅速成为研究的热点.

分数阶非线性系统还可能存在与整数阶非线性系统相似的非线性现象,如自振、多平衡状态、混沌以及更复杂的过渡过程等. 而这些现象在系统中常常是不希望出现而需要控制到稳定状态[2,3].

对于整数阶混沌系统控制与同步问题,基于 Lyapunov 稳定理论,相继提出了诸如误差反馈法、自适应法、观测器法、神经网络方法等多种方法[4—9].

对于分数阶系统的稳定问题,文献[10]提出了根据系统系数矩阵特征值的稳定性判定定理. 然而,对于非线性系统系数矩阵通常含有变量,其系数矩阵也是时变的,因而很难直接运用该定理进行判断. 针对这一问题文献[11]提出了根据系统平衡点的雅可比矩阵的特征值判定平衡点是否稳定的分数阶非线性系统局部稳定的判定定理. 然而该定理只是指出了局部稳定条件,对于如何判定分数阶非线性系统的全局稳定一直是期待解决的问题. 文献[12]提出了基于 Lyapunov 方程的全局稳定定理,该定理的实质是构造特定的二次型方程. 然而某些系统很可能不便于直接构造出这样的二次型方程.

针对上述问题,本文进一步研究了阶次小于 1 的分数阶系统(本文的分数阶系统都指阶次小于 1 的情况). 根据 Lyapunov 稳定定理及其逆定理,提出了如果整数阶系统稳定则该系统的分数阶形式也稳定的分数阶系统稳定的判定定理. 从而分数阶系统的控制与同步可以化为整数阶来处理,这样既可以使分数阶系统的控制与同步问题得到简化,又可以将整数阶系统的控制与同步方法推广到分数阶混沌系统中.

2. 理论提出

对于一般的非线性系统都可以表示成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A(X)X, \tag{1}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ 为系统状态变量,$A(X)$ 为包含变量的系数矩阵. 其对应的分数阶形式为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}X}{\mathrm{d}t^{\alpha}} = A(X)X. \tag{2}$$

受控分数阶系统(2)稳定的充要条件如下:

引理　对受控分数阶混沌系统(2),如果系数矩阵 $A(X)$ 的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda))|\geqslant\frac{\alpha\pi}{2}$,则受控系统稳定.

† 通讯联系人. E-mail:hjb@nuc.edu.cn

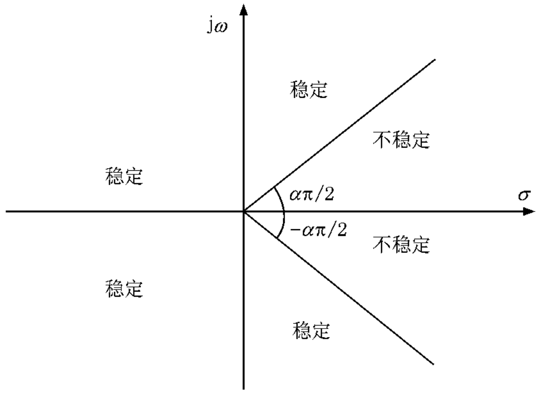

图 1　分数阶系统的稳定区间

阶次为 α 的分数阶系统的稳定性区域如图 1 所示. 可以通过系数矩阵 $A(X)$ 的特征值判定系统是否稳定. 但对于非线性分数阶系统(2)通常含有变量,难于直接使用该定理. 如果当 $\alpha<1$ 时,只要使含有状态变量的系数矩阵 $A(X)$ 无论状态变量为何值(除去原点外),其所有特征值实部都不大于零则分数阶系统将稳定到原点. 然而由于 $A(X)$ 通常含有状态变量,不便于直接计算其特征值. 当状态变量 X 在整个实数域内(除去原点外)任意变化时,如果 $A(X)$ 其所有特征值都具有不大于零的实部,则可以判定分数阶系统(2)原点稳定. 尽管整数阶形式中的状态变量 X 与分数阶形式的状态变量 X 的混沌吸引子不一样,但分数阶形式的系数矩阵 $A(X)$ 中的状态变量也在实数域内变化[12].

定理 1　如果系统(1)渐近稳定,则在状态变量 X 的变化范围内(除去原点外)$A(X)$ 的所有特征值的实部都不大于零.

证明　由 Lyapunov 稳定定理的逆定理知,如果系统(1)渐近稳定则一定存在正定的 Lyapunov 函数 V,其导数 $\dot V$ 半负定.

不失一般性,其 Lyapunov 函数总可以表示成如下的形式[13]:

$$V=(x_1^{k_1},x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n})^{\mathrm T}B(x_1^{k_1},x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}) \tag{3}$$

(其中 B 为正定矩阵,$k_1,k_2,\cdots k_n\in Z^+$). 其导数都满足

$$\dot V\leqslant 0, \tag{4}$$

即

$$\begin{aligned}
\dot V &= (k_1x_1^{k_1-1}\dot x_1,k_2x_2^{k_2-1}\dot x_2,\cdots,k_nx_n^{k_n-1}\dot x_n)B(x_1^{k_1},x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n})^{\mathrm T}\\
&\quad+(x_1^{k_1},x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n})B(k_1x_1^{k_1-1}\dot x_1,k_2x_2^{k_2-1}\dot x_2,\cdots,k_nx_n^{k_n-1}\dot x_n)^{\mathrm T}\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,A'^{\mathrm T}(X)\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\\
&\quad+(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}A'(X)(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,A'^{\mathrm T}(X)\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}\\
&\quad+\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x_1^{k_1-1}&&&\\&x_2^{k_2-1}&&\\&&\ddots&\\&&&x_n^{k_n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}A'(X)(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}.
\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$K=\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$M=\begin{bmatrix} x_1^{k_1-1} & & & \\ & x_2^{k_2-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n^{k_n-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

(6)式可写成

$$\dot{V}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)(A'^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X))(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

因为对任意状态变量 X,(4)式都成立,又因为

$$A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X) = (A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X))^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

矩阵 $A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X)$ 为半负定阵.只需证明矩阵 $A(X)$ 的所有特征值实部都不大于零即可.

令 λ 为 $A(X)$ 的任意一个特征值,向量 ξ 为其对应的特征向量.则有

$$KA(X)\xi=\lambda K\xi, \tag{10}$$

$$(\overline{KA(X)\xi})^{\mathrm{T}}=\bar{\lambda}(\xi K)^{\mathrm{H}}. \tag{11}$$

(8)式左乘 $\xi^{\mathrm{H}}MBM$ 与(9)式右乘 $MBM\xi$ 后相加得

$$\begin{aligned}&\xi^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMCA(X))\xi\\ &=(\lambda+\bar{\lambda})(K\xi)^{\mathrm{H}}MBM(K\xi)\\ &=(\lambda+\bar{\lambda})(MK\xi)^{\mathrm{H}}B(MK\xi).\end{aligned} \tag{12}$$

又因为矩阵 $A(X)+A^{\mathrm{T}}B$ 为负定阵,矩阵 B 为正定阵,且 ξ 为非零向量故如下两式始终成立：

$$\xi^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X))\xi \leqslant 0, \tag{13}$$

$$(MK\xi)^{\mathrm{H}}B(MK\xi) \geqslant 0. \tag{14}$$

(14)式中当且仅当状态变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为零时取等号.

根据(12),(13)和(14)式,当状态变量为非原点时有

$$\begin{aligned}\lambda+\bar{\lambda}&=\xi^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{T}}(X)KMBM + MBMKA(X))\xi\\ &/(MK\xi)^{\mathrm{H}}B(MK\xi) \leqslant 0.\end{aligned} \tag{15}$$

定理得证.

根据引理及定理 1 知 如果整数阶系统(1)渐近稳定,在实数域内系数矩阵 $A(X)$ 的所有特征值的实部都不大于零,故分数阶系统(2)也渐近稳定.

3. 未知参数的分数阶统一混沌系统自适应同步

分数阶统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x_1}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=-(25a+10)x_1+(25a+10)x_2,\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}x_2}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=(28-35a)x_1\\ &\quad+(29a-1)x_2-x_1x_3,\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}x_3}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=x_1x_2+(a+8)x_3/3.\end{aligned} \tag{16}$$

当参数 $\alpha\in[0,0.8)$ 时,系统为分数阶 Lorenz 系统.当 $\alpha=0.8$ 时,系统为分数阶 Lü 系统.当 $\alpha\in(0.8,1]$ 时,系统为分数阶 Chen 系统.以该系统为驱动系统,研究当系统参数 a 未知时如何实现同步的问题.

设响应系统为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}y_1}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=-(25a+10)y_1\\ &\quad+(25a+10)y_2-u_1(t),\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}y_2}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=(28-35a)y_1\\ &\quad+(29a-1)y_2-y_1y_3-u_2(t),\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}y_3}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=y_1y_2+(a+8)y_3/3-u_3(t),\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\tilde{a}$ 是对未知参数 a 的估计.

定义参数估计误差

$$e_a=\tilde{a}-a, \tag{18}$$

其同步误差为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_1}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=-(25a+10)e_1+(25a+10)e_2\\ &\quad+(-25x_1+25x_2)e_a-u_1(t),\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_2}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=(28-35\tilde{a}-y_3)e_1+(29\tilde{a}-1)e_2-x_1e_3\\ &\quad+(29x_2-35x)e_a-u_2(t),\\ \frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_3}{\mathrm{d}t^{\alpha}}&=y_2e_1+x_1e_2+(a+8)e_3/3\\ &\quad+x_3e_a/3-u_3(t).\end{aligned} \tag{19}$$

该误差系统的整数阶形式为

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t}=-(25a+10)e_1+(25a+10)e_2+(-25x_1+25x_2)e_a-u_1(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t}=(28-35\tilde{a}-y_3)e_1+(29\tilde{a}-1)e_2-x_1e_3+(29x_2-35x)e_a-u_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t}=y_2e_1+x_1e_2+(a+8)e_3/3+x_3e_a/3-u_3(t). \tag{20}$$

根据定理 1，对(20)式设计控制项及未知参数辨识的自适应规则

$$u_1(t)=-25\tilde{a}\ e_1+((-10\tilde{a}+10)-y_3)e_2+y_2e_3,$$
$$u_2(t)=28e_1+29\tilde{a}\ e_2,$$
$$u_3(t)=(\tilde{a}+9)e_3/3,$$
$$\dot{\tilde{a}}=(-25x_1+25x_2)e_1+(29x_2-35x_1)e_2+x_3e_3/3, \tag{21}$$

将(21)式代入(20)式得

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t}=-10e_1+(35\tilde{a}+y_3)e_2-y_2e_2+(-25x_1+25x_2)e_a,$$
$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t}=(-35\tilde{a}-y_3)e_1-e_2-x_1e_3-x_1e_3+(29x_2-35x)e_a,$$
$$\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t}=y_2e_1+x_1e_2-e_3/3+x_3e_a/3. \tag{22}$$

根据(22)式构造 Lyapunov 函数

$$V=x_1^2+x_2^2+x_3^2+e_a^2, \tag{23}$$

求导得

$$\dot{V}=-10x_1^2-x_2^2-x_3^2/3\leqslant 0. \tag{24}$$

将所设计的控制器及参数自适应规则(21)式用于分数阶误差系统(19)得

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_1}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=-10e_1+(35\tilde{a}+y_3)e_2-y_2e_2+(-25x_1+25x_2)e_a,$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_2}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=(-35\tilde{a}-y_3)e_1-e_2-x_1e_3-x_1e_3+(29x_2-35x)e_a,$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}e_3}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=y_2e_1+x_1e_2-e_3/3+x_3e_a/3. \tag{25}$$

根据定理 1，当阶次 α 小于 1 时分数阶误差系统(25)稳定.

4. 数值仿真

基于改进的 Adams-Bashforth-Moulton 理论[14]，文献[15]提出了分数阶混沌系统仿真算法.本文利用该算法对驱动系统和响应系统进行仿真，仿真时，设阶次 $\alpha=0.93$，初始值为 $x_1=0.2$，$x_2=0.21$，$x_3=0.211$，$y_1=2.3$，$y_2=1.2$，$y_3=3.11$，$\tilde{a}=0.03$.

由于驱动系统的未知参数 $a\in(0.8,1)$ 时，分数阶统一混沌系统代表分数阶 Chen 系统；$a=0.8$ 时，分数阶统一混沌系统代表分数阶 Lü 系统；$a\in[0,0.8]$ 时，分数阶统一混沌系统代表分数阶 Lorenz 系统.因而分别对驱动系统的未知参数取 $a=0.4$，$a=0.8$，$a=0.9$ 进行仿真，其仿真结果分别如图 2、图 3 和图 4 所示.

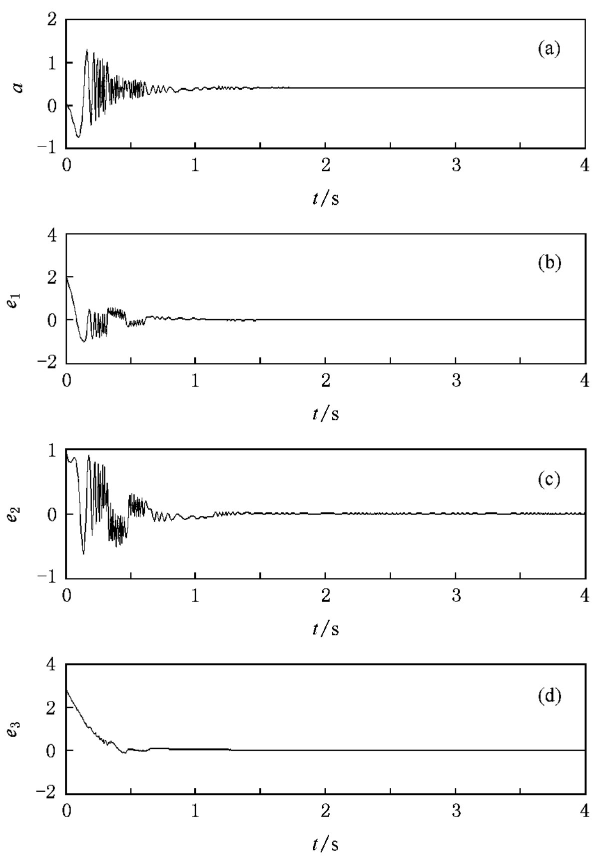

图 2　$a=0.4$ 时，未知参数的估计值及同步误差 e_1，e_2，e_3 随时间演化图分别如(a)，(b)，(c)，(d)所示

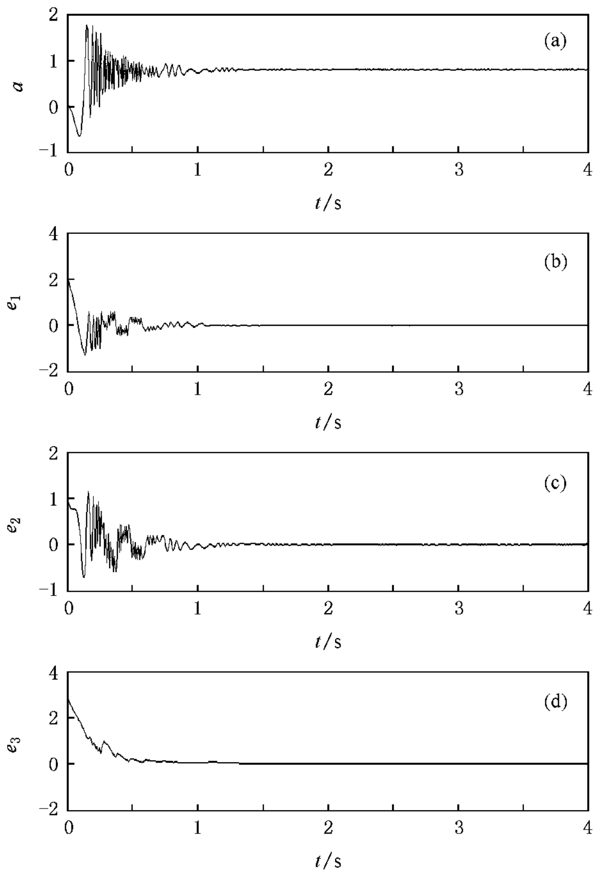

图 3 $a=0.8$ 时,未知参数的估计值及同步误差 e_1,e_2,e_3 随时间演化图分别如(a),(b),(c),(d)所示

图 2、图 3 和图 4 都表明,无论分数阶统一混沌系统代表分数阶 Chen 系统、分数阶 Lü 系统还是分数阶 Lorenz 系统,在参数自适应规则及控制器作用下,驱动系统的未知参数能够准确辨识,驱动系统和响应系统的同步误差也渐近趋于零,也即驱动系统和响应系统实现了同步.仿真结果验证了所提出的理论的正确性.

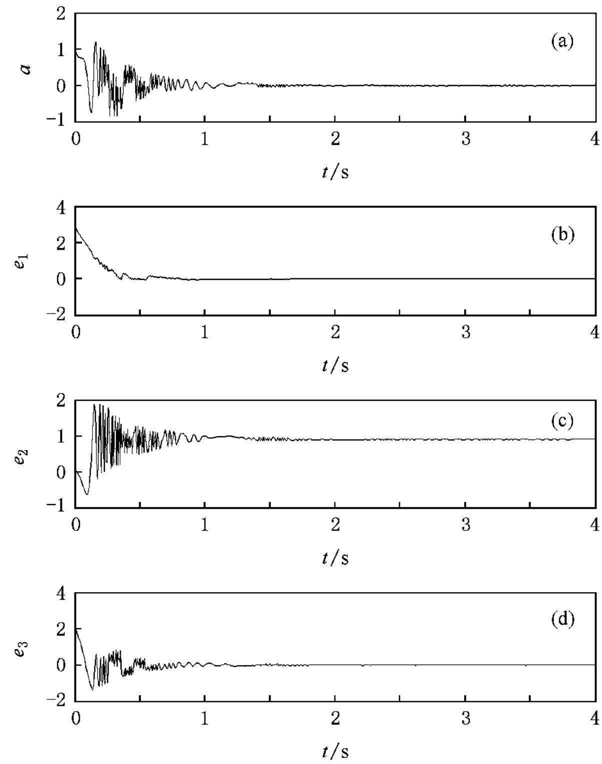

图 4 $a=0.9$ 时,未知参数的估计值及同步误差 e_1,e_2,e_3 随时间演化图分别如(a),(b),(c),(d)所示

5. 结 论

本文提出了根据同构的整数阶系统判定分数阶系统(阶次小于 1)稳定的理论.该理论的成立使分数阶系统的控制与同步可以转化为整数阶来处理,将分数阶混沌系统的控制与同步问题得到简化,为多种整数阶混沌系统的控制与同步方法运用于分数阶系统奠定了理论基础.

[1] Mandelbort B B 1983 *The fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)

[2] Wang Y W, Guan Z H, Xiao J W 2004 *Chaos* **14** 199

[3] Huang L, Feng R, Wang M 2004 *Phys. Lett.* A **32** 271

[4] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 (in Chinese) [张 旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702]

[5] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]

[6] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]

[7] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri 2008 *Physica* A **387** 57

[8] Liu C X *et al* 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **22** 1031

[9] Li A, Chen G R 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **22** 549

[10] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124]

[11] Vedat Suat Erturk, Shaher Momani, Zaid Odibat 2008 *J. cnsns* 1642

[12] Hu J B，Han Y，Zhao L D 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 7522（in Chinese）[胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]

[13] Gao W B 1988 *Introduction of control nonlinear systems*（Science Press）P104—132（in Chinese）[高为炳 1988 非线性控制系统导论(科学出版社)第 104—132 页]

[14] Matignon D 1996 *IMACS*，*IEEE-SMC*，*Lille*（France）

[15] Yan J P，Li C P 2004 *Chaos*，*Solitons and Fractals* **22** 443

A stability theorem about fractional systems and synchronizing fractional unified chaotic systems based on the theorem

Hu Jian-Bing† Han Yan Zhao Ling-Dong

（*Key Laboratory of Instrumentation Science & Dynamic Measurement of Ministry of Education*，*National Key Laboratory For Electronic Measurement Technology*，*North University of China*，*Taiyuan* 030051，*China*）

（Received 30 June 2008；revised manuscript received 8 September 2008）

Abstract

A stability theorem is proposed and proved for fractional system whose order is not greater than 1 according with Lyapunov stability theorem and Lyapunov converse theorem. Using this theorem，fractional unified chaotic systems with unknown parameter are synchronized adaptively. Numerical simulation certifies effectiveness of the theorem.

Keywords：fractional chaotic system，chaos，Lyapunov theorem，Lyapunov converse theorem

PACC：0545

† Corresponding author. E-mail：hjb@nuc.edu.cn