

# 快慢 Lorenz-Stenflo 系统分析\*

韩修静<sup>1)</sup> 江波<sup>1,2)</sup> 毕勤胜<sup>1)†</sup>

1) 江苏大学理学院, 镇江 212013)

2) 江苏技术师范学院数理学院, 常州 213001)

(2008 年 8 月 20 日收到, 2008 年 11 月 25 日收到修改稿)

通过对系统的重新标度, 得到了气流旋转缓慢变化时的 Lorenz-Stenflo 系统, 基于 Routh-Hurwitz 准则, 分析了平衡点的稳定性问题, 得到了参数平面上的分岔集, 这些分岔集将参数平面划分为不同的区域, 在各个不同的区域对应于系统不同的解. 随着参数的变化, 从平衡点分岔出不同的解. 此外, 展示了系统的对称簇发解和对称混沌吸引子, 并用快慢分析法给出了对称簇发解的产生机理.

关键词: Lorenz-Stenflo 系统, 快慢分析法, 分岔, 对称簇发

PACC: 0545

## 1. 引 言

基于 Salzman 等人的工作<sup>[1]</sup>, 1963 年, Lorenz 提出了描述大气热对流过程的三维模型, 即我们通常所说的 Lorenz 系统<sup>[2]</sup>, 发现了其中的混沌现象, 即著名的蝴蝶效应. 随后, Guckenheimer<sup>[3]</sup>, Williams<sup>[4]</sup>, Rand<sup>[5]</sup>等人对 Lorenz 系统的各种特性展开了深入的探讨, 揭示了其动力学行为的演化过程及混沌的产生机制.

随着研究的不断深入, 基于 Lorenz 系统, 人们给出了各种各样的修正模型<sup>[6-12]</sup>, 如 Stenflo 在研究大气低频短波长声重波方程时给出了如下的四维模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) + \gamma w, \\ \dot{y} &= \alpha(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \\ \dot{w} &= -x - \alpha w, \end{aligned} \quad (1)$$

即 Lorenz-Stenflo 模型<sup>[13]</sup>, 其中新增的状态变量  $w$  描述气流的旋转, 新增参数  $\gamma (> 0)$  是与  $w$  相对应的旋转数 (rotation number), 其他参数  $\alpha (> 0)$ ,  $r (> 0)$ ,  $\beta (> 0)$  分别表示普朗特数 (Prandtl number), 瑞利数 (Rayleigh number) 和几何参数 (geometric parameter).

在小旋转数  $\gamma$  的条件下, 随着瑞利数  $r$  的变

化, 该系统的分岔结构和 Lorenz 系统是相近的<sup>[14]</sup>; 另外若将旋转数  $\gamma$  视为分岔参数, 那么随着  $\gamma$  的变化, 该系统的分岔结构与一维 logistic 映射非常相似<sup>[15]</sup>. 在大旋转数  $\gamma$  的条件下, Lorenz-Stenflo 系统具有比 Lorenz 系统更丰富的动力学行为, 另外旋转数可以用来控制调整 Lorenz 系统的混沌行为<sup>[16]</sup>.

迄今为止, 大部分的工作都基于气流的旋转变量  $w$  与其他状态变量在同一尺度下的行为, 而在实际情况下处于高层次系统<sup>[17, 18]</sup> 气流旋转的变化通常比较缓慢, 即存在着两种广义无量纲时间尺度的行为. 对于这种不同时间尺度的耦合行为, 目前还没有比较深入的工作. 本文正是基于这样的背景探讨小旋转数  $\gamma$  的条件下, 快慢 Lorenz-Stenflo 系统的动力学行为.

## 2. 分岔分析

考虑到高层气流旋转的缓慢变化, 此时的 Lorenz-Stenflo 系统中存在着两种不同的时间尺度, 即与状态变量  $x, y, z$  相关的快时间尺度  $T_1$  和与状态变量  $w$  相关的慢时间尺度  $T_2 = \epsilon T_1$ . 通过对原系统的重新标度, 即令  $T_1 = t, T_2 = \epsilon t$ , 可以得到如下三快一慢系统:

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10872080, 10602020) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) + \gamma w, \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \\ \dot{w} &= \epsilon(-x - \alpha w), \end{aligned} \tag{2}$$

即快慢 Lorenz-Stenflo 系统,其中  $\alpha (> 0), \gamma (> 0), r (> 0), \beta (> 0)$  含义同前.  $\rho \in \epsilon \ll 1$  为系统小参数. 为了便于讨论,我们将快子系统和慢子系统分别记为  $(x, y, z)(w)$ ;同时设定参数  $\epsilon = 0.01, r = 26, \beta = 0.7$ .

系统 (2) 在变换  $M(x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, z, -w)$  下形式保持不变,即系统具有关于  $z$  轴的对称性. 显然系统 (2) 总存在一个平衡点  $O(0, 0, 0, 0)$ , 系统 (2) 在该点处的线性化系统所对应的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \gamma \\ 26 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ -0.01 & 0 & 0 & -0.01\alpha \end{pmatrix},$$

其对应的特征方程为

$$F_o(\lambda) = (\lambda + 0.7)\lambda^3 + p_1^o\lambda^2 + p_2^o\lambda + p_3^o = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} p_1^o &= 1 + 1.01\alpha, \\ p_2^o &= 0.01\alpha^2 - 24.99\alpha + 0.01\gamma, \\ p_3^o &= 0.01(\gamma - 25\alpha^2), \end{aligned}$$

于是可得  $\lambda_1 = -0.7 < 0$ . 令

$$f(\lambda) = \lambda^3 + p_1^o\lambda^2 + p_2^o\lambda + p_3^o,$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知方程  $f(\lambda) = 0$  的所有根均具有负实部的充分必要条件是 不等式组  $p_1^o > 0, p_3^o > 0, p_1^o p_2^o - p_3^o > 0$  成立. 显然恒有  $p_1^o > 0$ , 当  $\gamma > 25\alpha^2$  时,  $p_3^o > 0$ ; 当  $\gamma > -\alpha^2 + 2473.257426\alpha + 2474.257426$  时,  $p_1^o p_2^o - p_3^o = \alpha(0.0101\alpha^2 - 24.9799\alpha - 24.99 + 0.0101\gamma) > 0$ . 于是可知当  $\gamma > \max\{25\alpha^2, -\alpha^2 + 2473.257426\alpha + 2474.257426\}$  时, 方程  $f(\lambda) = 0$  的所有根均具有负实部, 从而特征方程  $F_o(\lambda) = 0$  的所有根均具有负实部, 于是此时原点  $O$  是渐近稳定的, 从而是稳定的.

当  $\gamma < 25\alpha^2$ , 即  $p_3^o < 0$  时, 方程  $f(\lambda) = 0$  存在正实根, 从而特征方程  $F_o(\lambda) = 0$  存在正实根, 于是此时原点  $O$  是不稳定的; 当  $\gamma = 25\alpha^2$ , 即  $p_3^o = 0$  时, 可求得  $f(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + p_1^o\lambda + p_2^o) = 0$  的三个根分别为  $0, \frac{-(1 + 1.01\alpha) \pm \sqrt{(1 + 1.01\alpha)^2 - 4(0.26\alpha^2 - 24.99\alpha)}}{2}$

(当  $\Delta > 0$  时). 于是当  $0 < \alpha < \frac{2499}{26}$  时, 方程  $f(\lambda) = 0$  存在正实根

$$\frac{-(1 + 1.01\alpha) + \sqrt{(1 + 1.01\alpha)^2 - 4(0.26\alpha^2 - 24.99\alpha)}}{2},$$

从而特征方程  $F_o(\lambda) = 0$  存在正实根, 于是此时原点  $O$  也是不稳定的. 而我们讨论的是小旋转数  $\gamma (\gamma < 25)$  下系统的动力学行为, 所以就我们讨论的情形而言, 当  $\gamma = 25\alpha^2$  时 (此时  $0 < \alpha < 1$ ) 原点  $O$  总是不稳定的; 另外, 当  $\gamma > 25\alpha^2$  时, 就我们讨论的情形而言, 总有  $p_1^o p_2^o - p_3^o = \alpha(0.0101\alpha^2 - 24.9799\alpha - 24.99 + 0.0101\gamma) < 0$ , 于是由 Routh-Hurwitz 准则可知方程  $f(\lambda) = 0$  至少存在一个非负实部的根, 即零根, 纯虚根或正实部的根. 显然此时  $f(\lambda) = 0$  不存在零根, 而若方程  $f(\lambda) = 0$  存在纯虚根, 不妨设其为  $aI (a > 0, I = \sqrt{-1})$ , 将其代入方程  $f(\lambda) = 0$  整理可得  $p_3^o - p_1^o a^2 + \alpha(p_2^o - a^2)I = 0$ . 于是  $a^2 = p_2^o, p_3^o - p_1^o a^2 = p_3^o - p_1^o p_2^o = 0$ , 这与  $p_1^o p_2^o - p_3^o = \alpha(0.0101\alpha^2 - 24.9799\alpha - 24.99 + 0.0101\gamma) < 0$  矛盾. 所以方程  $f(\lambda) = 0$  至少存在一个实部为正数的根, 从而可知此时原点是不稳定的. 综上可知, 就我们讨论的参数范围而言, 原点  $O$  始终是不稳定的.

另一方面, 当  $25\alpha^2 > \gamma$  时, 原点由树枝分岔产生了另外两个关于  $z$  轴对称的奇点  $E_1(x_0, y_0, z_0, w_0), E_2(-x_0, -y_0, z_0, -w_0)$  其中

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{0.7(25\alpha^2 - \gamma)(\alpha^2 + \gamma)}, \\ y_0 &= \sqrt{0.7(25\alpha^2 - \gamma)(\alpha^2 + \gamma)}\alpha^2, \\ z_0 &= (25\alpha^2 - \gamma)\alpha^2, \\ w_0 &= -\sqrt{0.7(25\alpha^2 - \gamma)(\alpha^2 + \gamma)}. \end{aligned}$$

注意到奇点  $E_1, E_2$  是对称的, 可求知系统在  $E_1, E_2$  处的线性化系统所对应的特征方程为

$$F_1(\lambda) = \lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.7 + 1.01\alpha, \\ p_2 &= \frac{0.7(25\alpha^2 - \gamma)}{\alpha^2 + \gamma} + \frac{25\alpha^2 - \gamma}{\alpha} \\ &\quad + 0.01\alpha^2 - 24.283\alpha + 0.01\gamma + 0.7, \\ p_3 &= \frac{0.707\alpha(25\alpha^2 - \gamma)}{\alpha^2 + \gamma} + \frac{1.4(25\alpha^2 - \gamma)}{\alpha} \\ &\quad + 0.007\alpha^2 - 17.493\alpha + 0.007\gamma, \\ p_4 &= 0.014(25\alpha^2 - \gamma). \end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知, 特征方程  $F_1(\lambda) = 0$  的

所有根均具有负实部的充分必要条件是下列不等式成立：

$$\begin{aligned}
p_1 &> 0, \\
p_1 p_2 - p_3 &> 0, \\
p_1 p_2 p_3 - p_3^2 - p_1^2 p_4 &> 0, \\
p_1 p_2 p_3 p_4 - p_3^2 p_4 - p_1^2 p_4^2 &> 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

于是当(3)式满足时,对称奇点  $E_1, E_2$  是渐近稳定的,从而是稳定的.

通过分析,我们可以得到全系统关于参数  $\alpha, \gamma$  的分岔集(图1).其中, BP 是原点  $O$  的树枝分岔曲线  $\gamma = 25\alpha^2$ , H 是对称奇点  $E_1, E_2$  的 Hopf 分岔曲线.由前面的理论分析可知,当参数处于①②③三个区域时,原点  $O$  都是不稳定的;另外,由(3)式分析可知,区域②中对称奇点  $E_1, E_2$  是稳定的(图 2(a), (b)),当参数从该区穿过 Hopf 分岔曲线 H 进入③区

时,对称奇点  $E_1, E_2$  失稳,并由 Hopf 分岔产生了一个稳定的极限环(图 2(c)).

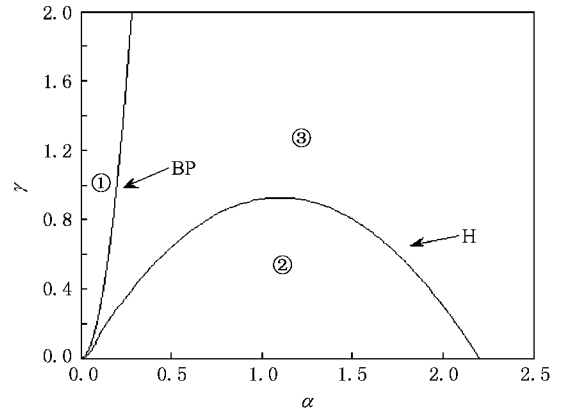


图1  $\alpha$ - $\gamma$  平面上的分岔集

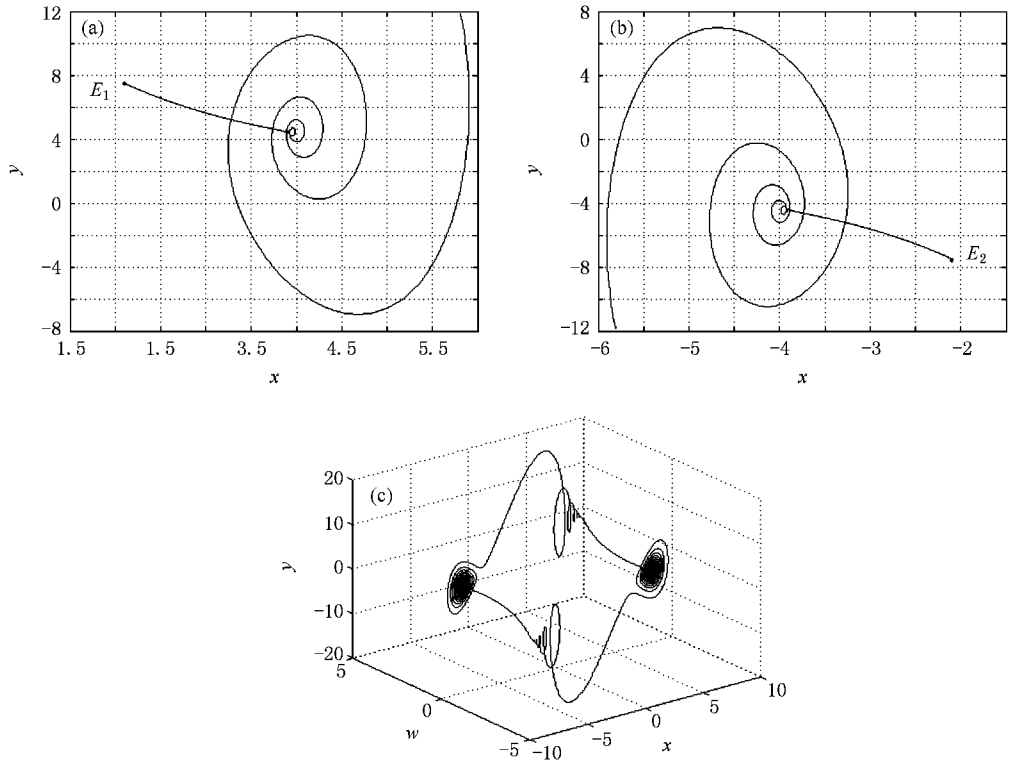


图2 区域②③中的相描述 (a)(b)②区中对称奇点  $E_1, E_2$  ( $\alpha = 0.5, \gamma = 0.64$ ) (c)③区中极限环 ( $\alpha = 0.5, \gamma = 0.67$ )

### 3. 慢变效应下的对称簇发解及对称混沌吸引子

定参数  $\gamma = 1.5$ , 变动参数  $\alpha$ . 图 3 给出的是系统(2)典型的动力学行为,其中(a)(b)(c)是周期的,(d)是混沌的,它们都是自对称的.

Rinzel 和 Ermentrout<sup>[19]</sup>提出了快慢分析法,解释了神经元的簇放电(bursting)现象.下面我们用

为了进一步揭示系统(2)的动力学行为,我们固

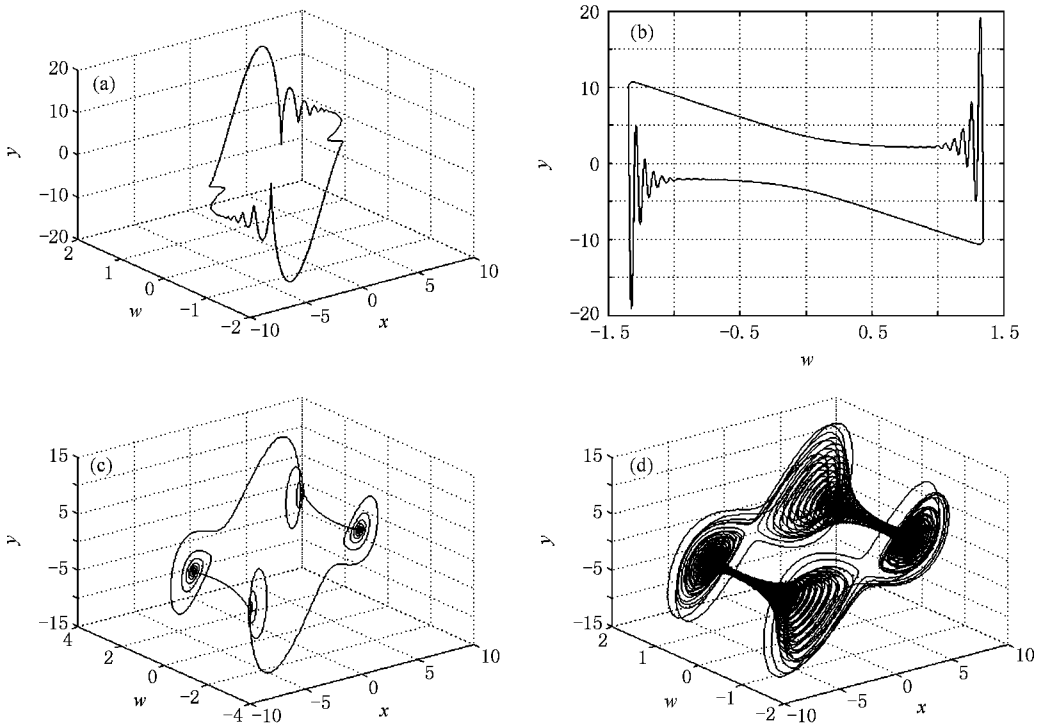


图 3 (a)  $\alpha = 0.2$  时  $x-w-y$  空间相投影 (b)  $\alpha = 0.2$  时  $w-y$  平面相投影 (c)  $\alpha = 0.84$  时  $x-w-y$  空间相投影 (d)  $\alpha = 2.2$  时  $x-w-y$  空间相投影

该方法研究快慢系统(2)的动力学行为.我们将慢变量  $w$  视为快子系统  $(x, y, z)$  的分岔参数,慢变参数  $w$  调节控制系统的行为.图 4(a)给出的是  $\gamma = 1.5$ ,  $\alpha = 0.2$  时,快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析.倒 Z 形曲线由实线和虚线两部分组成,分别表示稳定和不稳定的平衡点.  $SH_1, SH_2$  表示平衡点的亚临界 Hopf 分岔,分岔值分别为  $w_{SH_1} = -1.1791, w_{SH_2} = 1.1791$ ;  $LP_1, LP_2$  表示平衡点 Fold<sup>[20]</sup> 分岔,分岔值分别为  $w_{LP_1} = -1.3427, w_{LP_2} = 1.3427$ .

不妨认为系统从轨线下半支  $w = 1.2$  处(位于  $SH_2, LP_2$  两分岔点之间)出发,由  $y$  的时间历程(图 5(a))我们可以确定全系统的轨线沿逆时针方向运动(图 4(b)),从而此时参数  $w$  沿增长的方向运动.由图 4(b)可知,当参数  $w$  增加到 Fold 分岔值  $w_{LP_2} = 1.3427$  时,系统因 Fold 分岔从平稳运动转向周期运动,这时系统处于轨线上半支,参数开始减小.随着参数的减小,系统周期运动的振幅逐渐减小,但由于慢过效应(slow passage effect)<sup>[20]</sup>,系统在微小振幅的

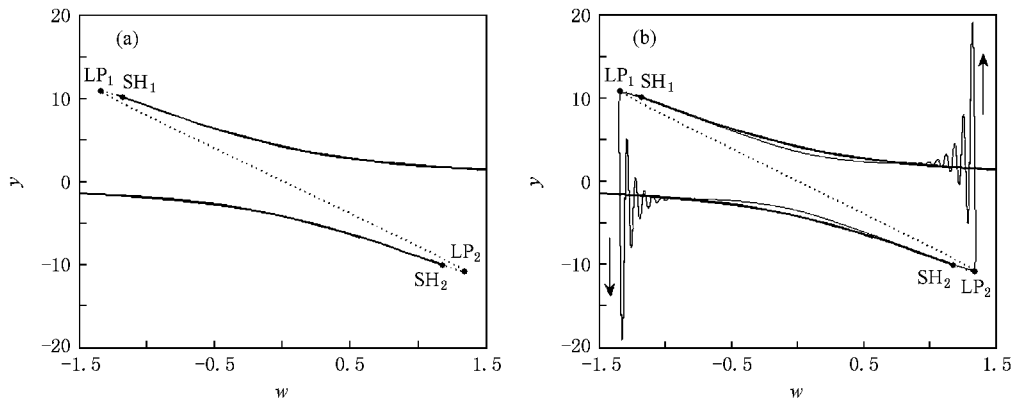


图 4 (a) 快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析 (b) 快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔图与  $w-y$  平面相图的叠加

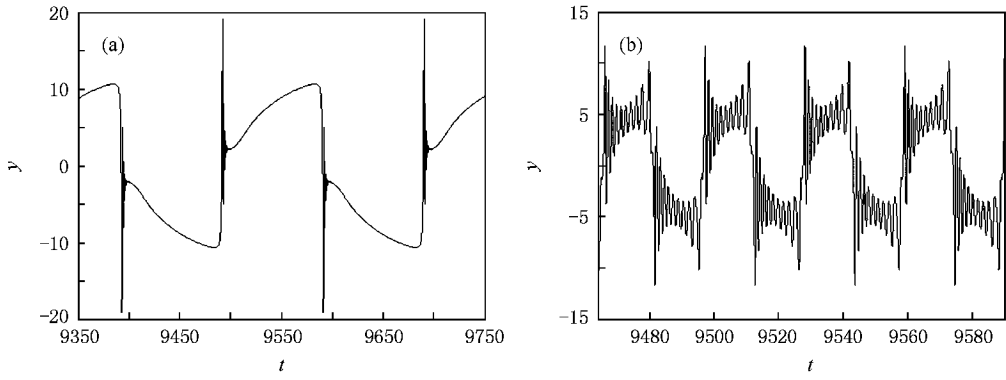


图 5 (a)  $\gamma = 1.5$   $\alpha = 0.2$  时  $y$  的时间历程 (b)  $\gamma = 22$   $\alpha = 1.9$  时  $y$  的时间历程

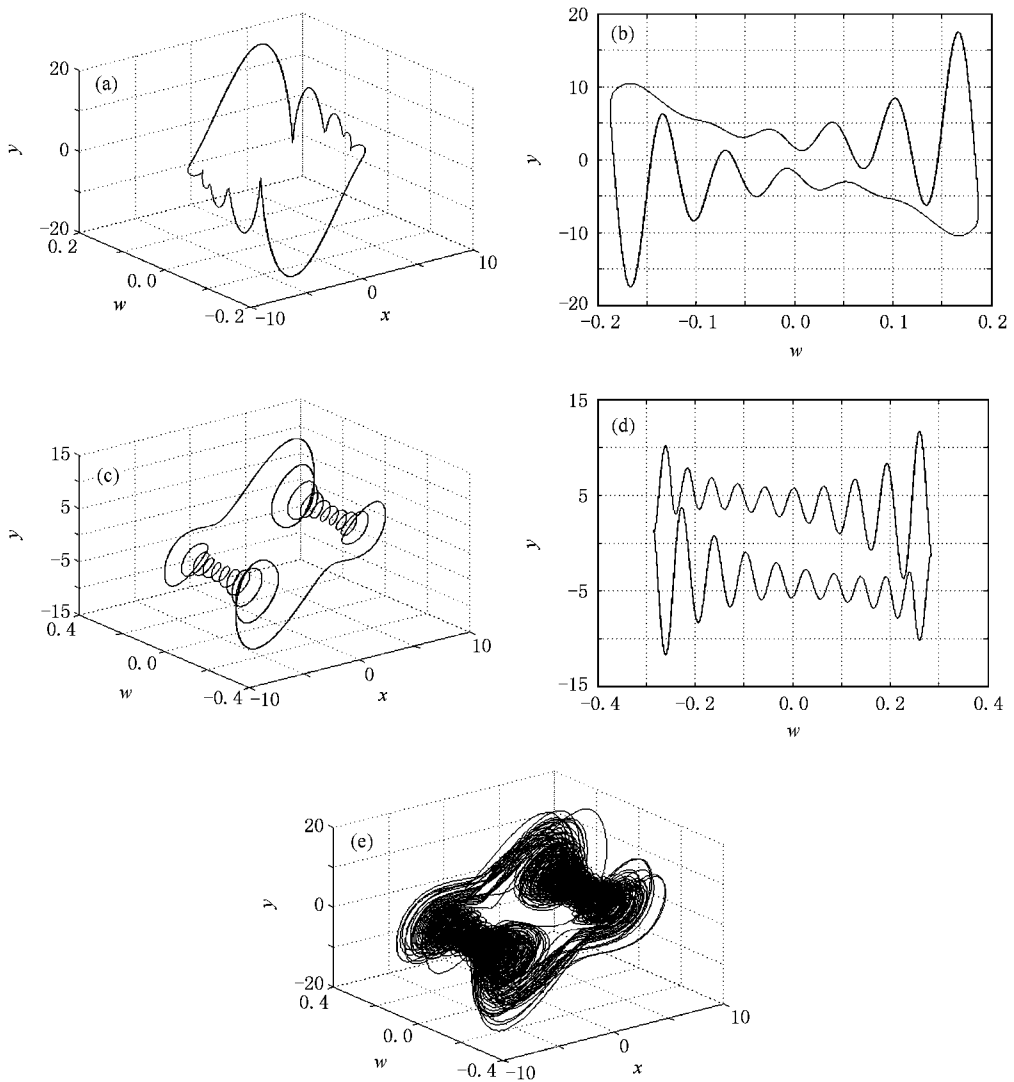


图 6 (a)  $\alpha = 0.4$  时  $x-w-y$  空间相投影 (b)  $\alpha = 0.4$  时  $w-y$  平面相投影 (c)  $\alpha = 1.9$  时  $x-w-y$  空间相投影 (d)  $\alpha = 1.9$  时  $w-y$  平面相投影 (e)  $\alpha = 1.95$  时  $x-w-y$  空间相投影

周期运动上持续了较长的一段时间,直到参数递减 到亚临界 Hopf 分岔值  $w_{SH_1} = -1.1791$  时,系统才由

周期运动转向平稳运动. 参数  $w$  仍在不断递减, 当参数递减到  $w_{LP_1} = -1.3427$  时, 系统又因 Fold 分岔转向周期运动. 此时系统处于轨线下半支, 于是参数开始增加. 同样的, 由于慢过效应, 当参数增加到  $w_{SH_2} = 1.1791$  时, 系统才发生亚临界 Hopf 分岔, 恢复了平稳运动. 直到参数增加至 1.2 时, 系统完成了一个周期的运动.

这种周期解的产生机理和 Fold/SubHopf Bursting<sup>[20]</sup>的产生机理非常相似, 不同之处在于该周期解本身具有自对称结构, 因而 Fold 分岔和

SubHopf 分岔都发生了两次, 我们不妨称之为对称式 Fold/SubHopf Bursting.

固定参数  $\gamma = 22$ , 变动参数  $\alpha$ , 图 6 给出的是系统 (2) 在另一组参数下的典型的动力学行为, 其中 (a)(b)(c)(d) 是周期的 (e) 是混沌的, 它们也都是自对称的. 对于图 6(a)(b):  $\gamma = 22, \alpha = 0.4$  时的情形, 其产生机理和  $\gamma = 1.5, \alpha = 0.2$  时的情形相同, 可用快慢分析法类似处理. 下面考虑图 6(c), (d):  $\gamma = 22, \alpha = 1.9$  时的情形.

图 7(a) 给出的是  $\gamma = 22, \alpha = 1.9$  时, 快子系统

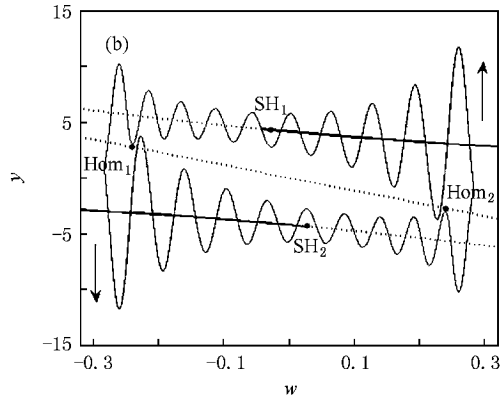
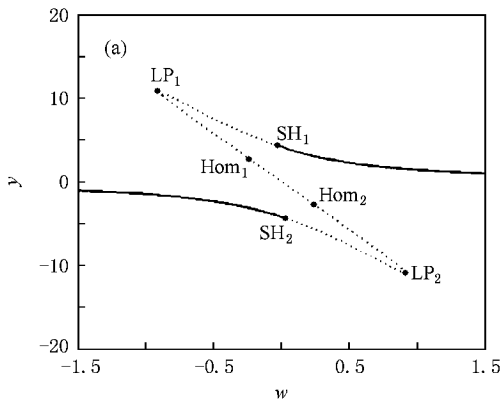


图 7 (a) 快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析 (b) 快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔图与  $w$ - $y$  平面相图的叠加

$(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析. 倒 Z 形曲线由实线和虚线两部分组成, 亦表示稳定和不安定的平衡点.  $SH_1, SH_2, LP_1, LP_2$  含义同前, 对应的分岔值分别为  $w_{SH_1} = -0.0408, w_{SH_2} = 0.0408, w_{LP_1} = -0.8697, w_{LP_2} = 0.8697$ ;  $Hom_1, Hom_2$  表示极限环的鞍点同宿分岔, 分岔值分别为  $w_{Hom_1} = -0.2408, w_{Hom_2} = 0.2408$ . 类似的, 由  $y$  的时间历程(图 5(b))可知, 全系统的轨线沿逆时针方向运动(图 7(b)). 起初, 系统在一个极限环上周期运动, 当参数  $w$  运动到极限环的鞍点同宿分岔值时, 系统因极限环的鞍点同宿分岔从一个极限环跳到了另一个极限环上继续做周期运动. 如此随着慢变参数  $w$  的不断调节, 系统在两个极限环之间来回跳动(图 6(c)), 具体的可仿  $\gamma = 1.5, \alpha = 0.2$  时的情形描述分析. 由这

种分岔机理产生的簇发解称为同宿/同宿簇发 (Homoclinic/Homoclinic Bursting<sup>[20]</sup>).

### 4. 结 论

对于气流的旋转缓慢变化下的 Lorenz-Stenflo 系统, 我们分析了原点及对称奇点的稳定性问题, 并得到了系统的分岔集; 它将参数平面划分为不同的区域. 我们分析并用数值方法验证了参数在各个区域之间变化时系统的分岔行为. 另外, 当气流的旋转缓慢变化时, 由于慢尺度对系统行为的不断调节, 系统会交替进行着不同的运动形式, 如平衡与周期运动, 以及在两个极限环之间来回跳动, 从而系统表现出了除了混沌以外的比较复杂的行为.

- [ 1 ] Salzman B 1962 *J. Atmos. Sci.* **19** 239
- [ 2 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 3 ] Guckenheimer J 1979 *Comm. Math. Phys.* **70** 133
- [ 4 ] Williams R F 1979 *Publ. Math. IHES* **50** 101
- [ 5 ] Rand D A 1978 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **83** 451
- [ 6 ] Chen G R ,Ueta T 1999 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [ 7 ] Lü J H ,Chen G R 2002 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [ 8 ] Liu W B ,Chen G R 2003 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **13** 261
- [ 9 ] Qi G Y ,Chen G R ,Du S Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [ 10 ] Wang G Y ,Zheng Y ,Liu J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3113 ( in Chinese ) [ 王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113 ]
- [ 11 ] Wang X Y ,Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 ( in Chinese ) [ 王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136 ]
- [ 12 ] Cang S J ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 ( in Chinese ) [ 仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493 ]
- [ 13 ] L Stenflo 1996 *Phys. Scr.* **53** 83
- [ 14 ] Yu M Y ,Yang B 1996 *Phys. Scr.* **54** 140
- [ 15 ] Yu M Y ,Zhou C T ,Lai C H 1996 *Phys. Scr.* **54** 321
- [ 16 ] Zhou C T ,Lai C H ,Yu M Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 5225
- [ 17 ] Yang P C ,Bian J C ,Wang G L ,Zhou X J 2003 *Chinese Science Bulletin* **48** 1470 ( in Chinese ) [ 杨培才、卞建春、王革丽、周秀骥 2003 科学通报 **48** 1470 ]
- [ 18 ] Zhang W ,He W P ,Zhou M W ,Feng G L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6150 ( in Chinese ) [ 张 文、何文平、邹明玮、封国林 2007 物理学报 **56** 6150 ]
- [ 19 ] Rinzel J ,Ermentrout 1989 *Method in Neuronal Modeling ed Koch C and Segev I* ( Cambridge :The MIT Press ) chaper :Analysis of neural excitability and oscillations
- [ 20 ] Izhikevich E M 2000 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **10** 1171

## Analysis of the fast-slow Lorenz-Stenflo system <sup>\*</sup>

Han Xiu-Jing<sup>1)</sup> Jiang Bo<sup>1,2)</sup> Bi Qin-Sheng<sup>1)†</sup>

<sup>1)</sup> Faculty of Science ,Jiangsu University ,Zhenjiang 212013 ,China )

<sup>2)</sup> School of Mathematics and Physics ,Jiangsu Teachers University of technology ,Changzhou 213001 ,China )

( Received 20 August 2008 ; revised manuscript received 25 November 2008 )

### Abstract

By rescaling the system ,we obtain the Lorenz-Stenflo system with slow variation of the flow rotation. Based on Routh-Hurwitz criteria ,the stabilities of the equilibria are analyzed and the bifurcation sets are sought to divide the parameter plane into different regions ,corresponding to different types of the solutions. Different types of the solutions may bifurcate from the equilibria with the chang of the parameters. Furthermore ,the symmetric bursting and the symmetric chaos are presented ,and the mechanism of the symmetric bursting is explored by the method of slow-fast analysis.

**Keywords :** Lorenz-Stenflo system , slow-fast analysis , bifurcation , symmetric bursting

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10872080 ,10602020 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : qbi@ujs.edu.cn