第 58 卷 第 7 期 2009 年 7 月
1000-3290/2009/58(07)/4415-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.7,July,2009

一类延迟混沌系统沿主轴方向上 Lyapunov 指数的计算方法*

张晓丹† 刘 翔‡ 赵品栋

(北京科技大学应用科学学院,北京 100083)

(2008 年 8 月 30 日收到;2008 年 12 月 2 日收到修改稿)

提出了一种计算延迟混沌系统沿主轴方向上 Lyapunov 指数的方法:矩阵迭代法.给出了其计算方法的原理及推导过程;同时推导了一类泰勒展开法,介绍了已有的 Wolf 替代法计算延迟混沌系统的 Lyapunov 指数.分析了三种不同计算方法的优缺点,最后进行了数值模拟,验证方法的有效性.

关键词:Lyapunov 指数,延迟混沌系统,矩阵迭代法,泰勒展开法
PACC:0545

1. 引 言

混沌是指在确定性系统中出现的一种貌似无规则、类似随机的现象,是普遍存在的复杂运动形式和自然现象.近年来,在混沌判定、混沌控制、混沌反控制、混沌同步、超混沌以及分数阶混沌等方面的研究不断加深[1—11].这其中,研究延迟动力学系统的混沌行为也成为热点[12].现代动力学表现出一个非常明显的特征,那就是各种真实的系统都可能具有明显的延迟效应.在过去的处理中,人们常常忽略延迟并解决了许多问题,但随着对系统动力学行为要求越来越精确化,就需要考虑延迟对系统的影响.已经有结果表明,即使是毫秒级的延迟也会导致系统复杂的动力学行为.判定一个动力学系统是否具有混沌特性,计算其 Lyapunov 指数是基本的研究方法.Lyapunov 指数量化了混沌系统对于初始值的敏感性这一特征,从系统的最大 Lyapunov 指数是否大于零,就可以判定出系统是否存在着混沌[13].

对于普通混沌系统的 Lyapunov 指数计算已经有很多研究[14],而对于延迟混沌系统仍没有统一的计算方法.这是由于延迟动力系统的运动不仅依赖于当前的系统状态,而且与过去一段时间的系统状态有关,延迟的出现使系统在平衡点附近的线性近似系统的特征方程由一般的代数方程变为超越方程,特征根也由有限个变为无限多个,因而对延迟动力系统研究的难度大大增加.

本文考察如下延迟动力系统:

$$\dot{X} = f(X) + g(X(t-\tau)), \tag{1}$$

其中,$X\in R^n$,$\tau\in R$ 为延迟时间,$g(X(t-\tau))$为延迟项.

对于延迟动力系统,由于初始条件是一个时间段上的连续函数,其任意性使得延迟动力系统 Lyapunov 指数的个数在理论上应该是无穷多个.本文讨论延迟系统沿主轴方向上的 Lyapunov 指数,这样 n 维动力系统将有 n 个 Lyapunov 指数.

2. Lyapunov 指数计算

2.1. 矩阵迭代法

首先考虑如下 n 维离散动力系统:

$$X_{k+1} = F(X_k), \tag{2}$$

设 $\{X_k\}$是该系统的一条轨道,ΔX_k 为偏离该轨道的一微小量.则 ΔX_k 的演化满足

* 国家自然科学基金(批准号:70271068)资助的课题.

† E-mail:bkdzxd@163.com

‡ E-mail:liuxiang6@yahoo.com.cn

$$\Delta X_{k+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\bigg|_{X=X_k}\right)\Delta X_k = J_k \Delta X_k,$$

其中,J_k 为 F 在 X_k 处的 Jacobian 矩阵. 于是,可以得出

$$\Delta X_{k+1} = J_k J_{k-1}\cdots J_1 \Delta X_1 = J^{(k)}\Delta X_1,$$

这里 $J^{(k)} = J_k J_{k-1}\cdots J_1$.

定义 1[14] 对于 n 维离散动力系统(2),$J^{(k)}$ 如上定义(即 $J^{(k)} = J_k J_{k-1}\cdots J_1$). 设

$$T(X) = \lim_{k\to\infty}((J^{(k)})^{\mathrm{T}} J^{(k)})^{\frac{1}{2k}},$$

则 $T(X)$ 是一个正定矩阵,设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ 为 $T(X)$ 的 n 个特征值. 则系统(2)的第 i 个 Lyapunov 指数为

$$\sigma_i = \ln\lambda_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

类似地,考虑如下离散延迟动力系统

$$X_{k+1} = F(X_k) + G(X_{k-m+1}), \tag{3}$$

其中 $\{X_k\}$ 是该系统的一条轨道,k,m 代表该轨道的第 k,m 个状态的标号且均为整数,ΔX_k 为偏离该轨道的一微小量. 则 ΔX_k 的演化满足

$$\begin{aligned}\Delta X_{k+1} &= \left(\frac{\partial F}{\partial X}\bigg|_{X=X_k}\right)\Delta X_k \\ &\quad + \left(\frac{\partial G}{\partial X}\bigg|_{X=X_{k-m+1}}\right)\Delta X_{k-m+1} \\ &= J_{k,1}\Delta X_k + J_{k,2}\Delta X_{k-m+1},\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $J_{k,1}$ 为 F 在 X_k 处的 Jacobian 矩阵,$J_{k,2}$ 为 G 在 X_{k-m+1} 处的 Jacobian 矩阵.

根据(4)式得到

$$\begin{aligned}\Delta X_{k+1} &= J_{k,1}\Delta X_k + J_{k,2}\Delta X_{k-m+1},\\ \Delta X_{k+2} &= J_{k+1,1}\Delta X_{k+1} + J_{k+1,2}\Delta X_{k-m+2}\\ &= J_{k+1,1}J_{k,1}\Delta X_k + J_{k+1,1}J_{k,2}\Delta X_{k-m+1}\\ &\quad + J_{k+1,2}\Delta X_{k-m+2},\\ \Delta X_{k+3} &= J_{k+2,1}J_{k+1,1}J_{k,1}\Delta X_k\\ &\quad + J_{k+2,1}J_{k+1,1}J_{k,2}\Delta X_{k-m+1}\\ &\quad + J_{k+2,1}J_{k+1,2}\Delta X_{k-m+2} + J_{k+2,2}\Delta X_{k-m+3},\\ &\quad\cdots\\ \Delta X_{k+m} &= J_{k+m-1,1}J_{k+m-2,1}\cdots J_{k,1}\Delta X_k\\ &\quad + J_{k+m-1,1}J_{k+m-2,1}\cdots J_{k+1,1}J_{k,2}\Delta X_{k-m+1}\\ &\quad + \cdots + J_{k+m-1,1}J_{k+m-2,2}\Delta X_{k-1}\\ &\quad + J_{k+m-1,2}\Delta X_k.\end{aligned}$$

令 $\Delta\Omega_{k+1} = (\Delta X_{k+1} \quad \Delta X_{k+2} \quad \cdots \quad \Delta X_{k+m-1} \quad \Delta X_{k+m})^T$,则有如下关系式:

$$\Delta\Omega_{k+1} = H_k\Delta\Omega_{k-m+1},\ k = m,2m,3m,\cdots, \tag{5}$$

其中

$$H_k = \begin{pmatrix} J_{k,2} & 0 & \cdots & 0 & J_{k,1}\\ J_{k+1,1}J_{k,2} & J_{k+1,2} & \cdots & 0 & J_{k+1,1}J_{k,1}\\ & & \ddots & & \\ J_{k+m-2,1}\cdots J_{k+1,1}J_{k,2} & J_{k+m-2,1}\cdots J_{k+2,1}J_{k+1,2} & \cdots & J_{k+m-2,2} & J_{k+m-2,1}\cdots J_{k,1}\\ J_{k+m-1,1}\cdots J_{k+1,1}J_{k,2} & J_{k+m-1,1}\cdots J_{k+2,1}J_{k+1,2} & \cdots & J_{k+m-1,1}J_{k+m-2,2} & J_{k+m-1,1}\cdots J_{k,1} + J_{k-m-1,2}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

反复递推(5)式,可以得出

$$\Delta\Omega_{k+1} = H_k H_{k-m}\cdots H_{2m}H_m\Delta\Omega_1,$$
$$k = m,2m,3m,\cdots.$$

记 $H^{(k)} = H_k H_{k-m}\cdots H_{2m}H_m$,则有

$$\Delta\Omega_{k+1} = H^{(k)}\Delta\Omega_1. \tag{7}$$

定义 2 对于 n 维离散延迟动力系统(3),记 $H^{(k)} = H_k H_{k-m}\cdots H_{2m}H_m$. H_k 如(6)定义,设 $T(X) = \lim\limits_{k\to\infty}((H^{(k)})^{\mathrm{T}}H^{(k)})^{\frac{1}{2k}}$,则 $T(X)$ 是一个正定矩阵,设 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{mn}$ 为 $T(X)$ 的 mn 个特征值. 则系统(3)沿主轴方向上的第 i 个 Lyapunov 指数为

$$\sigma_i = \ln\max_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_{(j-1)n+i} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

定理 1 设定义 2 中 $H^{(k)}$ 的奇异值为 η_j $(j = 1,2,\cdots,mn)$,则系统(3)沿主轴方向上的 Laypunov 指数为

$$\sigma_i = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\ln\max_{1\leqslant j\leqslant m}\eta_{(j-1)n+i} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

证明 设 $H^{(k)}$ 的奇异值分解式为 $H^{(k)} = V_k S_k U_k$,其中,V_k,U_k 为正交矩阵,$S_k = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{mn})$,则 $(H^{(k)})^{\mathrm{T}}H^{(k)} = (U_k)^{\mathrm{T}}S_k^2 U_k$,令 $T_k = ((H^{(k)})^{\mathrm{T}}H^{(k)})^{\frac{1}{2k}}$,则 $T_k^{2k} = (U_k)^{\mathrm{T}}S_k^2U_k$,即 T_k^{2k} 与 S_k^2 相似,有相同的特征值. 而 $S_k^2 = \mathrm{diag}(\eta_1^2, \eta_2^2, \cdots, \eta_{mn}^2)$. 故 T_k^{2k} 的特征值为 η_j^2 $(j = 1,2,\cdots,mn)$,从而 T_k 的特征值为 $\eta_j^{1/k}$ $(j = 1,2,\cdots,mn)$. 由定义 2 知,系统(3)沿主轴方向上的第 i 个 Lyapunov 指数为

$$\sigma_i = \ln\left(\max_{1\leqslant j\leqslant m}\eta_{(j-1)n+i}\right)^{1/k} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即

$$\sigma_i = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\ln\max_{1\leqslant j\leqslant m}\eta_{(j-1)n+i} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

以上考虑的是离散延迟动力系统，对于连续延迟系统(1)，可先对系统离散化，例如，采用欧拉离散方法：

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t-\tau)) \approx \frac{X(t+h)-X(t)}{h}, \tag{8}$$

对时间$[0,t]$进行等距分割：$0<h<2h<\cdots<t$，$h=\frac{\tau}{m-1}$，记 $X_k = X(kh)$　$(k=0,1,\cdots)$. 则(8)式变为形如(3)式的离散延迟系统

$$\begin{aligned} X_{k+1} &\approx X_k + f(X_k)\cdot h + g(X_{k-m+1})\cdot h \\ &= f_1(X_k) + g_1(X_{k-m+1}). \end{aligned}$$

根据定义 2 和定理 1 可以计算连续系统的 Lyapunov 指数.

对于非延迟系统，其在某一时刻的状态就可确定下一时刻的状态；而延迟系统要复杂得多，此时刻的状态不仅与前一时刻的状态有关，而且还与前 $\tau+1$ 时刻的状态有关. 由(5)式，延迟系统的状态变化可以理解为系统在某个时间段的状态可以确定下一时间段的状态.

本算法对系统延迟项的形式没有限制，理论推理也较为合理. 对于给定的延迟 τ，参数 m 越大，步长 h 越小，计算结果越精确. 通过数值计算发现，对于不同的 m，Lyapunov 指数计算的结果趋于一致，显示了算法的稳定性.

2.2. 泰勒展开法

考虑延迟动力系统(1)

$$\dot{X} = f(X) + g(X(t-\tau)),$$

设延迟项具有如下形式：

$$gX(t-\tau) = \begin{pmatrix} h_{11}(x_1(t-\tau)) \\ h_{21}(x_1(t-\tau)) + h_{22}(x_2(t-\tau)) \\ \vdots \\ h_{n1}(x_1(t-\tau)) + h_{n2}(x_2(t-\tau)) + \cdots + h_{nn}(x_n(t-\tau)) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中 $h_{ii}(u) = k_i\cdot u\,(i=1,2,\cdots,n)$是关于 u 的线性函数. $h_{ij}(u)\,(i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j)$是关于 u 的可导函数. 利用泰勒公式将 $x_i(t-\tau)$展开至一次线性项，即 $x_i(t-\tau)\cong x_i(t)+(-\tau)\cdot x_i'(t)$，整理得到关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的非延迟自治方程，然后可利用文献[14]中的方法计算系统(1)的 Lyapunov 指数.

若延迟项(9)中，$h_{ii}[x_i(t-\tau)]\equiv 0\,(i=1,2,\cdots,n)$，$h_{i,i-1}(u)=k_i\cdot u\,(i=2,3,\cdots,n)$是关于 u 的线性函数，其余 $h_{ij}(u)$是关于 u 的可导函数，则可利用泰勒公式将 $x_i(t-\tau)$展开至二次项，即 $x(t-\tau)\cong x(t)+(-\tau)\cdot x'(t)+(-\tau)^2x''(t)/2$，同理也可计算系统(1)的 Lyapunov 指数.

下面利用泰勒展开法对延迟统一系统做非延迟化处理. 统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x), \\ \dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8+\alpha}{3}z, \end{aligned} \tag{10}$$

其中，参数 $\alpha\in[0,1]$ 时系统处于混沌态. 根据 Vanecek 和 Celikovsky 的定义，当 $\alpha\in[0,0.8]$ 时，系统(10)属于广义 Lorenz 系统；当 $\alpha\in[0.8,1]$ 时，系统(10)属于广义 Chen 系统；而当 $\alpha=0.8$ 时，系统(10)属于广义 Lü 系统[15].

对统一混沌系统(10)添加延迟项

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x), \\ \dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8+\alpha}{3}z + k\cdot x(t-\tau), \end{aligned} \tag{11}$$

这里 $k\in R$，特别地，令 $k=-1$. 通过数值模拟，可以大致得到：当 $\tau=1$ 时，$\alpha\in[0.1,1.8]$时系统(11)处于混沌态；当 $\tau=0.5$ 时，$\alpha\in[0.1,1.5]$时系统(11)处于混沌态；当 $\tau=0.05$ 时，$\alpha\in[0.04,0.97]$时系统(11)处于混沌态. (11)称为延迟统一混沌系统. 将 $x(t-\tau)$展开到一次项：$x(t-\tau)\cong x(t)+(-\tau)\cdot x'(t)$，代入(11)式整理得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x), \\ \dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y, \\ \dot{z} &= xy + (k+25\tau\alpha+10\tau)x \\ &\quad - \tau(25\alpha+10)y - \frac{8+\alpha}{3}z. \end{aligned}$$

也可将 $x(t-\tau)$展开到二次项：

$$x(t-\tau) \cong x(t) + (-\tau)\cdot x'(t) + (-\tau)^2 x''(t)/2.$$

代入系统(11)整理得

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x),\\
\dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y,\\
\dot{z} &= xy + k[(19\tau^2 - 5\tau^2\alpha + \tau)\\
&\quad \times (25\alpha+10)+1]x\\
&\quad + k\left(-\frac{11}{2}\tau^2 + 2\tau^2\alpha - \tau\right)\\
&\quad \times (25\alpha+10)y - \frac{8+\alpha}{3}z.
\end{aligned}$$

如上,即将延迟统一系统非延迟化.然后利用文献[14]中的方法计算其 Lyapunov 指数.

泰勒展开法适用于延迟时间 τ 较小的情形,对于较大的延迟 τ 本方法会有误差.使用泰勒公式展开时,常展开至一次或二次项.泰勒展开至低次项的方法比展开至高次项的方法适用的延迟项范围更广,计算量更小,因此更适合实际计算.

2.3. Wolf 替代法

Wolf 方法[16]可用来求动力学系统的最大 Lyapunov 指数,由 Wolf 等人提出,以下简称为 Wolf 方法.先由测得的实验数据的时间序列 $X(t)$,利用时间延迟构造 m 维相空间,空间中的每一点由 $\{X(t), X(t-\tau), \cdots, X(t+(m-1)\tau)\}$ 给出.在 t_0 时刻轨道初始点附近找一最近邻近点,用 $L(t_0)$ 表示这两点间的距离,到 t_1 时刻距离演化为 $L'(t_1)$.然后按着如下规则寻找新的数据点:1)新的数据点与演化后的基准点的距离 $L(t_1)$ 很小;2) $L(t_1)$ 和 $L'(t_1)$ 的夹角 θ_1 很小.重复以上过程,如图 1 所示.

最大 Lyapunov 指数的计算公式为

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{t_n - t_0}\sum \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}.$$

Wolf 方法的优点是只要已知系统的状态序列,就可以求得系统的最大 Lyapunov 指数.Wolf 方法适用于已知离散轨迹的各类动力系统,在计算延迟系统最大 Lyapunov 指数时可以避免处理延迟项的困难.但是 Wolf 算法在实现上有一定的困难,比如如何合理地找到新的数据点使其与基准点的距离和夹角 θ 都较小且合适,若上述参数取得不好,会导致计算结果不准确.

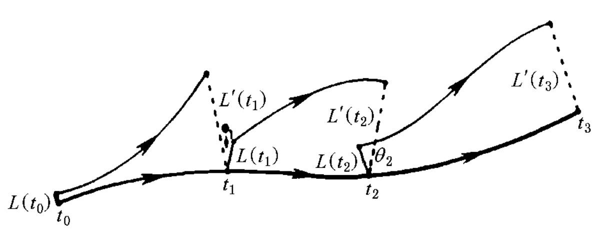

图 1 计算最大 Lyapunov 指数的 Wolf 方法

3. 数值计算

例 1 延迟统一混沌系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x),\\
\dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y,\\
\dot{z} &= xy - \frac{8+\alpha}{3}z + k\cdot x(t-\tau),
\end{aligned}$$

取 $\alpha = 1, k = -1, \tau = 0.05$,系统的图像如图 2 所示.分别利用不同方法求该系统的 Lyapunov 指数(见表 1).

表 1 延迟混沌统一系统的 Lyapunov 指数

方法	Lyapunov 指数		
矩阵迭代法	2.0792	0.0958	−11.7730
泰勒展开法	2.1431	−0.0037	−11.9833
Wolf 替代法	2.1798	—	—

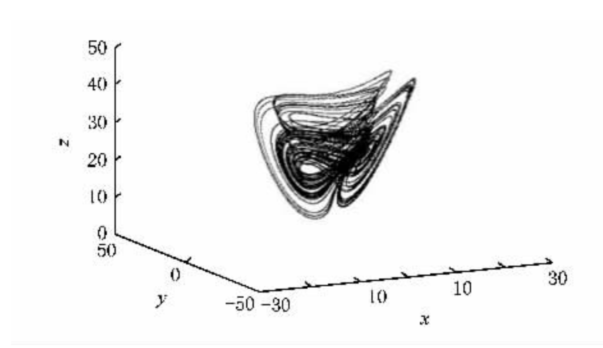

图 2 延迟统一混沌系统的轨迹相图

例 2 延迟混沌系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (25\alpha+10)(y-x),\\
\dot{y} &= (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y\\
&\quad + k_1\cdot x(t-\tau),\\
\dot{z} &= xy - \frac{8+\alpha}{3}z + k_2\cdot \sin(x(t-\tau))\\
&\quad + k_3\cdot y(t-\tau),
\end{aligned}$$

取 $\alpha = 0, k_1 = -5, k_2 = -2, k_3 = -2, \tau = 0.05$,系统

的图像如图 3 所示. 对系统分别利用不同方法求其 Lyapunov 指数(见表 2).

表 2　延迟混沌统一系统的 Lyapunov 指数

方法	Lyapunov 指数		
矩阵迭代法	0.8924	0.0410	−11.3659
泰勒展开法	0.9760	0.0114	−12.1804
Wolf 替代法	1.0820	—	—

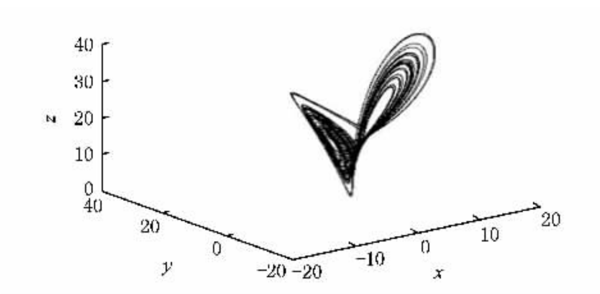

图 3　延迟统一混沌系统的轨迹相图

4. 结　　论

本文提出并推导了计算延迟混沌系统沿主轴方向上 Lyapunov 指数的方法:矩阵迭代法;讨论了泰勒展开法与 Wolf 替代法. 两个数值算例显示,这三种算法所得到的延迟统一混沌系统的 Lyapunov 指数较为接近但也存在误差. 泰勒展开法的误差是由泰勒公式涉及到的延迟 τ 不够小造成,同时,算法的展开只达到有限项也会产生误差,但该方法编程容易且误差可接受,如果可以适合计算更广泛的延迟项形式将会有更广泛的应用. 矩阵迭代法的误差是由于计算量过大而不能将部分参数(如 m 等)取至更合理的值而引起,但该算法对各类延迟项形式的普适性是其显著优势. Wolf 替代法的误差是由系统演化过程中夹角的选取和新基准点的选取所引起,该方法的优点是只需知道系统的状态序列便可以了解系统的变化规律,从而计算出其 Lyapunov 指数.

[1] Zhang X D, Wang Z, Zhao P D 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 397
[2] Chen Z Q, Yuan Z Z, Zhou Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 2616
[3] Li D H, Sun X F, Tian L L 2008 *Chin. Phys.* B **17** 507
[4] Li G H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2608
[5] Cai L Li, Qin W S, Wu G 2007 *Chin. Phys.* **16** 2631
[6] Yu H J, Zheng N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4712 (in Chinese) [于洪洁、郑　宁 2008 物理学报 **57** 4712]
[7] Yan S L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6878 (in Chinese) [颜森林 2008 物理学报 **57** 6878]
[8] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
[9] Zhao P D, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2791 (in Chinese) [赵品栋、张晓丹 2008 物理学报 **57** 2791]
[10] Zhang X D, Shi F, Wang Z 2007 *Communications in Theoretical Physics* **48** 267
[11] Zhang X D, Wang Z 2007 *Journal of University of Science and Technology Beijing* **29** 1276 (in Chinese) [张晓丹、王　震 2007 北京科技大学学报 **29** 1276]
[12] Xu J, Pei L J 2006 *Advances in Mechanics* **36** 17 (in Chinese) [徐鉴、裴利军 2006 力学进展 **36** 17]
[13] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) chapt. 1 (in Chinese) [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用(北京:高等教育出版社)第一章]
[14] Zhang X D, Li Z P, Zhang L L 2005 *Journal of University of Science and Technology Beijing* **27** 117 (in Chinese) [张晓丹、李志萍、张丽丽 2005 北京科技大学学报 **27** 117]
[15] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
[16] Alan W, Jack B S, Harry, L S, John A V 1985 *Physica* **16**D 285

Methods for calculating the main-axis Lyapunov exponents of a type of chaotic systems with delay*

Zhang Xiao-Dan† Liu Xiang‡ Zhao Pin-Dong
(*Applied Science School*, *University of Science and Technology Beijing*, *Beijing* 100083, *China*)

(Received 30 August 2008; revised manuscript received 2 December 2008)

Abstract

In this paper, we propose a new method for calculating the main-axis Lyapunov exponents of a type of chaotic systems with delays, which we call Matrix iteration method. We discuss this new method theoretically by detailed analysis. Also, we introduce another method called Taylor expansion method. The method invented by Wolf is also introduced and we discuss the advantages and disadvantages of these three methods. Finally, we calculate the main-axis Lyapunov exponents of a type of chaotic systems with delay to test these method.

Keywords: Lyapunov exponent, chaos-system with delays, matrix iteration method, Taylor expansion method
PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70271068).

† E-mail: bkdzxd@163.com

‡ E-mail: liuxiang6@yahoo.com.cn