

# 叶子节点对于网络同步能力影响的研究\*

马晓娟 王 延 郑志刚†

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2008 年 9 月 19 日收到, 2008 年 11 月 10 日收到修改稿)

系统考察了叶子节点对于网络同步能力的影响, 发现随着叶子节点比例的增加, 网络的同步能力下降, 同时给出了数值结果以及理论解释.

关键词: 复杂网络, 叶子节点, 同步能力

PACC: 0545

近年来, 复杂网络上的同步性能的研究成为非线性科学以及复杂性科学所关注的重要课题之一<sup>[1-5]</sup>. 这是因为: 1) 同步行为在许多现实过程中起着重要作用, 尤其是生物网络以及一些工程网络; 2) 现实生活中网络大量存在<sup>[6]</sup>. 人们所接触的很多领域, 无论是自然界还是社会行为, 很多问题都可以抽象成网络并进行研究. 迄今为止, 有许多工作都关注于网络拓扑结构对于其上所发生的动力学行为<sup>[2-5]</sup>, 如同步行为, 所产生的影响. 可是在这些工作中, 人们往往忽略了叶子节点(即度为 1 的节点)的作用. 然而在现实的网络中, 这样的节点普遍存在, 这些节点是否会对网络的动力行为产生影响呢? 本文主要考察了叶子节点对于网络性能的影响, 研究了随机网以及无标度网的同步性能与网络中叶子节点比例的关系, 并发现叶子节点的比例越高网络的同步性能越差.

在现实的网络中, 无论是社会网, 关系网, 基因网或者 internet 网等, 叶子节点的存在都是普遍的, 在有些网络中, 叶子节点甚至占了很大的比例. 在表 1 中, 我们给出了一些网络中叶子节点所占的比例<sup>[7]</sup>, 从中可以看出, 对于不同的网络, 叶子节点都是存在的, 甚至在某些网络中, 例如在 internet 网中, 叶子节点的数目可以占到整个网络的 39.1%. 因此, 叶子节点的存在是不可以被忽视的. 本文采用主稳定函数方法对不同网络中叶子节点对同步能力的影响进行了研究.

表 1 网络中叶子节点所占的比例

网络类型	总节点个数	叶子节点个数	叶子节点比例/%
astroh	16705	2330	13.9
condmat2005	40421	6665	16.5
Netsciencoco	1461	455	31.1
hetcoauthor	7610	2545	33.4
power_grid	4941	1876	38.0
internet	22963	8988	39.1

注: 表中的数据来自于文献 [7], 部分名称为对应缩写. 对于有些有向图, 表中给出的统计值为出度或入度的数据.

主稳定函数 (MSF) 方法是由 Pecora 和 Carroll 于 1998 年提出的用来研究网络结构及动力学对于同步能力影响的一种方法<sup>[8]</sup>, 该方法将结构及动力学的作用分成独立的两个部分, 大大提高了对大型复杂网络的处理能力. 一般地, 耦合的动力系统可以用下式表示:

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_i) - \epsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x_j), \quad (1)$$

其中,  $i = 1, \dots, N$ ,  $dx/dt = F(x)$  是系统的动力学方程,  $H(x)$  描述了系统的耦合方式,  $G = (G_{ij})$  记录的是网络的拓扑结构,  $N$  为节点个数. 一般来讲, 主稳定函数方法适用于线性耦合(至少在同步态附近可以很好的线性近似)的全同系统, 同时要求  $\sum_{j=1}^N G_{ij} = 0$  来保证同步态  $s(t)$  的存在. 在同步态附近线性化 (1), 我们可以得到

\* 国家自然科学基金(批准号: 70431002, 10575010, 10875011), 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2007CB814805)和教育部博士点基金(批准号: 20060027009)资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: zgzheng@bnu.edu.cn

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \mathbf{DF}(s) \cdot \delta x_i - \epsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{DH}(s) \cdot \delta x_j, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{DF}(s)$  是对应于同步态的雅克比矩阵,对于线性耦合的系统,  $\mathbf{DH}(s)$  是不依赖于  $s(t)$  的常数矩阵. 定义  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  为矩阵  $G$  的本征值谱,基于(2)式对  $G$  进行对角化,我们有

$$\frac{d\delta y}{dt} = [\mathbf{DF}(s) - K\mathbf{DH}(s)] \cdot \delta y, \quad (3)$$

其中  $\delta y$  是同步态附近的无穷小微扰,  $K = \epsilon \lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$ . 方程(3)的最大李雅普诺夫指数  $\alpha(K)$  即为耦合系统(1)的主稳定函数,它的正负决定了该系统是否可以同步:如果对于所有  $i = 2, \dots, N$  都有  $\alpha(K) < 0$ , 则同步态是稳定的,反之,则是不稳定的,即系统的同步不能达成. 对于很多动力学系统,  $\alpha(K)$  在有限的区间  $(K_1, K_2)$  中为负值,因此,稳定同步态存在的条件即可表达为

$$\lambda_2 > K_1/\epsilon, \lambda_N < K_2/\epsilon,$$

其中  $K_1, K_2$  仅由动力学决定,因此,对于给定的动力学,网络的同步能力仅决定于  $\lambda_2$  以及  $\lambda_N$  的取值. 定义

$$R \equiv \frac{\lambda_N}{\lambda_2} < \frac{K_2}{K_1}, \quad (4)$$

(4)式即为网络能够同步的条件,同时  $R$  的大小也决定了网络同步能力的大小: $R$  越小,网络同步能力越强; $R$  越大,网络同步能力越弱.

下面,我们即采用了主稳定函数方法,分析了叶子节点对于网络同步能力的影响. 我们的分析基于两种经常为人们所采纳的耦合矩阵方式,即  $G$  为归一化的拉普拉斯矩阵以及正常的拉普拉斯矩阵.

第一种情况 首先,我们关注于归一化的拉普拉斯矩阵. 对于归一化的拉普拉斯矩阵,矩阵  $G$  可以描述为:对于所有  $i (1 \leq i \leq N), G_{ii} = 1$ , 如果  $i$  和  $j$  之间有边,则  $G_{ij} = -1/k_i (i \neq j)$ , 否则,  $G_{ij} = 0$ . 我们分析了随机网以及无标度网. 随机网的生成我们采用了以下模型以让它产生一定比例的叶子节点,即,为了生成叶子节点比例为  $p$  的网络,从初始时规模为  $m_0$  的完全图,在每一个时步加入一个节点,同时产生一个  $(0, 1)$  之间的随机数,如果该随机数小于  $p$ , 则该新加入的节点仅带进来一条边,即该点为叶子节点,否则,该点带进来  $m$  条边,这些边随即选择另外一个端点接入网络中. 重复该过程一直到网络规模为  $N$ , 则生成的网络既具有随机网的性质又含有一定比例的叶子节点. 对于无标度网的产生,我们

也采用了类似的过程,只在边连入网络时采用传统的偏好连接的方式,则这样产生的网络的度分布即具有无标度网络的特性.

接着,我们主要给出了基于随机图的理论分析过程. 而对于无标度网络,我们的数值实验证明也同样有类似的结果. 从表 1 中可以看出,叶子节点的比例一般不会趋近于 1, 因此,我们关注于  $p \in (0, 0.75]$ . 在图 1 中,我们给出了对于如上述所产生的随机网的  $R$  随着叶子节点比例  $p$  的增加的变化图,可以看出,随着叶子节点比例的增加,  $R$  不断增加,意味着网络的同步能力逐渐下降,并且下降的幅度较为明显,如图所示,  $R(0.65)/R(0.1) \approx 4$ , 这意味着,前者的同步能力大概只有后者的 1/4, 这将严重影响系统的动力学行为. 对于无标度网,我们有类似的结果.

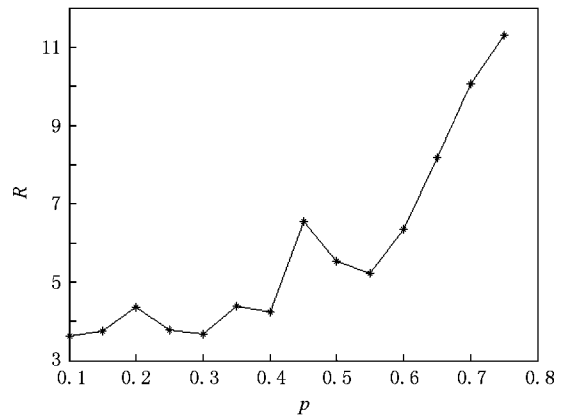


图 1 随机图  $R$  对于叶子节点比例  $p$  的变化图(其中网络规模  $N = 1000$ , 每步以概率  $1-p$  所带进来的边数  $m = 8$ . 可以看到,随着  $p$  的增加,  $R$  增大,意味着整个网络的同步能力降低)

为了进一步理解  $R$  的行为,我们采用一定的理论工具来分析  $p$  增加过程中的  $R$  的变化. 对于归一化的拉普拉斯矩阵,有  $G = I - D^{-1}A$ , 此处  $I$  为单位矩阵,  $D = \text{diag}\{k_1, \dots, k_N\}$ ,  $A$  是网络的邻接矩阵. 为了估计  $G$  的本征值,注意到  $G$  与  $A$  关系,可以通过考察  $A$  的本征值来间接得到;并考虑到对于一个随机图,它的度分布表现为一个很陡的峰,峰值在均度处,因此,近似有  $D \approx \text{diag}\{k, \dots, k\}$ , 其中  $k$  表示均度,则得到

$$\lambda_N \approx 1 - \mu_1/k, \lambda_2 \approx 1 - \mu_{N-1}/k,$$

其中  $\mu_1$  和  $\mu_{N-1}$  分别表示  $A$  的最小本征值和第二大本征值. 根据已有结果,  $A$  的本征值满足半圆分布 (Wigner's semicircle law)<sup>[6]</sup>, 可以知道

$\mu_{1,N-1} = \mp 2\sqrt{Nc(1-c)} \approx \mp 2\sqrt{Nc} = \mp 2\sqrt{k}$  ,  
 其中  $c$  表示随机图的连接概率, 在我们的问题中  $c \ll 1$ , 于是最终得到

$$\lambda_N \approx 1 + 2/\sqrt{k}, \lambda_2 \approx 1 - 2/\sqrt{k}, \quad (5)$$

$$R \equiv \frac{\lambda_N}{\lambda_2} \approx \frac{1 + 2/\sqrt{k}}{1 - 2/\sqrt{k}}. \quad (6)$$

虽然这样的估计是比较粗略的, 但是由于可以严格证明对于一个网络归一化拉普拉斯矩阵的  $\lambda_N \in [N/(N-1), 2], \lambda_2 \in (0, N/(N-1)]$ , 它们的变化范围

决定了它们的值对于近似不是特别敏感, 所以当均度不是很小时 ( $k > 4$ ), 我们数值上发现这是一个可以比较好地近似, 可以很好拟合定性的趋势. 对于我们所采用模型生成的网络, 我们有  $k = 2m(1-p) + 2p$ , 代入(5)(6)式, 即可得到  $\lambda_N, \lambda_2$  以及  $R$  的解析表达式. 在图2中我们给出了  $\lambda_N, \lambda_2$  以及  $R$  随着  $p$  的变化图, 我们可以看出, 理论和数值符合得比较好.

以上的理论结果虽然是基于随机网进行的, 然

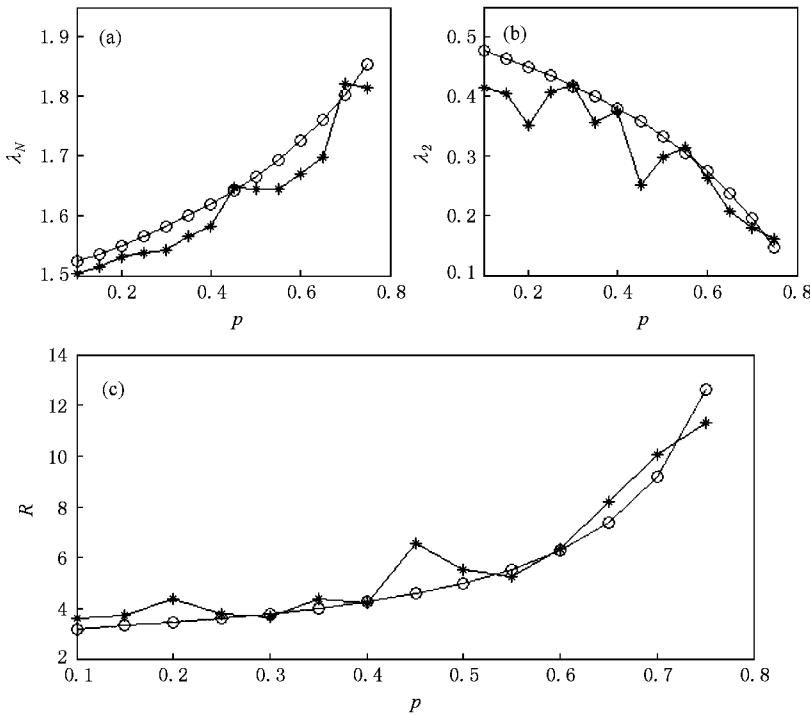


图2 (a)(b)(c)分别为  $\lambda_N, \lambda_2$  以及  $R$  随着  $p$  的变化图(其中星号表示数值得到的值, 圆圈表示理论计算值, 由图上可以看出, 该理论可以较好地拟合数值模拟的结果. 同时也可以明确地看出, 当叶子节点的比例增加时, 网络的  $\lambda_N$  增大, 同时  $\lambda_2$  减小, 导致它们的比值  $R$  增加, 意味着网络同步能力的下降)

而经验证明<sup>[3]</sup>, 在相当大的范围内, 对于足够大的网络, 该理论可以用来近似地估计网络的本征值, 而并不敏感依赖于具体的网络结构, 因此, 对于无标度网络, 我们也用同样的理论工具进行了分析, 得到了相似的结果以及较好的近似.

第二种情况 我们考虑耦合矩阵为拉普拉斯矩阵. 此时,  $G_{ii} = k_i$ , 并且如果节点  $i$  与  $j$  相连  $G_{ij} = -1$ , 否则  $G_{ij} = 0$ . 写成矩阵的形式, 有  $G = D - A$ . 在这种情况下, 对于一般的网络, 原则上仍然可以沿用上面的分析方法, 得到相应的表达式

$$\lambda_{N2} \approx k - \mu_{1,N-1} \approx k \pm 2\sqrt{k},$$

但是由于近似过大(对于归一化拉普拉斯矩阵的情况, 表达式中要除以  $k$  相对的影响会小很多), 该估计的误差较大, 因此可以采用如下的理论方法来对  $\lambda_N$  进行估计:

当最大度  $k_N$  与次大度  $k_{N-1}$  相差很多时,  $\lambda_N$  可以通过  $k_N$  来估计, 即<sup>[9]</sup>

$$\lambda_N \approx k_N + 1,$$

这个式子在当  $k_N \geq k_{N-1}$  满足时是很好的近似. 对于随机图, 虽然这个条件有时不能很好满足,  $k_N$  只是比  $k_{N-1}$  大一些, 但这个式子仍旧在相当的范围内可

以被认为是好的估计. 具体来说, 对于一个随机图,

它的度分布近似可以表示为  $P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-(k - k_N)^2 / (2\sigma^2)]$  其中  $\sigma = \sqrt{Nc(1-c)}$  表示度的展宽, 我们认为度在  $k_N$  和无穷大之间的节点只有一个, 即

$$N \int_{k_N}^{\infty} P(k) dk = 1.$$

利用误差函数  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$  反解出

$k_N$ , 进而得出

$$\lambda_N \approx k_N + 1 = \text{erf}^{-1}(1 - 2/N) \cdot 2\sigma + k_N + 1.$$

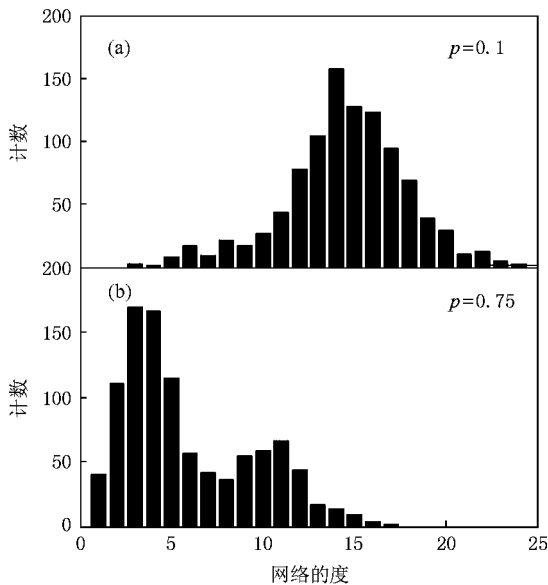


图 3

这个表达式要求随机图的度分布大约为高斯分布, 由图 3(a) 可以看出当  $p$  比较小时 ( $p = 0.1$ ) 这个要求是满足的, 而当  $p$  比较大时 ( $p = 0.75$ ), 叶子节点的存在极大影响了网络的度分布 (图 3(b)), 它不再是单峰分布, 因此假定失效, 估计在定量上不再准确. 然而从图 4(a) 中可以看出, 理论值在定性上依然把握了  $\lambda_N$  的变化趋势 (星号表示数值结果, 圆圈为理论值). 对于  $\lambda_2$ , 由于  $\lambda_2$  与网络的最小度  $k_1$  相

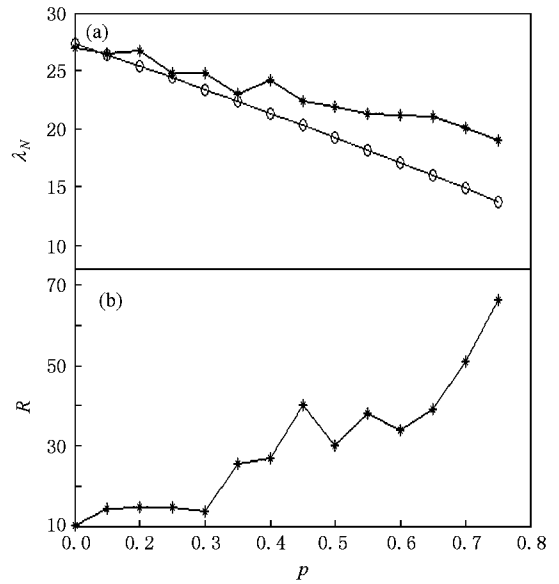


图 4

关, 而  $k_1$  往往是多重简并的, 因此, 相比于  $\lambda_N, \lambda_2$  的解析表达并不容易得到, 但是可以对网络的本征值进行数值计算, 由此得到网络同步能力随着叶子节点数目的变化图 (图 4(b)). 可以看到, 随着叶子节点比例的增加, 网络的同步能力下降. 同样, 对于无标度网络, 也得到了类似的数值结果.

综上, 叶子节点的存在确实对于网络的动力学行为产生了显著的影响, 由于现实网络中难免会存在一定比例的叶子节点, 因此, 在设计网络以及考察网络性质的时候, 必须要把这一部分节点的影响考虑在内. 本文主要针对随机网进行了理论及数值研究, 发现, 随着叶子节点比例的增加, 网络整体的同步能力下降. 同时, 我们也对无标度网进行了考察, 得到了相似的结果. 文中也给出了理论上的推导, 发现理论估计和数值结果符合得比较好, 这使得在知道叶子节点比例的情况下就对网络整体的同步能力有所把握, 或者在要求一定同步能力的情况下, 对于网络中叶子节点所能允许的范围有所预测, 这对现实网络进行评估和设计有着理论及实践的指导意义.

[ 1 ] Barahona M B, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101  
 [ 2 ] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Europhys. Lett.* **69** 334.  
 [ 3 ] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016116

[ 4 ] Zhou C, Motter A E, Kurths J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 034101  
 [ 5 ] Nishikawa T, Motter A E 2006 *Phys. Rev. E* **73** 065106  
 Liu F, Guan Z H, Wang H 2008 *Chin. Phys.* **17** 2405

- [ 6 ] Albert R ,Barabasi A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47  
[ 7 ] <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>  
[ 8 ] Pecora L M ,Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109  
[ 9 ] Kim D H ,Motter A E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 248701

## Effect of leaf nodes on synchronizability of complex networks<sup>\*</sup>

Ma Xiao-Juan Wang Yan Zheng Zhi-Gang<sup>†</sup>

( *Department of Physics ,Beijing Normal University ,Beijing 100875 ,China* )

( Received 19 September 2008 ; revised manuscript received 10 November 2008 )

### Abstract

The synchronizability of the complex network has aroused much interest during the past years. But most studies pay little attention to the leaf nodes( whose degree equals 1 ) ,which do exist in the real networks. In this paper ,we study the influence of leaf nodes on the synchronizability of the whole network systematically and find that as the proportion of the leaf nodes increases , the network becomes less synchronizable. Both numerical and theoretical results are given in the paper.

**Keywords** : complex networks , leaf nodes , synchronizability

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 70431002 ,10575010 ,10875011 ) , the 973 Project ( Grant No. 2007CB814805 ) ,and the Foundation of Doctoral Training( Grant No. 20060027009 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : zgzhen@bnu.edu.cn