

# 参外联合激励复合非线性振子的分岔分析\*

季 颖 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2008 年 10 月 25 日收到, 2008 年 11 月 25 日收到修改稿)

讨论了参外联合激励复合非线性振子的动力学行为, 对其定常解在一阶近似下的方程进行了局部分岔分析, 给出了简单分岔和 Hopf 分岔发生的条件, 并通过对近似方程和原系统的数值模拟加以验证, 分析了多种参数对该振子动力学行为演化过程的影响. 根据全局分岔理论探讨了该振子在不同条件下发生同宿、异宿分岔的必要条件, 其结论与数值计算的结果大致符合.

关键词: 复合非线性振子, 局部分岔, 全局分岔, 混沌

PACC: 0545

## 1. 引 言

在非线性动力学的发展史上, 几类经典方程, 如 Duffing 方程, Mathieu 方程, van der Pol 方程等具有特别重要的地位, 不仅在于它们是具有一定工程背景的相对简单的非线性系统, 更在于它们分别描述了一些典型的非线性现象, 如自激振动, 倍周期分岔序列, 双涡旋吸引子等等<sup>[1-3]</sup>. 从上世纪 70 年代以来, 各国学者对上述方程进行了深入的研究. 如 Ueda 等人用模拟计算机给出了 Duffing 系统的各种分岔集<sup>[4]</sup>, Chen, Leung 则进一步用增量谐波平衡法验证了这些分岔集的正确性<sup>[5]</sup>. 同时非线性动力系统的解的结构及其稳定性也引起了人们的重视, 如陈予恕等人用 CL 方法探讨了参数激励 Mathieu 方程的不同解的行为, 解释了与巴戈留包夫和奈费结论的差别, 还给出了更为丰富的分岔行为<sup>[6-8]</sup>. 在过去的十多年中, 包含两项或两项以上典型非线性结构的复合振子的非线性现象也逐渐被人们深入地揭示出来, 诸如非线性结构的分类, 全局分岔现象等<sup>[9, 10]</sup>. 然而, 由于复合非线性振子的复杂性, 许多动力学现象还没有被深入地刻划出来, 尤其当参数激励与外激励共存并且两者间存在初始相差的情形. 我们在最近的工作中讨论了初始相差对如下复合振子动力

学行为的影响<sup>[11]</sup>:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\mu\epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \epsilon\alpha x^3 + \epsilon f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0)x = \epsilon f_2 \cos(\omega_2 t), \quad (1)$$

其中  $\mu$  为阻尼项,  $\alpha$  为非线性刚度,  $\epsilon$  为小参数,  $\omega_0$  是系统的固有频率,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为参数激励与外激励的频率, 且  $\omega_2 = \omega_1/2$ ,  $\theta_0$  是这两种激励的初始相差. 在此基础上本文将进一步探讨在不同参数条件下该复合振子动力学行为的演化过程及其全局分岔特性.

## 2. 局部分岔分析

设方程 (1) 具有下列形式的一致渐近解<sup>[12]</sup>:

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots, \quad (2)$$

其中  $T_0 = t$  为快变时间尺度,  $T_1 = \epsilon t$ ,  $T_2 = \epsilon^2 t$  为慢变时间尺度,  $x_0 = (u + iv)e^{i\omega_0 T_0} + cc$  ( $cc$  代表其前面各项的共轭). 考虑  $\omega_1 = 2\omega_0 + \epsilon\delta_1$  共振条件下振子的动力学行为, 并令  $\omega_2 = \omega_1/2$ , 可得一次近似下的方程, 即

$$i\dot{u} = \left( -\delta_1 v - 3\alpha u^2 v - 3\alpha v^3 + \frac{1}{2}f_1 v \cos(\theta_0) - \frac{1}{2}f_1 u \sin(\theta_0) \right)$$

\* 国家自然科学基金(批准号 20476041, 10602020)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

$$\begin{aligned}
 & -\mu\omega_1 u + \mu\omega_1 u^3 + \mu\omega_1 uv^2 \Big) / \omega_1, \\
 \dot{v} = & \frac{1}{2} \left( 2\delta_1 u + 6\alpha u^3 + 6\alpha uv^2 \right. \\
 & - f_2 + f_1 u \cos(\theta_0) + f_1 v \sin(\theta_0) \\
 & \left. - 2\mu\omega_1 v + 2\mu\omega_1 vu^2 + 2\mu\omega_1 v^3 \right) / \omega_1, \quad (3)
 \end{aligned}$$

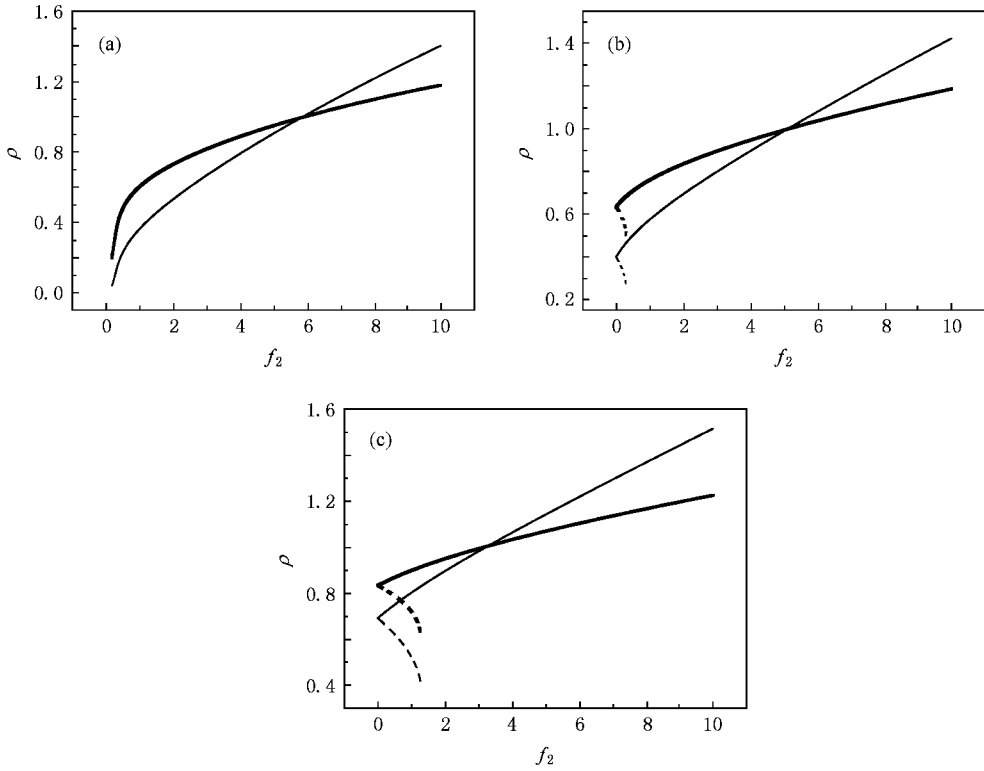


图 1  $f_2$ - $\rho$  平面上系统的幅值响应曲线(粗线:一次近似解,细线:二次近似解;实线:稳定解,虚线:不稳定解)(a)  $f_1 = 1.0$  (b)  $f_1 = 2.5$  (c)  $f_1 = 4.0$

从图 1 可以看出,对不同参数条件,一、二次近似下系统定常解的稳定性基本相同,仅是振动幅值

随  $f_2$  的变化产生一定差别.其一次近似下的解的稳定性及分岔特性可以由方程(3)的 Jacobian 矩阵

$$D_w F = \begin{bmatrix} \frac{-6\alpha uv - \frac{1}{2}f_1 \sin(\theta_0) - \mu\omega_1 + 3\mu\omega_1 u^2 + \mu\omega_1 v^2}{\omega_1} & \frac{-\delta_1 - 3\alpha u^2 - 9\alpha v^2 + \frac{1}{2}f_1 \cos(\theta_0) + 2\mu\omega_1 uv}{\omega_1} \\ \frac{2\delta_1 + 18\alpha u^2 + 6\alpha v^2 + f_1 \cos(\theta_0) + 4\mu\omega_1 uv}{2\omega_1} & \frac{12\alpha uv + f_1 \sin(\theta_0) - 2\mu\omega_1 + 2\mu\omega_1 u^2 + 6\mu\omega_1 v^2}{2\omega_1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

所对应的特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (5)$$

来决定.(4)式中  $w = (u, v)^T$  表示定常解,

$$p = 2\mu - 4\mu u^2 - 4\mu v^2,$$

$$q = (48\delta_1 \alpha v^2 + 4\mu^2 \omega_1^2 + 4f_1 \sin(\theta_0) \mu \omega_1 u^2$$

$$\begin{aligned}
 & - 4f_1 \sin(\theta_0) \mu \omega_1 v^2 + 24\mu^2 \omega_1^2 u^2 v^2 - f_1^2 \\
 & - 24\alpha uv f_1 \sin(\theta_0) + 216\alpha^2 u^2 v^2 - 16\mu^2 \omega_1^2 u^2 \\
 & - 16\mu^2 \omega_1^2 v^2 + 12\mu^2 \omega_1^2 u^4 + 12\mu^2 \omega_1^2 v^4 \\
 & - 12\alpha u^2 f_1 \cos(\theta_0) + 12\alpha v^2 f_1 \cos(\theta_0) \\
 & - 8f_1 \cos(\theta_0) \mu \omega_1 uv + 4\delta_1^2 + 108\alpha^2 u^4
 \end{aligned}$$

其二次近似下的方程表达式较为复杂,在此从略.

当  $f_2 \neq 0$  时,系统没有零解,由于很难给出其解的表达式,在此我们通过数值方法来获得分岔响应曲线.取定参数  $\omega_0 = 1.0, \mu = 0.5, \delta_1 = 0.1, \epsilon = 0.1, \alpha = -1.0, \theta_0 = 5.44$ (下同),令  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,图 1 为  $f_1$  取值不同时  $f_2$ - $\rho$  平面上的幅值响应曲线.

$$+ 108\alpha^2 v^4 + 48\delta_1 \alpha u^2) / 4\omega_1^2.$$

很显然,当(5)式中所有特征值具有负实部时,平衡点稳定.随着参数变化,平衡点失稳存在两种可能的方式,一种是由于其某一实数特征值由负数变为正数,另一种是某一对复数特征值的负实部变为正实部.相应的临界条件分别被称为简单分岔集和 Hopf 分岔集,这样可以定义两种形式的分岔集.令(5)式中  $\lambda = 0$  可得其简单分岔集  $S: q = 0$ ,令  $\lambda$  为纯虚根,即将  $\lambda = R\omega$  ( $R > 0$ ) 代入(5)式可得 Hopf 分岔集  $H: p = 0$ .我们采用数值计算的方法得到了  $f_2$ -

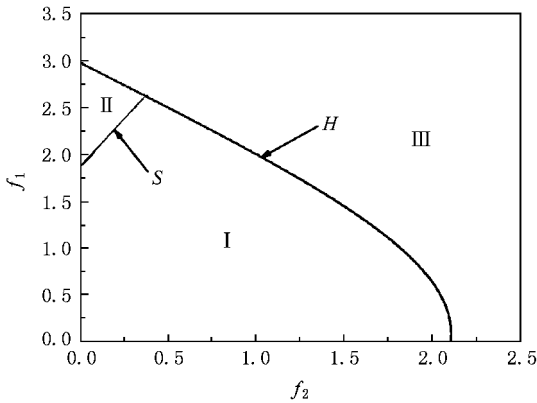


图2  $f_2$ - $f_1$  平面上的分岔集

$f_1$  平面上的分岔集,并通过各区域内的相轨迹验证了以上结论,如图2和图3所示.

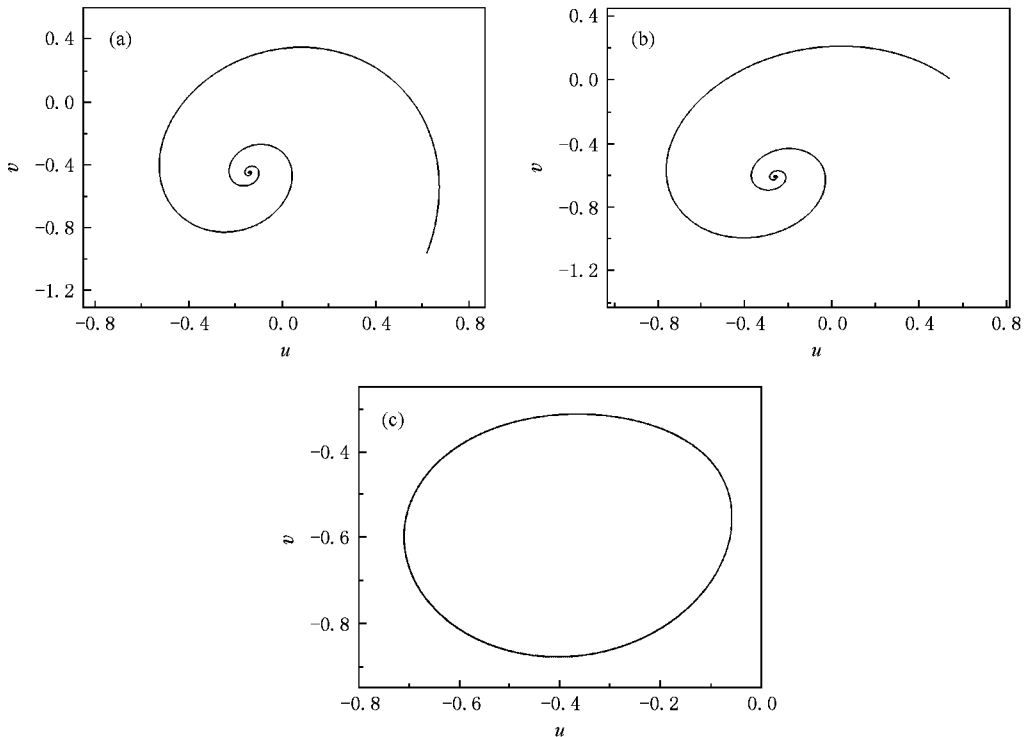


图3 系统(3)的相图 (a)  $(f_1, f_2) = (1.0, 0.5)$  (b)  $(f_1, f_2) = (2.5, 0.2)$  (c)  $(f_1, f_2) = (3.0, 0.5)$

取定  $(f_1, f_2) = (1.0, 0.5)$  时,即参数位于区域(I)时,数值计算表明平衡解是稳定的不动点.随着  $f_1$  逐渐增大,跨越  $S$  时平衡解发生简单分岔.取  $(f_1, f_2) = (2.5, 0.2)$ ,即位于区域(II)时,平衡解仍为稳定焦点,但其位置发生了变化.当  $f_1$  继续增大,跨越  $H$  到达区域(III)时,平衡解发生 Hopf 分岔,其相轨迹为极限环.

### 3. 数值模拟

由于(3)式所示解的近似系统是二维自治系统,在其分岔模式中至多含有简单分岔和 Hopf 分岔,因此无法揭示原系统的复杂动力学行为.为了深入探讨系统的各种运动模式,我们对原系统进行数值模拟,以刻画其相应的演化过程.分别讨论参数激励幅值  $f_1$ 、外激励幅值  $f_2$ 、非线性刚度  $\alpha$  对系统动力学行为的影响.图4给出了系统(1)随不同参数变化的分岔图.

从图4(a)及图5所示的相应的庞加莱映射上可以看出,系统的概周期运动和周期运动交替出现,在该参数条件下,系统在  $f_1 = 2.455$  时通过周期七窗口直接走向混沌.随着参激幅值的继续增大,系统历经复杂运动后在  $f_1 = 3.180$  时混沌吸引子失稳,

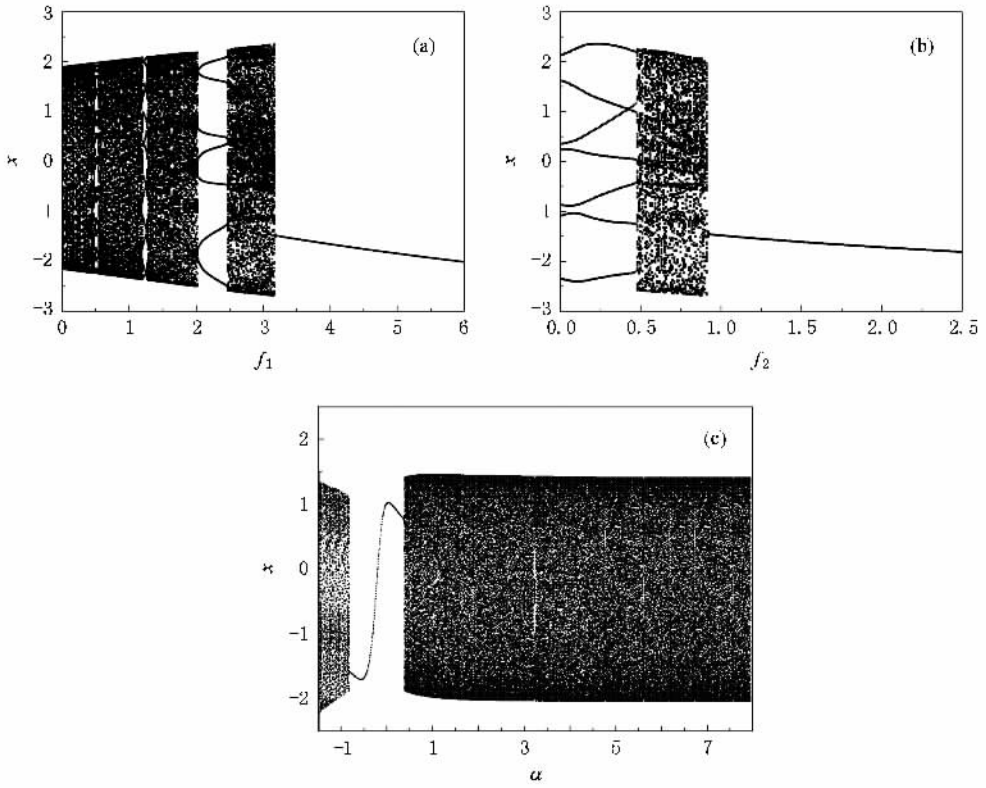


图4 系统(1)的分岔图 (a) $\alpha = -1.0, f_2 = 0.5$ 时系统(1)随 $f_1$ 变化的分岔图 (b) $\alpha = -1.0, f_1 = 2.5$ 时系统(1)随 $f_2$ 变化的分岔图 (c) $f_1 = 2.5, f_2 = 0.5$ 时系统(1)随 $\alpha$ 变化的分岔图

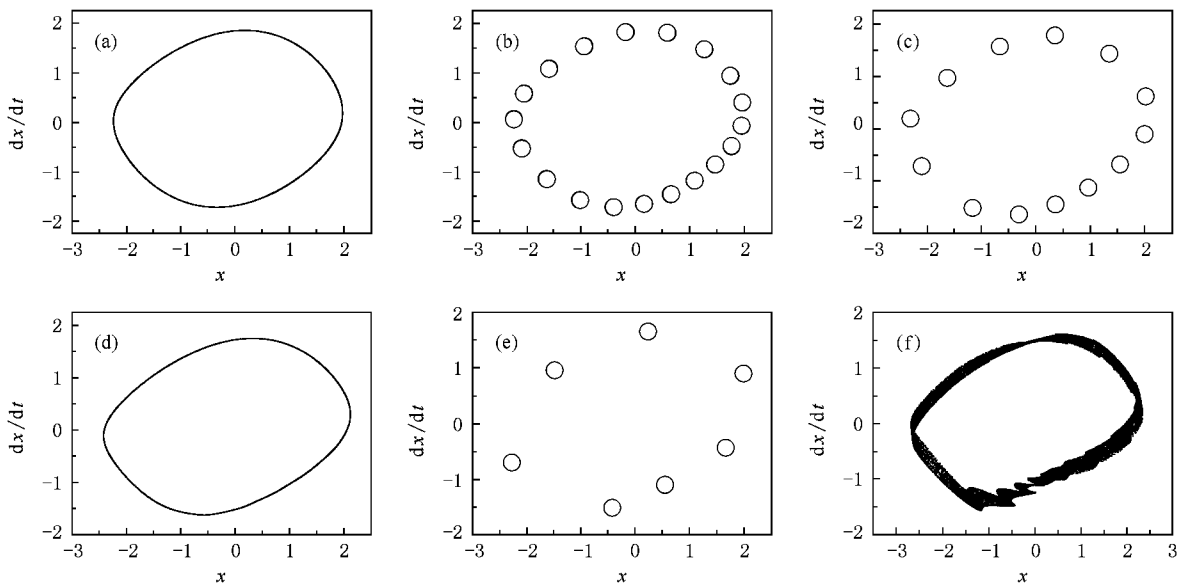


图5  $f_1$  取不同值时的庞加莱映射 (a) $f_1 = 0.500$  (b) $f_1 = 0.513$  (c) $f_1 = 1.221$  (d) $f_1 = 1.502$  (e) $f_1 = 2.037$  (f) $f_1 = 2.460$

从而回到稳定的周期一运动。

而随着外激励幅值的变化(见图4(b)),我们发现其相应的分岔模式较为简单:系统先作稳定的周

期七运动,随着 $f_2$ 的逐渐增大,周期七解在 $f_2 = 0.462$ 时失稳并直接导致混沌.但当 $f_2$ 增大至0.931时,系统又突然从复杂运动回到简单的周期一运动

(如图 6 所示)。

通过分析两种激励幅值对系统运动情况的影响, 不难看出, 在这两者的影响下, 系统都是经周期窗口走向混沌, 并且当激励的幅值增大到一定值时, 系统的运动将稳定到周期运动。

非线性刚度  $\alpha$  对系统分岔特性的影响更为简单。通过图 4(c) 和图 7 所示的系统分岔图和庞加莱

映射可以看出, 在该参数条件下, 当  $\alpha < -0.759$  时, 系统运动呈现混沌状态, 混沌吸引子如图 7(a); 当  $\alpha$  超过该值时, 混沌吸引子失稳, 系统转而进行稳定的周期一轨道运动; 当非线性刚度逐渐增大至 0.762 时, 周期一解又分岔成概周期解(如图 7(c)), 这是由于随着  $\alpha$  的改变, 系统不同频率会产生相互作用, 从而导致概周期振荡。

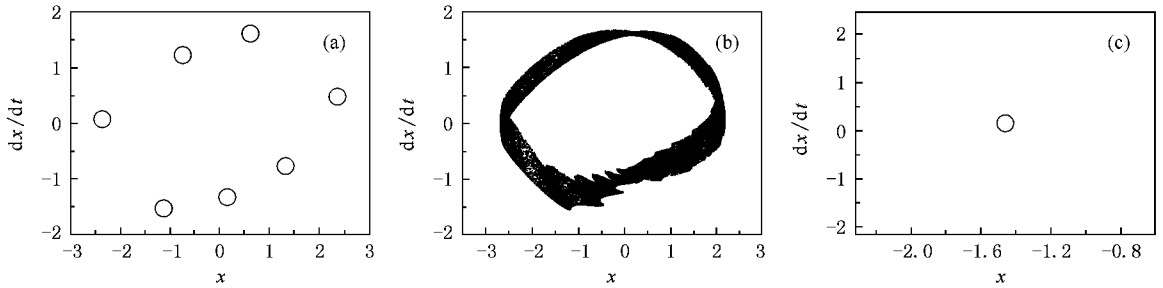


图 6  $f_2$  取不同值时的庞加莱映射 (a)  $f_2 = 0.235$  (b)  $f_2 = 0.465$  (c)  $f_2 = 0.935$

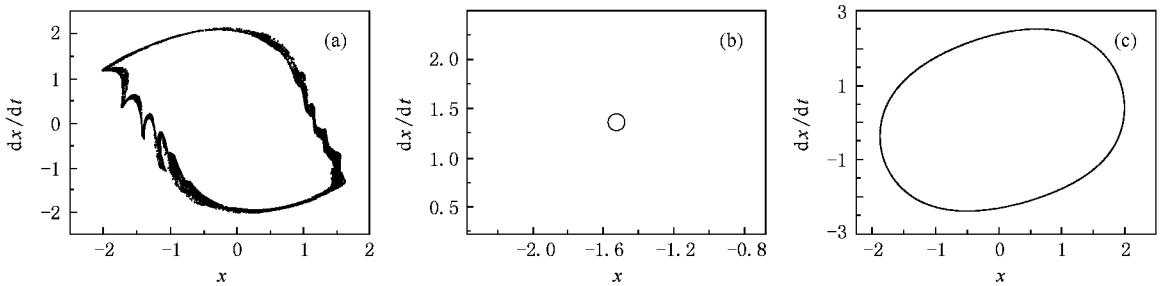


图 7  $\alpha$  取不同值时的庞加莱映射 (a)  $\alpha = -0.770$  (b)  $\alpha = -0.5$  (c)  $\alpha = 0.764$

## 4. 全局分岔分析

下面我们将方程(1)改写为下列形式:

$$\ddot{x} + \xi x + 2\mu\epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \eta x^3 + \epsilon f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0)x = \epsilon f_2 \cos\left(\frac{1}{2}\omega_1 t\right), \quad (6)$$

其中  $\xi$  为线性刚度,  $\eta$  为非线性刚度,  $\epsilon$  为小参数, 对系统(6)作全局特性的分析。由于线性刚度与非线性刚度的取值情况将影响到系统平衡点的性质及其分布, 下面我们就根据  $\xi$  与  $\eta$  的取值分别讨论系统(6)的同宿轨分岔和异宿轨分岔。

### 4.1. 同宿轨分岔

设线性刚度为负、非线性刚度为正, 即  $\xi < 0, \eta > 0$ , 为计算方便, 令  $|\xi| = \xi_0$ , 则系统(6)的未扰系统可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \xi_0 x - \eta x^3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\xi_0 > 0, \eta > 0$ 。

该系统显然为 Hamilton 系统, Hamilton 量

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\xi_0 x^2 + \frac{1}{4}\eta x^4,$$

并且系统有三个奇点, 分别为  $P_0 = (0, 0), P_0^\pm = (\pm\sqrt{\xi_0/\eta}, 0)$ 。通过计算系统(7)的 Jacobian 矩阵在各奇点的特征值可以得出,  $P_0 = (0, 0)$  为鞍点,  $P_0^\pm = (\pm\sqrt{\xi_0/\eta}, 0)$  为中心, 故产生同宿轨道。

令  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\xi_0 x^2 + \frac{1}{4}\eta x^4 = 0$  可以解得

$$x_\pm(t) = \pm\sqrt{\frac{2\xi_0}{\eta}} \operatorname{sech}(\xi_0(t + t_0)),$$

$$y_\pm(t) = \frac{dx_\pm}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2\xi_0^2}{\eta}} \operatorname{sech}(\xi_0(t + t_0))$$

$$\times \tan(\sqrt{\xi_0}(t + t_0)).$$

以上即为同宿轨  $q^0(t)$  的参数方程,同宿环为  $\Gamma = \{(0,0) \cup \{q^0(t) | t \in R\}\}$ ,见图 8.

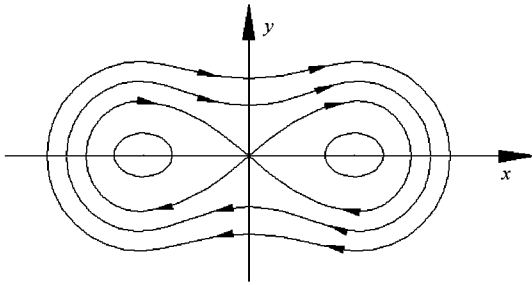


图 8 相平面  $(x-y)$  上的同宿轨道

当小摄动存在时,根据文献 [9] 的分析可知对于充分小的  $\epsilon \neq 0$ ,受扰系统的双曲鞍点  $P_0$  的类型保持不变,  $P_\epsilon^0 = P_0 + O(\epsilon)$ ,  $P_\epsilon^\pm$  在小扰动下形成双曲汇点.扰动后的相图如图 9 所示.

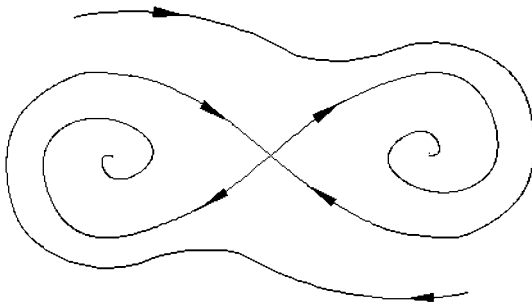


图 9 扰动后的双曲流形

扰动后,轨道的局部稳定流形  $W_{loc}^s(P_\epsilon^0)$  和不稳定流形  $W_{loc}^u(P_\epsilon^0)$  与未扰系统的周期轨是  $r$  阶逼近的.并且对任意  $t_0$ ,平面  $\sum_{t_0}$  上的轨道  $q_\epsilon^s(t, t_0)$ ,  $q_\epsilon^u(t, t_0)$  可分别表示为

$$q_\epsilon^s(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \epsilon q^s(t, t_0) + O(\epsilon),$$

$$t \in (t_0, \infty),$$

$$q_\epsilon^u(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \epsilon q^u(t, t_0) + O(\epsilon),$$

$$t \in (-\infty, t_0).$$

我们对  $\sum_{t_0}$  上  $q^0(0)$  处的稳定流形  $W^s(P_\epsilon^0)$  与不稳定流形  $W^u(P_\epsilon^0)$  的间隔作如下定义:  $d(t_0) = q_\epsilon^u(t_0) - q_\epsilon^s(t_0)$ , 其中  $q_\epsilon^u(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} q_\epsilon^u(t_0, t_0)$ ,  $q_\epsilon^s(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} q_\epsilon^s(t_0, t_0)$  分别是在  $W^s(P_\epsilon^0)$  和  $W^u(P_\epsilon^0)$  的法线方向  $f^\perp(q^0(0))$  上最接近  $P_\epsilon^0$  的唯一一点.由于受扰

系统轨道的局部稳定流形  $W_{loc}^s(P_\epsilon^0)$  和不稳定流形  $W_{loc}^u(P_\epsilon^0)$  与未扰系统的周期轨  $r$  阶逼近,所以

$$d(t_0) = \epsilon \frac{f(q^0(0)) \wedge (q^u(t_0) - q^s(t_0))}{|f(q^0(0))|} + O(\epsilon^2).$$

根据全局分岔分析方法<sup>[9]</sup>进一步定义扰动系统的 Melnikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_\pm(t) \left[ f_2 \cos\left(\frac{1}{2}\omega_1 t\right) - f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0)x - 2\mu(1-x^2)y - \alpha x^3 \right] dt$$

$$= \frac{\pi \sqrt{\xi_0} f_1 \omega_1}{\eta} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega_1}{2\sqrt{\xi_0}}\right) \sin(\omega_1 t_0) - \pi \omega_1 f_2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\eta}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega_1}{4\sqrt{\xi_0}}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 t_0}{2}\right) - \frac{8\mu \xi_0 \sqrt{\xi_0}}{3\eta}.$$

对于足够小的  $\epsilon > 0$ ,如果  $M(t_0)$  没有零点,  $W_{loc}^s(P_\epsilon^0) \cap W_{loc}^u(P_\epsilon^0) = \emptyset$ ;如果  $M(t_0)$  存在一阶零点,那么稳定流形  $W_{loc}^s(P_\epsilon^0)$  与不稳定流形  $W_{loc}^u(P_\epsilon^0)$  将横截相交,系统可能出现混沌运动.

### 4.2. 异宿轨分岔

下面讨论线性刚度为正、非线性刚度为负的情形,即  $\xi > 0, \eta < 0$  时,系统的全局分岔情况,即对应第 2.3 节所讨论的情形.

令  $|\eta| = \eta_0$ ,则系统 (6) 的未扰系统可表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\xi x + \eta_0 x^3, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\xi > 0, \eta_0 > 0$ .

该系统也是 Hamilton 系统,Hamilton 量

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\xi x^2 - \frac{1}{4}\eta_0 x^4,$$

系统的三个奇点分别为  $P_1 = (0,0), P_{2,3} = (\pm\sqrt{\xi/\eta_0}, 0)$ ,如上方法可以判定  $P_1$  为中心,  $P_2, P_3$  均为鞍点.相平面上的不变流形为  $M = (x_0, y_0) = (\pm\sqrt{\xi/\eta_0}, 0)$ .

当  $H = \xi^2/4\eta_0$  时,有  $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\xi x^2 - \frac{1}{4}\eta_0 x^4 = \xi^2/4\eta_0$ ,这时有一对异宿轨道把两个鞍点  $P_2 = (-\sqrt{\xi/\eta_0}, 0)$  和  $P_3 = (\sqrt{\xi/\eta_0}, 0)$  连成异宿闭环.异宿轨道为  $q_\pm(t)$  并且满足  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_\pm(t) = P_{2,3}$ .所以异宿闭轨

为  $\Gamma = \{P_2 \cup \{q_{\pm}(t) | t \in R\} \cup P_3\}$ , 其中  $q_{\pm}(t)$  的参数方程可表示如下:

$$x_{\pm}(t) = \sqrt{\xi\eta_0} \frac{e^{\pm 2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)} - 1}{e^{\pm 2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)} + 1},$$

$$y_{\pm}(t) = 4 \frac{\xi}{\eta_0} \frac{e^{\pm 2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)}}{(e^{\pm 2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)} + 1)^3},$$

其相轨迹如图 10 所示.

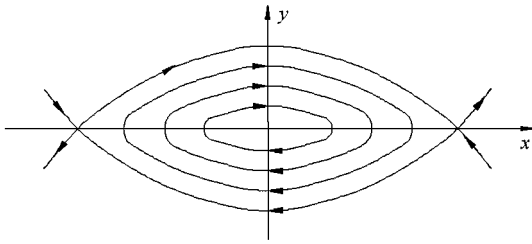


图 10 相平面(x-y)上的异宿轨道

下面分析未扰系统在受小摄动, 并且限制在不变流形  $M$  上的动力学行为. 从文献 [9] 的结论可以知道, 在足够小的  $\varepsilon > 0$  扰动下,  $M$  沿着稳定和不变流形是不变的, 摄动成  $M_{\varepsilon}$ , 且  $M_{\varepsilon} = M = (\pm\sqrt{\xi/\eta_0}, 0)$ . 对于系统的全局扰动分析都可以限制在不变流形  $M$  上进行. 扰动后的相图如图 11 所示.

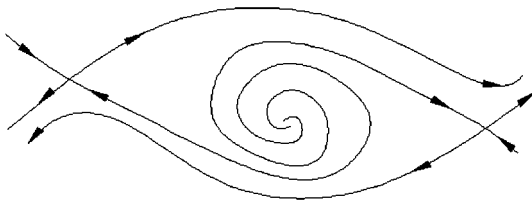


图 11 扰动后的双曲流形

由异宿闭轨的参数方程, 将其 Melnikov 函数定义为<sup>[9]</sup>

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\pm}(t) \left[ f_2 \cos\left(\frac{1}{2}\omega_1 t\right) \right.$$

$$\left. - f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0)x - 2\mu(1-x^2)y - \alpha x^3 \right] dt,$$

即  $M(t_0) = F$ , 其中

$$F = -4 \frac{\xi}{\eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)} \frac{F_1}{F_2} dt,$$

$$F_1 = f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0) \sqrt{\xi/\eta_0} e^{2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)}$$

$$- f_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0) \sqrt{\xi/\eta_0}$$

$$- f_2 \cos(\omega_1 t/2) e^{2\sqrt{\xi/\eta_0}t}$$

$$- f_2 \cos(\omega_1 t/2),$$

$$F_2 = (e^{2\sqrt{\xi/\eta_0}(t+t_0)} + 1)^3.$$

如果  $M(t_0)$  即  $F$  存在一阶零点, 那么扰动系统的稳定流形与不稳定流形将横截相交, 系统运动可能出现分岔. 若取定与第 2.3 节相同的参数, 即  $\xi = 1.0$ ,  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\omega_1 = 2.01$ ,  $\theta_0 = 5.44$ ,  $f_2 = 0.5$  代入上式, 在相应的初始条件下可求得当  $f_1 = 2.55$  时  $M(t_0) = 0$ , 说明此时系统运动可能混沌, 且该值与图 4(a) 所示的混沌出现的参数条件基本符合.

## 5. 结 论

由于复合非线性振子中存在着不同的非线性结构, 各种经典的非线性特性都会在系统的演化过程中或多或少地呈现出来. 同时复合振子又包含多个频率因素, 不同频率间的相互作用导致系统出现概周期解, 并由周期解直接进入混沌, 即 Smale 马蹄意义下的混沌. 通过比较一、二次近似下系统解的形式及其稳定性, 验证了利用一次近似解分析问题的有效性及可行性. 依据全局扰动方法, 分析了系统的同宿轨和异宿轨分岔, 计算了其轨道方程, 通过构造 Melnikov 函数给出了系统产生混沌的一个必要条件.

- [1] Sanchez N E, Nayfeh A H 1990 *International Journal of Nonlinear Mechanics* **25** 163
- [2] Ashkenazy Y, Goren C, Horwitz L P 1998 *Phys. Lett. A* **243** 195
- [3] El-Dib Y O 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **12** 705
- [4] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag)

- [5] Chen Y S, Leung A Y T 1998 *Bifurcation and Chaos in Engineering* (London: Springer-verlag)
- [6] [陈予恕 2002 非线性振动 (北京: 高等教育出版社)]
- [7] Mo J Q, Chen L H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4646 (in Chinese) [莫嘉琪、陈丽华 2008 物理学报 **57** 4646]
- [8] Shi P M, Liu B, Liu S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4675 (in Chinese)

- [ 时培明、刘 彬、刘 爽 2008 物理学报 57 4675 ]
- [ 9 ] Wiggins S 1988 *Global bifurcation and chaos : analytical methods* ( New-York : Springer-Verlag )
- [ 10 ] Zhang Q C ,Wang W ,He X J 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 5384 ( in Chinese )[ 张琪昌、王 伟、何学军 2008 物理学报 57 5384 ]
- [ 11 ] Ji Y ,Bi Q S 2008 *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **9** 1261
- [ 12 ] Hu H Y 2000 *Applied nonlinear dynamics* ( Beijing : Aviation Industry Press )p57 ( in Chinese )[ 胡海岩 2000 应用非线性动力学(北京 航空工业出版社 第 57 页 )

## Bifurcation analysis of a compound oscillator with parametric and external excitation \*

Ji Ying Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

( Faculty of Science ,Jiangsu University ,Zhenjiang ,Jiangsu 212013 ,China )

( Received 25 October 2008 ; revised manuscript received 25 November 2008 )

### Abstract

The dynamics of a compound oscillator with parametric and external excitation has been investigated. Local bifurcation analysis of the first order approximation shows that simple bifurcation as well as Hopf bifurcation may take place ,as have been observed in the original system. The influence of several parameters on the dynamics has been explored ,which reveals that different nonlinear behaviors can be obtained with the variation of the parameters. Furthermore ,by employing global bifurcation theory ,the necessary conditions for homoclinic and heteroclinic bifurcation has been presented ,which agrees well with the numerical results .

**Keywords** : compound oscillator , local bifurcation , global bifurcation , chaos

**PACC** : 0545

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China ( Grant Nos. 20476041 ,10602020 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail iqbi@ujs.edu.cn