

# 环形加权网络的时空混沌延迟同步<sup>\*</sup>

李 岩<sup>1)</sup> 吕 翎<sup>1)†</sup> 栾 玲<sup>2)</sup>

1) 辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

2) 大连大学物理科学与技术学院, 大连 116622)

(2008 年 11 月 15 日收到, 2008 年 12 月 1 日收到修改稿)

研究了环形加权网络的时空混沌延迟同步问题. 以随时间和空间演化均呈现混沌行为的时空混沌系统作为网络的节点, 通过环形加权连接使所有节点建立关联. 基于线性稳定性定理, 通过确定网络的最大 Lyapunov 指数, 得到了实现网络延迟同步的条件. 在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内, 任取节点之间耦合强度的权重值, 均可以使整个网络实现延迟同步. 采用具有时空混沌行为的自催化反应扩散系统作为网络节点, 仿真模拟验证了该方法的有效性.

关键词: 延迟同步, 加权网络, 时空混沌, Lyapunov 指数

PACC: 0545

## 1. 引 言

最近, 复杂网络的相关研究吸引了国内外众多学者极大的关注<sup>[1-8]</sup>. 尤其是由于复杂网络的同步研究有着重要的应用价值, 从而使其成为目前物理学、通信等许多科学领域的热点问题. 如激光混沌具有宽带谱能够加密数据、光子难以被篡改保密性强以及激光具有最小色散和较小衰减等优势, 它非常适合于研究信息的获取、传递、处理、存储和显示, 因此, 可以利用激光混沌系统构成复杂网络的同步进行远程通信. 国内外学者在复杂网络的同步研究方面进行了许多有益的工作, 并取得了若干有价值的研究成果. Jiang 等研究了确定性小世界网络的超混沌同步规律<sup>[9]</sup>; Li 等研究了小世界网络中存在延迟耦合项的同步问题<sup>[10]</sup>; Wang 等完成了小世界网络和无标度网络的混沌同步研究<sup>[11]</sup>; Li 研究了不同的随机复杂网络统一同步的临界状态<sup>[12]</sup>; Motter 等研究了耦合强度对复杂网络同步能力的影响<sup>[13]</sup>; Checco 等完成了随机网络的同步研究<sup>[14]</sup>; Haken 完成了脉冲耦合神经网络的混沌同步研究<sup>[15]</sup>; 秦洁等实现了超混沌 Rössler 系统构成星型网络的混沌同步<sup>[16]</sup>.

在复杂网络的同步研究中, 值得关注的问题是, 由于复杂网络中节点数目的庞大, 因此, 实际网络各节点间混沌系统的同步难免在时间上存在延迟. 另外, 实际网络几乎都是加权网络, 即考虑节点之间相互作用的连接存在不同权重的网络. 由此看来, 研究加权网络的混沌延迟同步会更有实用价值一些. 本文研究了环形加权网络的时空混沌延迟同步问题. 以随时间和空间演化均呈现混沌行为的时空混沌系统作为网络的节点, 通过环形加权连接使所有节点建立关联. 基于线性稳定性定理, 通过确定网络的最大 Lyapunov 指数, 得到了实现网络延迟同步的条件. 在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内, 任取节点之间耦合强度的权重值, 均可以使整个网络实现延迟同步. 采用具有时空混沌行为的自催化反应扩散系统作为网络节点, 仿真模拟验证了该方法的有效性.

## 2. 网络同步原理

考虑一个由  $N$  个相同的时空混沌系统作为节点的复杂网络, 其中第  $i$  个节点在  $t$  时刻的状态方程为

$$\frac{\partial x_i(r, t)}{\partial t} = F(x_i(r, t))$$

<sup>\*</sup> 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147)以及辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

$$+ k_i \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x_j(r, t)), \quad (1)$$

其中  $x_i(r, t) = (x_{i1}(r, t), x_{i2}(r, t), \dots, x_{in}(r, t)) \in \mathbf{R}^n$  为节点  $i$  的状态变量,  $r, t$  为系统的空间和时间变量,  $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, H: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  为各节点状态变量之间的内部耦合函数,  $k_i$  为网络的耦合强度. 对于加权网络, 各节点的  $k_i$  值不同, 以表示网络节点之间相互作用的强度差异和不同影响的权重.  $G_{ij}$  表示耦合矩阵  $G$  的矩阵元, 它的具体表示因网络的连接类型而异, 代表网络的拓扑结构. 本文采用单变量环形连接, 内部耦合函数  $H(x_j(r, t)) = x_j(r, t)$ , 耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

为了确定整个网络实现延迟同步的条件, 对上述环形加权网络进行线性稳定性分析. 假设当  $x_1(r, t - \tau_1) = x_2(r, t - \tau_2) = \dots = x_N(r, t - \tau_N) = x_s$  时 ( $\tau_i$  为时间延迟量), 整个网络达到延迟同步. 在同步状态  $x_s$  附近对网络状态方程 (1) 进行线性化, 可以得到

$$\frac{\partial \delta x_i}{\partial t} = DF(x_s) \delta x_i + k_i \sum_{j=1}^N G_{ij} \delta x_j, \quad (3)$$

其中  $\delta x_i$  是节点  $i$  在同步状态  $x_s$  附近的变分,  $DF(x_s)$  是函数  $F$  的 Jacobi 矩阵.

为了方便计算, 将 (3) 式表示成矩阵的形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta x = DF(x_s) \delta x + k \delta x G^T, \quad (4)$$

这里,  $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N) \in \mathbf{R}^N$ .

根据 Jordan 标准型理论<sup>[17]</sup>, 对于任意的  $N \times N$  维矩阵  $G$ , 存在一个正则矩阵  $\psi$ , 可以将  $G$  转换成 Jordan 标准型

$$\bar{G} = \psi^{-1} G \psi. \quad (5)$$

设矩阵  $G$  的本征值为  $\eta$ , 令  $\xi = \delta x (\psi^{-1})^T$ , 则 (4) 式可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = [DF(x_s) + k\eta] \xi. \quad (6)$$

注意到  $\sum_{j=1}^N G_{ij} = 0, \eta = 0$  总是  $G$  的一个本征值. 这样, 我们只需要利用 (6) 式计算网络各节点状态方程的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}^{(i)}$  即可决定整个网络

的稳定性. 只要所有节点所对应的最大 Lyapunov 指数全部小于零, 网络的延迟同步就得以实现.

### 3. 仿真实例分析

采用 Lynch 研究的自催化反应扩散系统作为实例, 进行上述网络同步原理的仿真实现. 这个自催化反应扩散系统的状态方程为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(r, t)}{\partial t} &= 1 - x_1(r, t) \\ &\quad - a_1 x_1(r, t) x_3^2(r, t) \\ &\quad + d_1 \nabla^2 x_1(r, t), \\ \frac{\partial x_2(r, t)}{\partial t} &= \beta - x_2(r, t) \\ &\quad - a_2 x_2(r, t) x_3^2(r, t) \\ &\quad + d_2 \nabla^2 x_2(r, t), \\ \frac{\partial x_3(r, t)}{\partial t} &= 1 - (1 + a_3) x_3(r, t) \\ &\quad + \alpha [a_1 x_1(r, t) + a_2 x_2(r, t)] \\ &\quad \times x_3^2(r, t) + d_3 \nabla^2 x_3(r, t), \quad (7) \end{aligned}$$

其中参量  $a_1 = 18000, a_2 = 400, a_3 = 80$ . 扩散系数  $d_1 = 1.0, d_2 = 1.0, d_3 = 0.01$ .

在对时空动力学系统复杂行为的描述中, Lyapunov 指数是区分不同种类复杂行为的重要刻划量. 根据 Lyapunov 指数的定义, 保持上述系统参量数值不变, 同时取参量  $\beta = 2.93$ , 作出系统的最大 Lyapunov 指数随参量  $\alpha$  的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示参量  $\alpha = 1.5$  处的最大 Lyapunov 指数为正值, 表明在该参量下系统处于时空混沌态. 此时系统状态变量的时空演化如图 2—4 所示.

以节点数  $N = 3$  构成的环形加权网络进行网络同步的仿真模拟. 单个节点的状态方程为 (7) 式所描述的自催化反应扩散时空混沌系统, 三个节点处自催化反应扩散时空混沌系统状态变量分别取  $(x_1(r, t), x_2(r, t), x_3(r, t)) (y_1(r, t), y_2(r, t), y_3(r, t)) (z_1(r, t), z_2(r, t), z_3(r, t))$ . 在单变量环形连接下, 耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

在模拟过程中, 加权网络中各参量值的选择保持不变, 状态变量初始值取  $x_1(r, 0) = 0, x_2(r, 0) = 0, x_3(r, 0) = 0, y_1(r, 0) = 0.05, y_2(r, 0) = 0.01,$

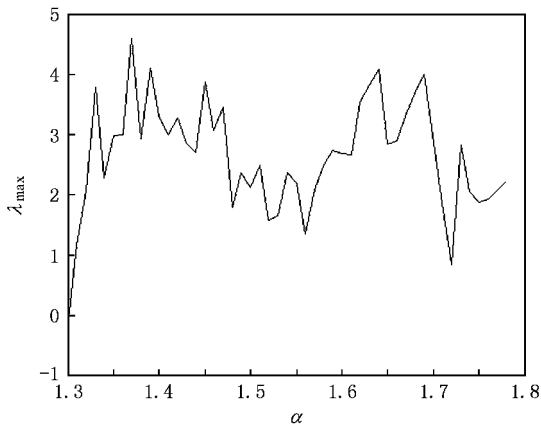


图 1 最大 Lyapunov 指数随参量 α 的演化

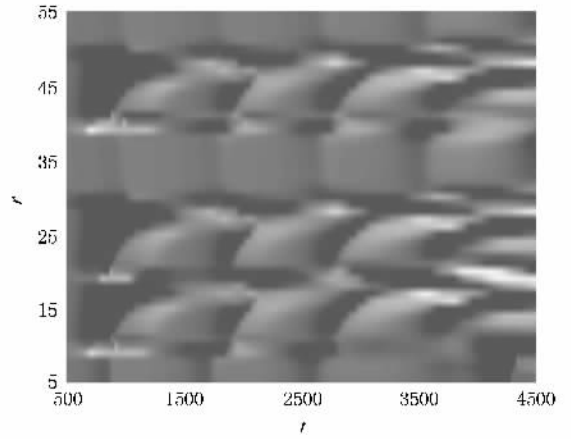


图 4 状态变量  $x_3(r, t)$  的时空演化

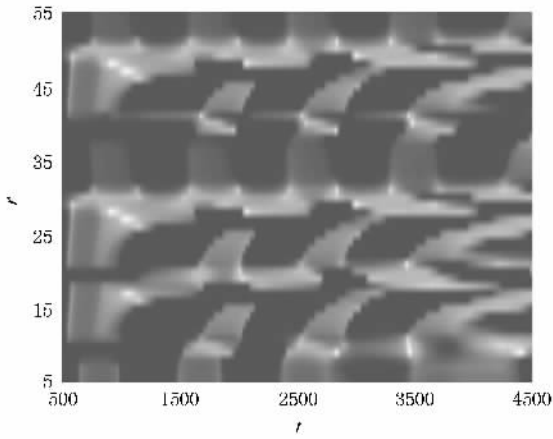


图 2 状态变量  $x_1(r, t)$  的时空演化

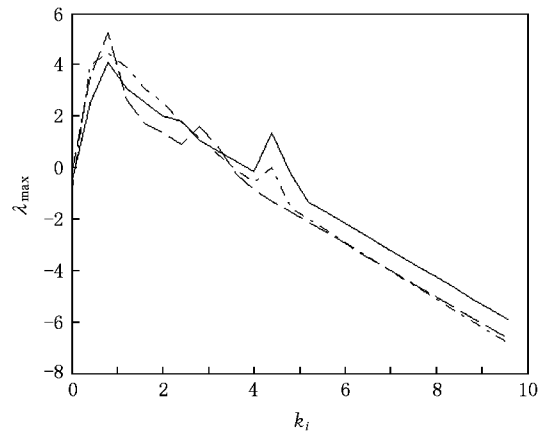


图 5 最大 Lyapunov 指数随耦合参量  $k_i$  的演化

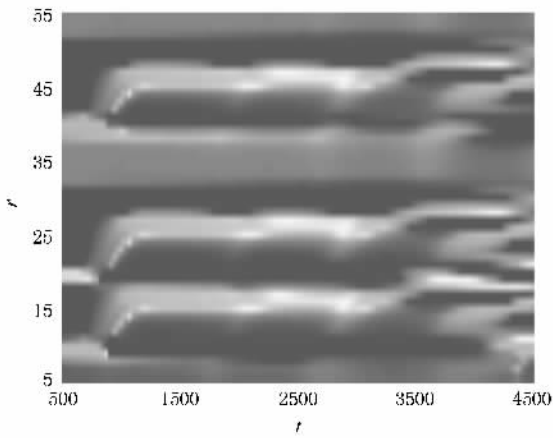


图 3 状态变量  $x_2(r, t)$  的时空演化

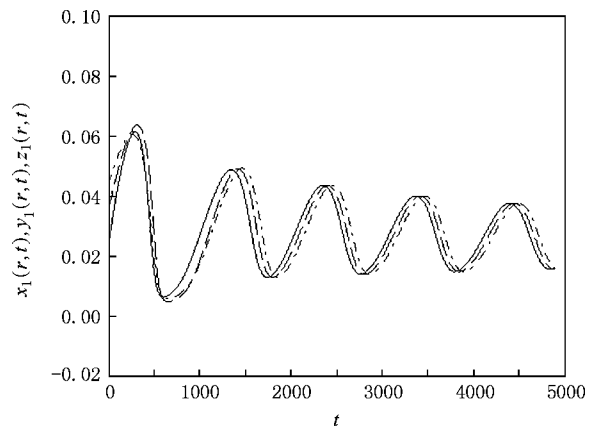


图 6 状态变量  $(x_1, y_1, z_1)$  随时间的演化

$y_3(r, 0) = 0.03, z_1(r, 0) = 0.02, z_2(r, 0) = 0.03,$   
 $y_3(r, 0) = 0.04.$  任取时间延迟量  $\tau_1 = 100, \tau_2 = 50,$

$\tau_3 = 0.$  仿真模拟各节点状态方程的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}^{(i)}$  随网络耦合强度参量  $k_i$  的变化关系如图 5

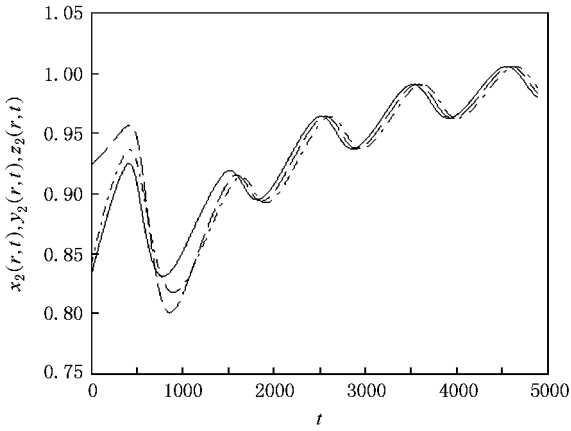


图 7 状态变量  $(x_2, y_2, z_2)$  随时间的演化

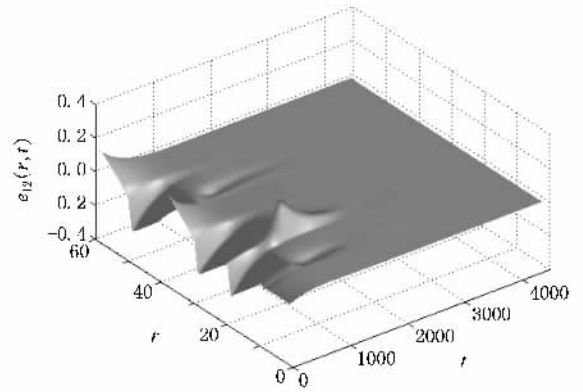


图 10 误差变量  $e_{12}(r, t)$  的时空演化

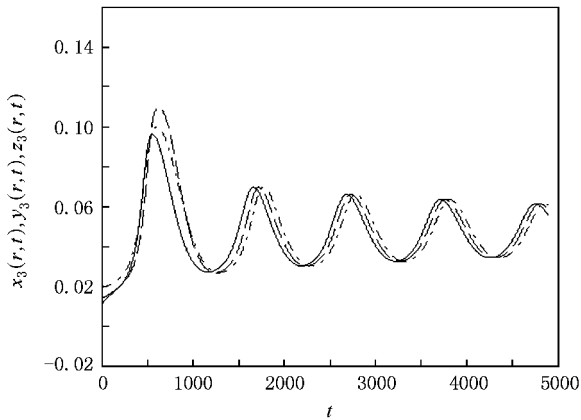


图 8 状态变量  $(x_3, y_3, z_3)$  随时间的演化

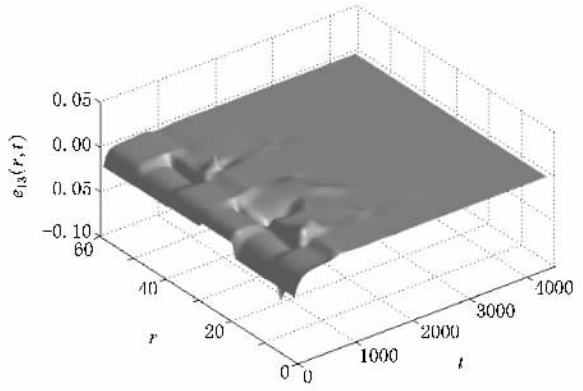


图 11 误差变量  $e_{13}(r, t)$  的时空演化

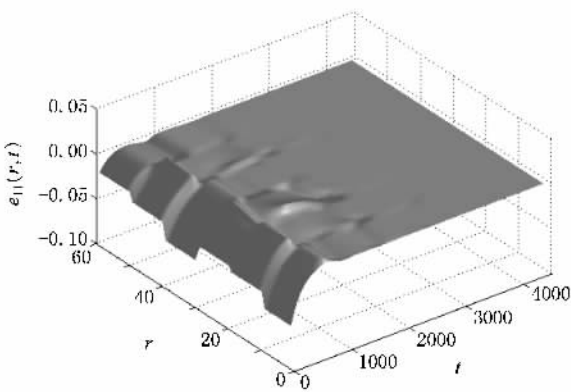


图 9 误差变量  $e_{11}(r, t)$  的时空演化

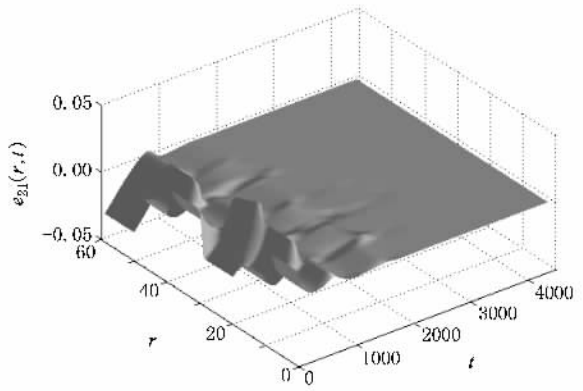
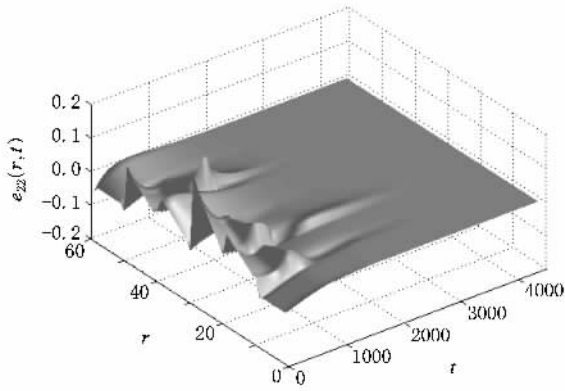
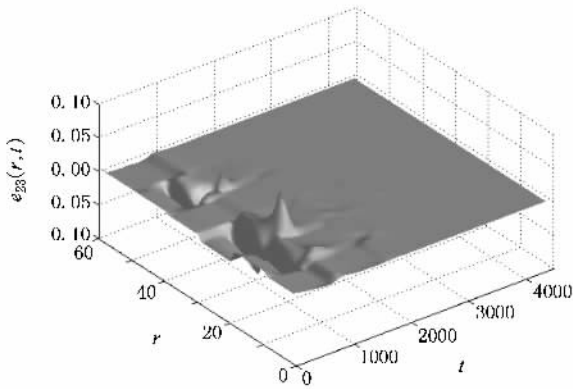


图 12 误差变量  $e_{21}(r, t)$  的时空演化

所示,其中节点 1 的最大 Lyapunov 指数以实线表示,节点 2、3 的最大 Lyapunov 指数分别以虚线和点划线表示.由前一节的线性稳定性分析可知,只有在网络各节点状态方程的最大 Lyapunov 指数小于零的区

域,整个加权网络才能达到延迟同步.这里,我们在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内任取网络耦合强度的权重值  $k_1 = 6, k_2 = 7, k_3 = 8$ ,此时网络中各节点状态方程在空间第 25 个格点处状态变量随时间的演化如图 6—8 所示,同样以实线、虚线和点划线表示节点 1、2、3 状态变量随时间的演化规律.图

图 13 误差变量  $e_{22}(r, t)$  的时空演化图 14 误差变量  $e_{23}(r, t)$  的时空演化

6—8 显示, 经过短暂的时间序列后, 网络中各节点所对应的状态变量随时间的演化轨迹完全一致, 仅仅在时间上存在一个相对的延迟, 整个网络的延迟同步得以实现. 为了更清楚地显示这种同步状态, 定义网络节点之间状态变量的误差信号  $e_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13})^T = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)^T$ ,  $e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T = (y_1 - z_1, y_2 - z_2, y_3 - z_3)^T$ , 仿真模拟这些误差信号随时空的演化结果如图 9—14. 图 9—14 显示, 整个加权网络达到延迟同步后, 网络节点之间状态变量的误差信号均趋于零, 并且随着时空演化, 误差曲线一直保持平稳, 无跳跃和振荡行为, 网络的延迟同步稳定性良好.

## 4. 结 论

采用具有时空混沌行为的自催化反应扩散系统作为网络节点, 在环形加权连接下构成复杂网络. 基于线性稳定性定理, 理论分析了整个环形加权网络实现时空混沌延迟同步的条件. 进一步仿真模拟网络各节点状态方程的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}^{(i)}$  随耦合强度参量  $k_i$  的变化关系, 在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内, 任取节点之间耦合强度的权重值, 均可以使整个网络实现延迟同步, 并且整个网络中误差信号经过短暂的时间序列以后始终平稳地趋于零.

- [ 1 ] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
- [ 2 ] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26118
- [ 3 ] Stelling J, Klamt S, Bettenbrock K, Chuster S, Gilles E D 2002 *Nature* **420** 190
- [ 4 ] Ravasz E, Barabasi A L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 26112
- [ 5 ] Huberman B A, Adamic L A 1999 *Nature* **401** 131
- [ 6 ] Vazquez A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 66130
- [ 7 ] Adamic L A, Huberman B A 2000 *Science* **287** 2115
- [ 8 ] Barabasi A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [ 9 ] Jiang P Q, Wang B H, Bu S L, Xia Q H, Luo X S 2004 *J. Modern Phys. B* **18** 2674
- [ 10 ] Li C, Chen G R 2004 *Physica A* **343** 236
- [ 11 ] Wang X F, Chen G R 2000 *J. Bif. Chaos* **10** 187
- [ 12 ] Li X 2006 *Physica A* **360** 629
- [ 13 ] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 16116
- [ 14 ] Checco P, Bieya M, Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562
- [ 15 ] Haken H 2005 *Physica D* **205** 1
- [ 16 ] Qin J, Yu H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6828 ( in Chinese ) [ 秦 洁、于洪洁 2007 物理学报 **56** 6828 ]
- [ 17 ] Yang M, Liu X Z 2005 *Matrix Theory* ( Wuhan: Huazhong university of science and technology publishing house ) ( in Chinese ) [ 杨 明、刘先忠 2005 矩阵论 ( 武汉: 华中科技大学出版社 ) ]
- [ 18 ] Lynch D T 1992 *Chem. Eng. Sci.* **47** 4435



# Lag synchronization of spatiotemporal chaos in a weighted network with ring connection<sup>\*</sup>

Li Yan<sup>1)</sup> Lü Ling<sup>1)†</sup> Luan Ling<sup>2)</sup>

<sup>1</sup> *College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*

<sup>2</sup> *Physical Science and Technology Institute, Dalian University, Dalian 116622, China*

(Received 15 November 2008 ; revised manuscript received 1 December 2008)

## Abstract

Lag synchronization of spatiotemporal chaos in a weighted network with ring connection is studied in this paper. Spatiotemporal chaos systems are taken as the nodes of the network, and connections between the nodes are made through a weighted ring. According to stability theory, the condition to realize lag synchronization of the network is obtained by identifying the maximum Lyapunov exponent of the network. Lag synchronization exists in the whole network when the largest Lyapunov exponent is less than zero, and the coupling strength between the nodes can be given any weight value. Autocatalytic reaction-diffusion chaotic systems are taken as the nodes of the network, and simulation results show the effectiveness of the method.

**Keywords** : lag synchronization, weighted network, spatiotemporal chaos, Lyapunov exponent

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee (Grant No. 2008T108).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: lluling1960@yahoo.com.cn