

一个大范围超混沌系统的生成和电路实现*

贾红艳^{1)‡} 陈增强^{1)‡} 袁著祉¹⁾

1) 南开大学自动化系, 天津 300071)

2) 天津科技大学自动化系, 天津 300222)

(2008 年 11 月 30 日收到, 2008 年 12 月 10 日收到修改稿)

在对一些已有的超混沌系统研究和分析的基础上, 提出了一个新的四维自治的超混沌系统, 这个超混沌系统是通过引入一个状态变量到一个三维自治混沌系统而生成的, 它较已有的超混沌系统而言, 不仅最大的 Lyapunov 指数要大一些, 而且在参数变化时, 呈现超混沌的参数范围也很大. 在对该系统进行数值仿真和分形分析的同时, 也通过模拟电路对其进行了验证, 电路实验结果表明, 在电路中分别呈现的周期、伪周期、混沌、超混沌特性与数值仿真中获得的结果是一致的.

关键词: 超混沌, 分形分析, 超混沌电路, Lyapunov 指数

PACC: 0545

1. 引 言

Rossler 在 1979 年提出了超混沌这一现象^[1], 在随后的几十年里, 尤其是当 1999 年 Chen 等通过状态反馈的方法将一个不混沌的 Lorenz 系统控制成一个混沌系统以后^[2], 在很多领域, 混沌、超混沌研究吸引了越来越多的注意. 这些领域包括控制^[3-5]、同步^[6]、通讯^[7]和非线性电路^[8]等. 由于超混沌系统的特点和很好的应用前景, 它的生成和分析也越来越受到关注^[9-12].

通常认为, 混沌系统和超混沌系统区分的主要依据是 Lyapunov 指数, 当一个四维连续系统有两个正的 Lyapunov 指数, 一个零和一个负的 Lyapunov 指数时, 系统是超混沌的; 当一个四维连续系统有一个正的 Lyapunov 指数, 一个零和两个负的 Lyapunov 指数时, 系统是混沌的.

在著名的 Lorenz 系统基础上, 研究人员相继提出了一些超混沌系统. Li 等通过在 Lorenz 系统的第二个方程加入状态反馈控制器设计了一个超混沌系统^[13], Gao 等通过在三维自治的 Lorenz 系统的第二个方程加入非线性控制器获得了一个新的超混沌系

统^[14]. 在 Gao 的基础上 Cang 等提出了一个四维非自治的超混沌系统^[15], 这三个系统的共同优点是都具有非常复杂的动态特性, 这些特性包括混沌、超混沌、周期、和伪周期. 同时它们都是通过 Lorenz 系统产生的, 在结构上较为简单, 在物理上很容易实现, 具有很好的实际研究意义. 但是它们的两个最大的 Lyapunov 指数都比较小, 文献 [13] 提出的系统的第一大 Lyapunov 指数在 0.5 左右, 第二大 Lyapunov 指数在 0.2 左右; 文献 [14] 提出的系统的第一大 Lyapunov 指数在 [0.5, 1] 之间, 第二大 Lyapunov 指数要小于 0.2. 文献 [15] 提出的系统的第一大 Lyapunov 指数在 0.5 左右, 第二大 Lyapunov 指数要小于 0.1. 另外, 当特性参数变化时, 这三个系统的超混沌范围不是很大. 文献 [13] 提出的系统呈现超混沌特性的可变参数范围为 [0.22 和 37.42], 文献 [14] 提出的系统呈现超混沌特性的可变参数范围为 [0, 0.2]. 文献 [15] 提出的系统呈现超混沌特性的可变参数范围为 [3.8, 4.1] 和 [5.88, 6.15].

近几年, 研究工作者又相继提出了一些新的混沌系统, Chen 等, Liu 等和 Wang 等提出了分数阶混沌系统^[16-18], Wang 和 Qi 等也提出了几个不同的混沌系统, 同时进行了详细地分析^[19-21]. 这些系统都

* 国家自然科学基金(批准号 60774088, 10772135), 教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-2005-229), 教育部科学技术研究重点项目(批准号: 107024), 天津市应用基础及前沿技术研究计划项目(批准号: 08JCZDJC21900)资助的课题.

† E-mail: jiahay@tust.edu.cn

‡ E-mail: chenzz@nankai.edu.cn

具有非常复杂的动态特性.

在文献 19 提出的系统基础上,Chen 等通过在其第二个方程加入状态反馈获得了一个奇异的只有一个平衡点的超混沌系统²².同时 Wang 等也在文献 19 提出的系统基础上,通过在第二项中加入另一个状态反馈构造了另一个超混沌系统²³,该系统的平衡点有 5 个.比起本文中前面提到的文献 13—15 的超混沌系统,这两个系统的最大的 Lyapunov 指数要大一些.同时,当参数变化时,它们呈现超混沌特性的参数范围也要大一些.文献 22 提出的系统的第一大 Lyapunov 指数在 [2 , 4] 之间,第二大 Lyapunov 指数在最大处也大于 0.5,文献 23 提出的系统的第一大 Lyapunov 指数在 [0.5 , 1] 之间,第二大 Lyapunov 指数也大于 0.2.文献 22 提出的系统呈现超混沌特性的可变参数范围为 [0 , 171] 和 [241 , 297],文献 23 提出的系统呈现超混沌特性的可变参数范围要小一些.但非常遗憾地是这两个系统没有通过电路实现.

基于上述研究,本文提出了一个新的四维自治超混沌系统,这个超混沌系统是在文献 19 提出的三维自治混沌系统的基础上引入一个状态反馈到它的第二个方程而得到的.这个超混沌系统的 Lyapunov 指数比本文中提到的每一个系统都要大,另外,当特性参数变化时,它的混沌和超混沌域也是最大的.这个超混沌系统具有非常复杂的动态特性,当可变参数 k 变化时,它可能是周期的、伪周期的、混沌的或超混沌的.在对这个超混沌系统进行分形分析和数值仿真的同时,本文也针对这个超混沌系统设计了相应的电路.分别从数学、数值仿真和电路实现三个方面论证了该超混沌系统的性能.

2. 一个大范围超混沌系统

2.1. 一个大范围超混沌系统的产生

最近, Qi 等在 Lorenz 系统的基础上,提出了一个三维自治的混沌系统¹⁹

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + yz, \\ \dot{y} &= cx - xz - y, \\ \dot{z} &= xz - bz, \end{aligned} \tag{1}$$

它有 5 个平衡点,能产生非常复杂的动态特性,这些特性包括 Hopf 分岔,双周期分岔,周期轨等.现在加一个状态 w 反馈到这个系统的第二个方程,就产生

了一个新的四维自治系统.当选择合适的 a, b, c, d, k 时,这个系统就可能产生各种复杂现象,这个新的具有超混沌特性的系统可以通过方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + yz, \\ \dot{y} &= cx - y - xz + w, \\ \dot{z} &= dxy - bz, \\ \dot{w} &= -ky + 0.5xy, \end{aligned} \tag{2}$$

$(x, y, z, w) \in \mathcal{R}^4, a, b, c, d, k \in \mathcal{R}$, 在本文的研究中,取参数 $a = 50, b = 5, c = 100, d = 5, k$ 是可变化的.本文中主要讨论了 $k \in [10, 1000]$ 之间系统的特性.

2.2. 超混沌系统 (2) 的基本特性分析

2.2.1. 耗散性

对于系统 (2) 有

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial w} \\ &= -a - 1 - b, \end{aligned}$$

当 $a + b + 1 > 0$ 时,系统是耗散的,这说明当选取参数满足上述条件时,系统的状态变化是有界的.

2.2.2. 平衡点分析

根据平衡状态的特点可以求出该系统的平衡点,系统 (2) 的平衡状态方程为

$$\begin{aligned} a(y - x) + yz &= 0, \\ cx - y - xz + w &= 0, \\ dxy - bz &= 0, \\ -ky + 0.5xy &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

很明显 $(0, 0, 0, 0)$ 是系统的一个平衡点,它与系统参数 a, b, c, d, k 无关.

如果令 $e = 2ak, f = \frac{2dk}{b}$, 那么可得到系统的另外的平衡点为

$$\left(2k, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4fe}}{2f}, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4fe}}{2}, -2ck + \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4fe}}{2f} + k(-a \pm \sqrt{a^2 + 4fe}) \right).$$

2.3. 超混沌系统的分形分析

当 $a = 50, c = 100, b = 5, d = 5$ 时,变化 k 可以得到如图 1 所示的 Lyapunov 指数图和分岔图.本文中的指数图和分岔图都是在 $k \in [10, 1000]$ 之间获得的.需要说明的是系统 (2) 的第四个 Lyapunov 指数是一个比较大的负数,在图 1 中没有列出.从对图 1

的分析中,可以看到当参数 k 取值相同时,它们从各自角度所展现的系统特性是一致的.使一个系统呈现超混沌特性,需要满足两个条件:1)如果系统是连续自治的,那么系统的维数应该大于或等于4.2)超混沌系统中耦合的方程导致不稳定的维数至少为2维,其中之一必须包含非线性项.本文中研究的超混沌系统(2)的维数是4维,这是连续自治系统产生超混沌的最小维数.另外,通过对图1所示的指数图和分岔图分析,在呈现超混沌特性时,

系统(2)的最大的 Lyapunov 指数基本上大于或等于3,第二大 Lyapunov 指数在最大时也要超过0.5.当 $k \in [10, 1000]$ 之间时,在 $[16.2, 480]$ 这个区间上除了几个特别点之外,系统(2)都呈现超混沌特性.本文中根据这个特点将系统(2)称为大范围的超混沌系统.该系统无论从两个最大的 Lyapunov 指数上,还是从呈现超混沌特性的可变参数范围上都明显优于本文中提到的几个超混沌系统.

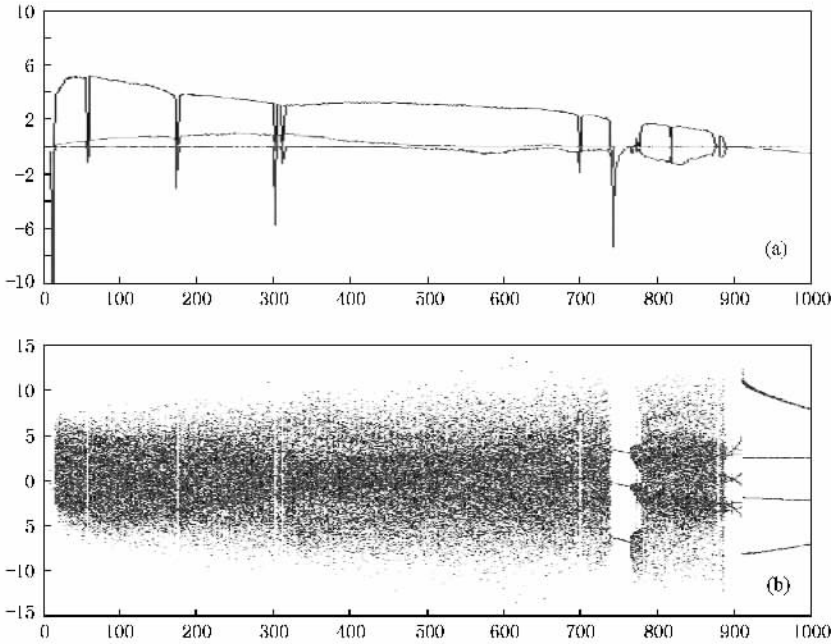


图1 Lyapunov 指数图和分岔图 ($k \in [10, 1000]$) (a) Lyapunov 指数图 (b) 分岔图

混沌系统和超混沌系统从相轨迹上很难区分,一般都是通过系统的 Lyapunov 指数来区分.对于一个四维连续自治的系统,在它的四个 Lyapunov 指数中,当最大的 Lyapunov 指数为零,其他三个 Lyapunov 指数为负时,系统是周期的;当两个最大的 Lyapunov 指数都为零,其他两个 Lyapunov 指数为负时,系统是伪周期的;当最大的 Lyapunov 指数为正,其他三个 Lyapunov 指数中,有一个为零,其余为负时,系统是混沌的;当有两个最大的 Lyapunov 指数为正,其他两个 Lyapunov 指数中有一个为零,有一个为负时,系统是超混沌的.

根据如上规则,针对系统(2)得到如下结论:

1)当参数满足 $k \in [10, 16.1] [57.3, 60.1] [174.5, 177.5] [302, 305] [311.6, 313.2] [699, 701.8] [738.9, 772.5] [818, 819.5] [875, 881.9] [887.8, 1000]$ 系统(2)是周期的.

2)当参数满足 $k \in [480, 698.9] [701.9, 738.8] [772.6, 774.9] [775.1, 776.5] [776.9, 817.9] [819.6, 875.7] [882, 887.7]$ 系统(2)是混沌的.

3)当参数满足 $k \in [16.2, 17] [17.2, 26.5] [26.7, 57.2] [59.2, 59.5] [61, 174.3] [177.6, 301.9] [305.1, 311.5] [313.3, 480]$ 系统(2)是超混沌的.

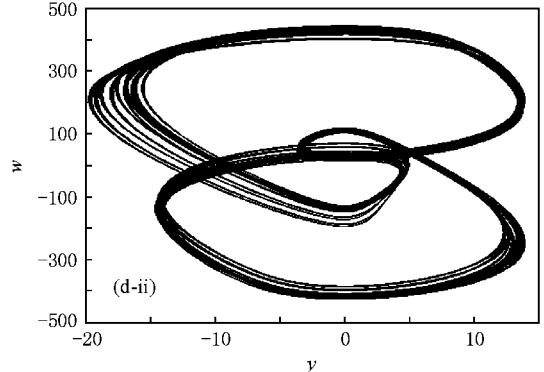
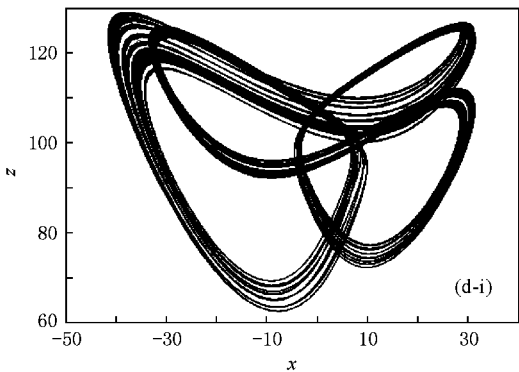
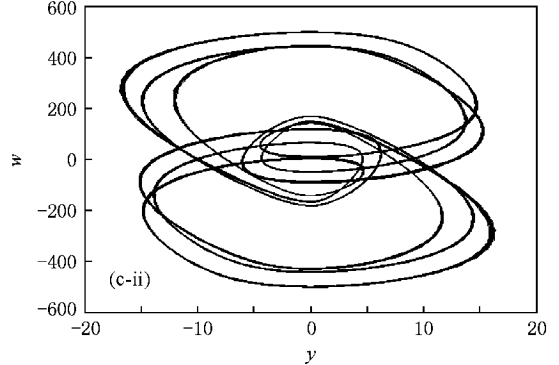
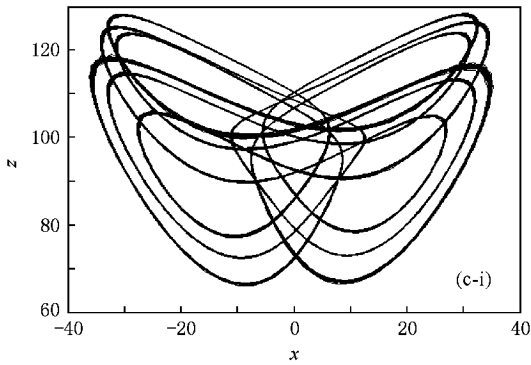
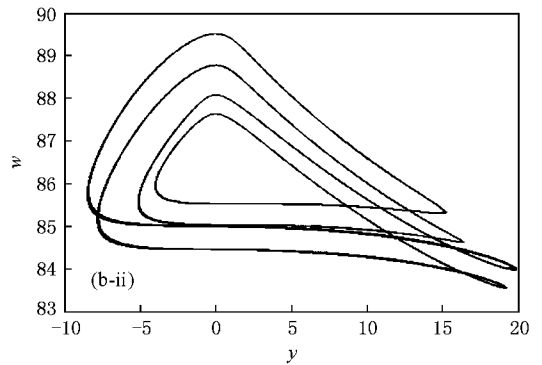
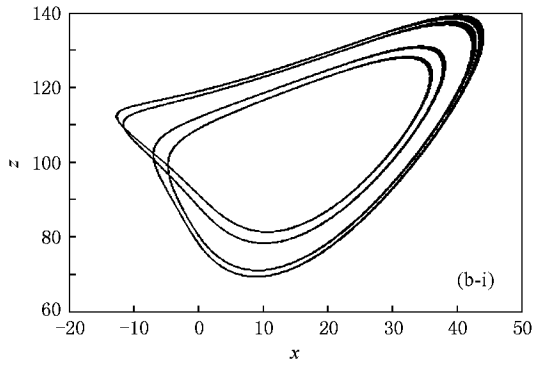
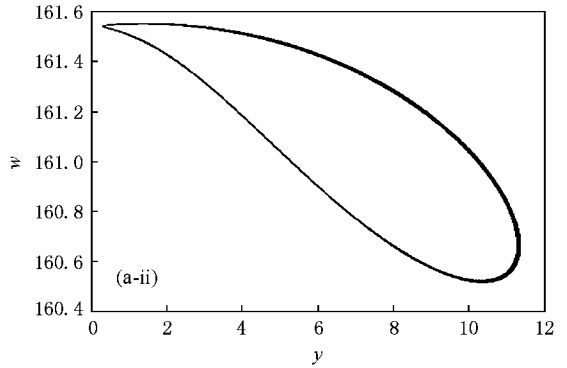
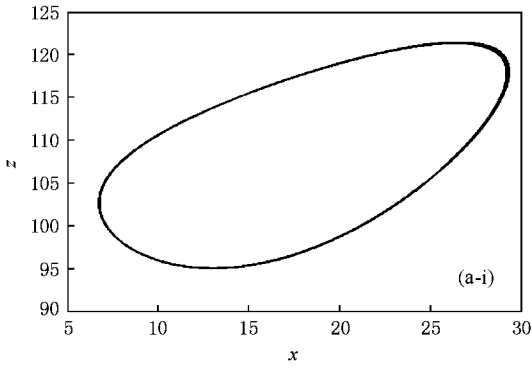
4)当参数满足 $k \in \{738.9 [764, 769]\}$ 系统(2)是伪周期的.

为了说明系统(2)中周期、伪周期、混沌、超混沌各自轨迹的特点,本文中分别取了 $k = 10, 16.1, 768.9, 910, 100, 580$, 并对在这些 k 值上的相轨迹进行数值仿真.

本文仅在图2中给出了 $x-z$ 和 $y-w$ 平面的相轨迹,其中当 $k = 10, 16.1, 910$ 时,如图2(a)-(c)系统

的吸引子是不同周期的极限环,它的运动形式是周期的;当 $k = 768.9$ 时,如图 $\chi(d)$ 系统的吸引子是一个极限环面,它的运动形式是伪周期的;当 $k = 580$,

100 时,如图 $\chi(e)(f)$ 系统的吸引子分别是混沌吸引子和超混沌吸引子.至于其他平面处的轨迹,鉴于篇幅原因,此处不在赘述.



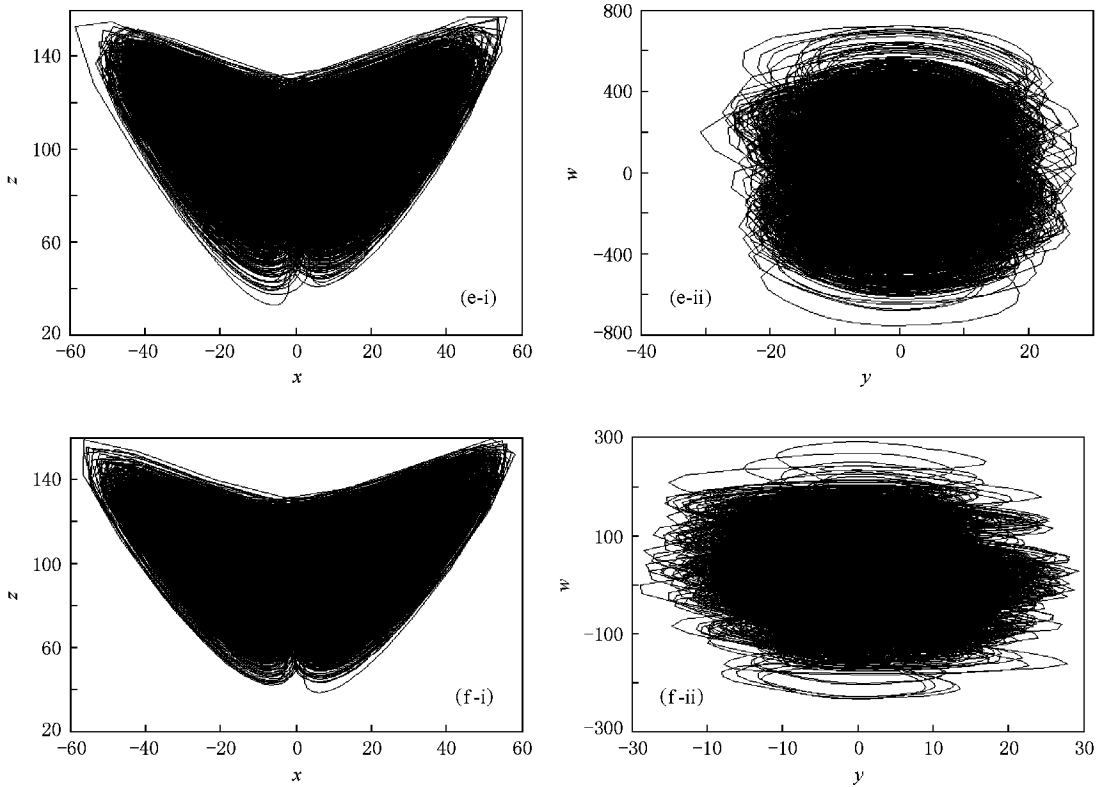


图2 系统2的相轨迹图(i)为 $x-z$ 平面(ii)为 $y-w$ 平面 (a) $k=10$ (b) $k=16.1$ (c) $k=910$ (d) $k=768.9$ (e) $k=580$; (f) $k=100$

从对指数图和分岔图的分析以及以上结论中可以看到,系统(2)在 $k \in [10, 1000]$ 之间的很大范围上都呈现混沌或超混沌特性。

3. 超混沌系统(2)的电路实现

本文中,针对超混沌系统(2)设计了一个四维电路,如图3。在这个电路中有4个通道,它们分别代表超混沌系统(2)的4个状态。电路中的每一个通道都是由电阻元件、电容元件、乘法器和功率放大器组成。电路中的元件分别取 $R_1, R_{21} = 10 \text{ k}\Omega, R_2 = 50 \text{ k}\Omega, R_3 = 7 \text{ k}\Omega, R_4, R_9, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{17}, R_{19} = 1 \text{ k}\Omega, R_6 = 25 \text{ k}\Omega, R_7, R_{15}, R_{20}, R_{22}, R_{25} = 100 \text{ k}\Omega, R_8 = 500 \text{ k}\Omega, R_{10} = 40 \text{ k}\Omega, R_{11} = 2.5 \text{ k}\Omega, R_{16} = 2 \text{ k}\Omega, R_{18} = 59 \text{ k}\Omega, R_{23}, R_{24} = 20 \text{ k}\Omega; C_1, C_2, C_3, C_4 = 1 \text{ nF}$; 运放为 LF347N; 乘法器为 AD633。调整该电路的电阻元件 R_5 的阻值,即对应于调整超混沌系统(2)的第四个方程的可变参数 k ,当 R_5 取不同的阻值时,用

示波器观察到了该超混沌系统的各种轨迹,这些轨迹和数值仿真的结果是一致的。为了和数值仿真结果比较,本文在图4中给出了超混沌电路的一些用示波器观测到的相图。这些相图分别对应于本文前面图2中给出的数值仿真相图。

4. 结 论

本文分析了一些最近提出的超混沌系统,提出了一个新的四维自治的超混沌系统。这个超混沌系统不论从 Lyapunov 指数上,还是从呈现超混沌特性的参数范围上都具有很大的优越性。在对该系统进行数值仿真和分形分析的同时,也通过模拟电路对其进行了验证。电路实验结果表明,在电路中分别呈现的周期、伪周期、混沌、超混沌特性与数值仿真中获得的结果是一致的。从物理实现上验证了超混沌系统的复杂特性,为超混沌系统的进一步应用提供了手段。

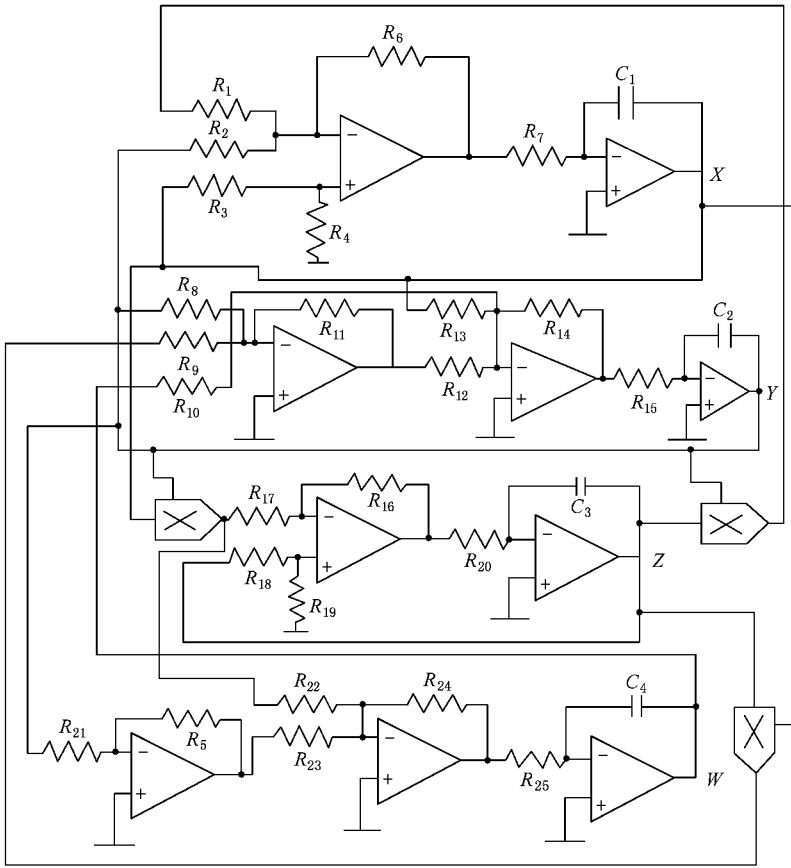
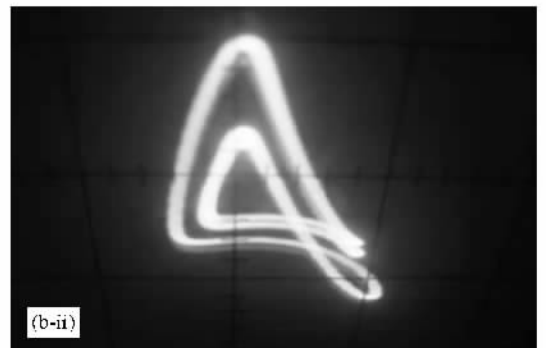
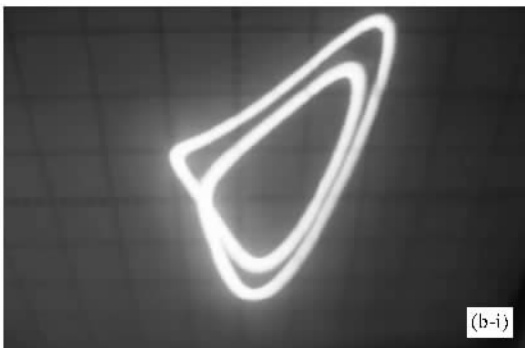
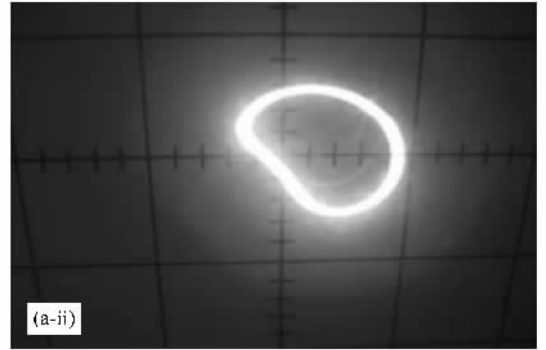
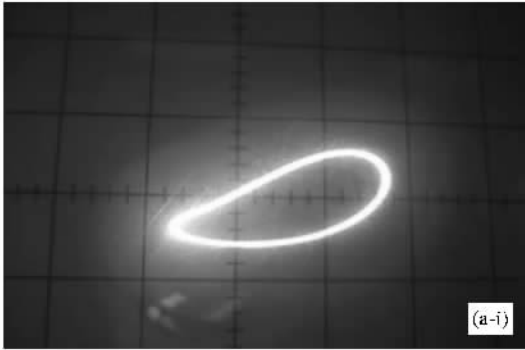


图 3 超混沌系统(2)电路实现



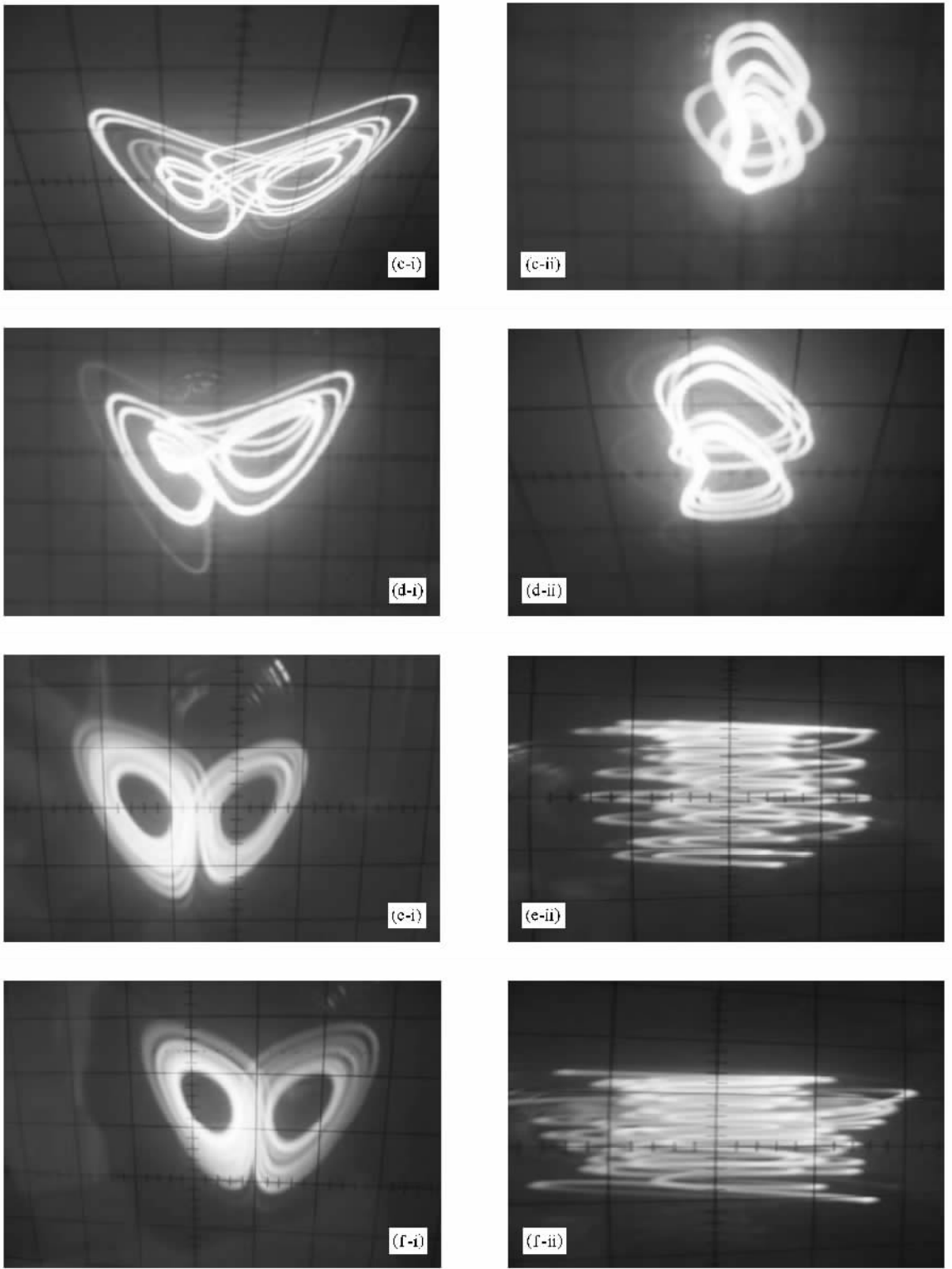


图4 系统(2)电路实现的示波器相轨迹图((i)为 $x-z$ 平面 (ii)为 $y-w$ 平面) (a) $R_5 = 0.4 \text{ k}\Omega$ (b) $R_5 = 0.65 \text{ k}\Omega$ (c) $R_5 = 33 \text{ k}\Omega$ (d) $R_5 = 30.75 \text{ k}\Omega$ (e) $R_5 = 23.2 \text{ k}\Omega$ (f) $R_5 = 4 \text{ k}\Omega$

- [1] Rossler O E 1979 *Phys Lett. A* **71** 155
- [2] Chen G R ,Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos.* **9** 1465
- [3] Hsieh J Y ,Hwang C C ,Wang A P ,Li W J 1999 *International Journal of Control.* **72** 882
- [4] Song Y Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 1918
- [5] Song Y Z ,Zhao G Z ,Qi D L 2006 *Chin. Phys.* **15** 2266
- [6] Grassi G ,Mascolo S 2002 *Systems and Computers* **11** 1
- [7] Udaltsov V S ,Goedgebuer J P ,Larger L ,Cuenot J B ,Levy P ,Rhodes W T 2003 *Optics and Spectroscopy* **95** 114
- [8] Barbara C ,Silvano C 2002 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **30** 625
- [9] Yang X S ,Li Q D ,Chen G R 2003 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **31** 637
- [10] Yu S M ,Lu J H ,Chen G R 2007 *Phys Lett. A* **364** 244
- [11] Wang F Z ,Chen Z Q ,Wu W J ,Yuan Z Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 3238
- [12] Li Y X ,Chen G R ,Tang W K S 2005 *IEEE Trans CAS* **52** 204
- [13] Li Y X ,Tang W K S ,Chen G R 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 235
- [14] Gao T G ,Chen G R ,Chen Z Q ,Cang S J 2007 *Phys. Lett. A* **361** 78
- [15] Cang S J ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
- [16] Chen X R ,Liu C X ,Wang F Q *et al* 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强等 2008 物理学报 **57** 1416]
- [17] Liu L ,Su Y Z ,Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1966 (in Chinese) [刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2007 物理学报 **56** 1966]
- [18] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [19] Qi G Y ,Chen G R ,Du S Z *et al* 2005 *Physica A* **352** 295
- [20] Wang F Z ,Qi G Y ,Chen Z Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强等 2006 物理学报 **55** 4005]
- [21] Wang F Z ,Qi G Y ,Chen Z Q *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强等 2007 物理学报 **56** 3137]
- [22] Chen Z Q ,Yang Y ,Qi G Y ,Yuan Z Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [23] Wang J Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216

Generation and circuit implementation of a large range hyper-chaotic system *

Jia Hong-Yan¹ 卮‡ Chen Zeng-Qiang¹ 卮‡ Yuan Zhu-Zhi¹

¹ 卮 Department of Automation ,Nankai University ,Tianjin 300071 ,China)

² 卮 Department of Automation ,Tianjin University of Science and Technology ,Tianjin 300222 ,China)

(Received 30 November 2008 ; revised manuscript received 10 December 2008)

Abstract

The paper presents a new four-dimensional autonomous hyper-chaotic system by introducing a state variable into the three-dimensional autonomous chaotic system based on studying and analyzing some hyper-chaos. Compared with other hyper-chaotic systems ,the bigger positive Lyapunov exponent of the new system is bigger , and the range of hyper-chaos is also wider when the parameter varies. Numerical simulations and bifurcation analysis are done in this paper , and an analog electronic circuit is designed to verify the new system. The experiment results show that various attractors of the hyper-chaotic circuit , including periodic attractor , quasi-periodic attractor ,chaotic attractor ,hyper-chaotic attractor ,are well agree with the simulation results.

Keywords : hyper-chaos , bifurcation analysis , hyper-chaotic circuit , Lyapunov exponent

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60774088 , 10772135) , the Program for New Century Excellent Talents in University (Grant No. NCET-2005-229) , the Scientific Research Key Project Fund (Grant No. 107024) and the Basic Research Foundation of Tianjin (Grant No. 08JCZDJC21900).

† E-mail : jiahy@tust.edu.cn

‡ E-mail : chenzq@nankai.edu.cn