

跨界面目标电磁散射 Sommerfeld 积分的 双重广义函数束拟合离散复镜像方法*

叶红霞† 金亚秋

(复旦大学波散射与遥感信息教育部重点实验室, 上海 200433)

(2008 年 12 月 4 日收到, 2008 年 12 月 12 日收到修改稿)

混合势积分方程(mixed-potential electric field integral equation, MPE)由于其 Green 函数的低阶奇异性是矩量法(MoM)等数值方法求解散射问题的主要方程. 在跨界面目标的散射问题中, MPE 中的矢量势和标量势 Green 函数包含 Sommerfeld 类型的谱域积分. 利用离散复镜像法(discrete complex image method, DCIM)和 Sommerfeld 恒等式, 将其转化为有限项复镜像 Green 函数的求和运算, 避免了烦杂的谱域积分运算. 当场点和源点位于分界面同侧时, 谱函数 $\tilde{g}(k_{zi})$ 与场源位置都无关, 其复指数参量可一次拟合获得, 用广义函数束方法(general pencil of functions, GPOF)进行拟合. 然而, 当场点和源点位于分界面两侧时, 谱函数与场点和源点的纵向位置(z 和 z')有关. 提出双重 GPOF 拟合方法, 即将谱函数 $\tilde{g}(k_{zi})$ 对场点 z 分离, 对有限个源区离散点 z'_l 的谱函数用 GPOF 方法拟合其复镜像参量, 再次使用 GPOF 方法拟合这些复镜像参量随 z' 的函数关系, 则任意 z' 位置的复镜像参量可由函数计算直接得到, 无需逐点拟合求解. 对两层介质半空间环境利用双重 GPOF 方法、逐点 GPOF 方法和 Sommerfeld 精确积分方法分别计算, 说明双重 GPOF 方法的有效性和准确性. 本文将双重 GPOF/DCIM 计算跨介质分界面的理想导体球目标的散射, 数值地讨论了分界面对体目标感应电流及散射的影响.

关键词: Sommerfeld 积分, 离散复镜像法, 广义函数束

PACC: 4110H, 4120

1. 引言

半空间环境或跨界面的目标散射计算在对地观测与遥感、环境中目标检测与识别、复合电磁材料检测, 以及集成电路中电磁兼容分析等十分广泛的领域中都有重要的研究与应用, 近年来开始受到关注.

处理无限大媒质空间中目标的电磁散射, 已有相当成熟的研究. 处理理想导体分界面附近的目标电磁散射的半空间 Green 函数可用实空间的镜像法获得, 其镜像位置是关于分界面对称的实镜像点^[1]. 平行分层媒质中目标电磁散射采用分层媒质的 Green 函数, 如利用纵向场谱域性质的半空间反射和透射并矢 Green 函数计算埋地目标的电磁散射^[2,3], 用传输线网络理论(transmission line network)得到的电型和磁型并矢 Green 函数(dyadic Green's functions,

DGF)^[4]及混合势 Green 函数^[5,6]等. 但是, 由于分层媒质 Green 函数中包含复杂的 Sommerfeld 积分, 现有研究往往只考虑目标位于分界面上方或下方情况^[6-8], 目标跨越分界面的情况少有研究.

分层媒质 Green 函数中的 Sommerfeld 积分对应于分界面对 Green 函数的一次和多次反射的贡献^[10], 由于其被积函数具有高振荡性和慢衰减性的特点, 使得数值积分计算耗时很大. 为此须寻求快速有效的 Sommerfeld 积分计算方法, 如快速 Hankel 变换法(fast Hankel transform approach, FHT)^[11]、最陡下降路径积分(steepest descent path integral, SDPI)^[3,12]、离散复镜像法(discrete complex image method, DCIM)等. 其中 DCIM 将谱域积分核(称为谱函数)表示成若干项关于纵向波数的复指数级数的求和形式, 利用 Sommerfeld 恒等式将 Sommerfeld 积分表示成有限项复镜像 Green 函数的求和形式. 由于该方法的高

* 国家自然科学基金(批准号: 40637033, 60571050)资助的项目.

† E-mail: hxye@fudan.ac.cn

效性和准确性,已被广泛应用于微带结构和半空间天线等计算电磁学问题中^[13,14].

但是,现有的 DCIM 方法只限于计算场源位于同一媒质层的情况,此时谱函数与场点和源点的位置无关,只要获得了谱函数的复指数拟合式,任意场点与源点配置的 Sommerfeld 积分都可直接进行闭式求和运算.然而,当散射体跨越媒质分界面的时候,阻抗矩阵的场单元与源单元可能位于不同的媒质层,此时 Sommerfeld 积分式的谱函数与场点和源点的纵坐标(z 和 z')有关,因而对应不同 z 和 z' 的谱函数的拟合系数也不同.这样,阻抗矩阵的计算过程中需进行若干次的复指数拟合过程,而它正是 Sommerfeld 积分计算中最耗费资源的部分,这是跨界面目标散射的主要困难.

本文将交界面的谱函数对场点 z 分离,将剩下与源点 z' 有关的谱函数在若干个离散点 z'_i 上进行复指数拟合(其拟合系数与源点相关而与场点无关),然后对获得的拟合系数进行第二次 GPOF 拟合,获得拟合系数与源点坐标 z' 的函数关系,这样任意 z' 的谱函数的拟合系数可直接进行闭式运算,无需进行过程烦杂的拟合运算.而且,对于给定的介质环境,其拟合系数一旦确定,可用于任意形状的目标散射计算,无需重复计算.本文将这种双重 GPOF 拟合的 DCIM 方法用于跨介质分界面的导体目标的散射计算.

2. 混合势积分方程

在图 1 的散射模型中,上半空间 $z > 0$ 为真空($\epsilon_1 = \epsilon_0, \mu_0$),下半空间 $z < 0$ 为均匀介质空间($\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r, \mu_0$)三维(3D)理想导体目标跨越分界面两侧,分界面将目标表面分成上下两部分 $S = S_1 + S_2$.

上半空间以平面电磁波 $E_i = \hat{e}_i e^{-jk_i \cdot r}$ 入射, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 表示自由空间的波数, \hat{e}_i 表示入射电场的极化矢量, $\hat{k}_i = (\sin\theta_i \cos\varphi_i, \sin\theta_i \sin\varphi_i, -\cos\theta_i)$ 表示电磁波的入射方向.目标表面的混合势积分方程表示为^[15,16]

$$\hat{n} \times [j\omega A(\mathbf{r}) + \nabla \phi(\mathbf{r})] = \hat{n} \times E_c(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S), \quad (1)$$

其中 \hat{n} 为目标表面 S 的外法向矢量. E_c 为目标表面的激励场(即目标不存在时空间各点的电场),表示为

$$E_c(\mathbf{r} \in S_1) = E_i(\mathbf{r}) + E_r(\mathbf{r}), \\ E_c(\mathbf{r} \in S_2) = E_t(\mathbf{r}), \quad (2)$$

这里 E_r 和 E_t 分别表示平直介质分界面的反射场和透射场^[1].

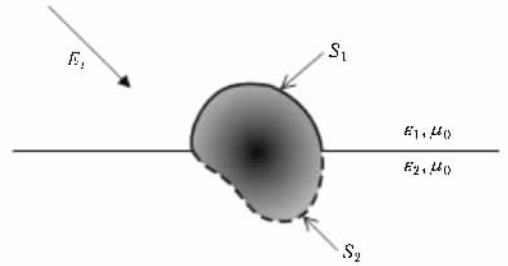


图 1 跨介质分界面的目标散射模型

方程中 $A(\mathbf{r})$ 和 $\phi(\mathbf{r})$ 分别为电磁场的矢量势和标量势,由 Green 函数表示为^[5,6]

$$A(\mathbf{r}) = \int_{S_1+S_2} \bar{K}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') ds', \\ \phi(\mathbf{r}) = \int_{S_1+S_2} K_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q(\mathbf{r}') ds', \quad (3)$$

式中 \mathbf{J} 为目标表面的感应电流密度, q 为表面感应电荷密度,可由电流连续性方程表示为 $q = -\nabla \cdot \mathbf{J}(j\omega)$; \bar{K}_A 为 3×3 维的矢量势并矢 Green 函数, K_ϕ 为标量势 Green 函数,它们的表达式需根据 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 所在的媒质区域分别取附录 B 中的不同形式.

对散射体表面用三角形网格剖分,为保证感应电流的连续性,三角形面元不能跨越分界面的两侧.将目标感应电流 \mathbf{J} 用 RWG(Rao-Wilton-Glisson)基函数展开为 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum J_n f_n(\mathbf{r})$,其中 $f_n(\mathbf{r})$ 为定义在两个邻近三角形面 T_n^+ 和 T_n^- 上的局域基函数^[17].对方程(1)用 Galerkin 法离散成形如 $\bar{Z} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{V}$ 的矩阵方程,其阻抗矩阵元素表示如下:

$$Z_{mm} = j\omega \int_{T_m^+ + T_m^-} ds f_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_m^+ + T_m^-} \bar{K}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot f_n(\mathbf{r}') ds' \\ + \frac{1}{j\omega} \int_{T_m^+ + T_m^-} ds \nabla_s \cdot f_m(\mathbf{r}) \\ \times \int_{T_m^+ + T_m^-} K_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot f_n(\mathbf{r}') ds', \quad (4)$$

$$V_m = \int_{T_m^+ + T_m^-} f_m(\mathbf{r}) \cdot E_c(\mathbf{r}) ds, \quad (5)$$

其中基函数 $f_n(\mathbf{r})$ 及其散度 $\nabla_s \cdot f_n(\mathbf{r})$ 的表达式见文献[17].

3. DCIM 方法计算 Sommerfeld 积分

附录 B 中给出的 \bar{K}_A 和 K_ϕ 的表达式中包含 Sommerfeld 谱域积分变量 I_1^p , I_2^q 和 I_3^q , 其中 p, q 分别对应场点和源点区域, 它们需根据不同的场源区域取不同的形式^[5].

当源点和场点位于分界面同侧时, 按如下方式提取谱函数:

$$I = 2\pi S_0 \left\{ \tilde{g}(k_\rho) \frac{e^{-jk_\rho |z+z'|}}{jk_\rho} \right\}. \quad (6)$$

可见, 这样提取的谱函数 $\tilde{g}(k_\rho)$ 与场点和源点的位置都无关.

将 $\tilde{g}(k_\rho)$ 展开为有限项复指数的求和形式^[18, 19]

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k_\rho) &= \sum_{n=1}^N A_n e^{-B_n k_\rho} \\ &= \sum_{n=1}^N A_n e^{-jk_\rho (-jB_n)}. \end{aligned} \quad (7)$$

通常 $N < 6$, 式中参数 A_n 和 B_n 可用 GPOF 方法获得, 具体过程见附录 A. 将 (7) 式代入 (6) 式, 经适当组合得到

$$I = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n S_0 \left\{ \frac{e^{-jk_\rho [|z+z'| - jB_n]}}{jk_\rho} \right\}. \quad (8)$$

由于场点和源点位于分界面同侧, 上式中指数部分的绝对值符号可去掉 (即 $|z+z'| = \pm(z+z')$, 正负号分别对应分界面的上方和下方). 因此, 上式可变成

$$I = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n S_0 \left\{ \frac{e^{-jk_\rho (z+z' \mp jB_n)}}{jk_\rho} \right\}. \quad (9)$$

由 Sommerfeld 恒等式

$$S_0 \left\{ \frac{e^{-jk_\rho |z|}}{jk_\rho} \right\} = \frac{g_\rho(r)}{2\pi}, \quad g_\rho(r) = \frac{e^{-jk_\rho r}}{r}, \quad (10)$$

其中 $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ (9) 式可写成下面的复指数求和形式:

$$I = \sum_{n=1}^N A_n g_\rho(R_n), \quad (11)$$

式中 $R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|$, $\mathbf{r}'_n = (x', y', z' \pm jB_n)$ 分别对应几个主要的复镜像位置. 经这样处理后, 原先的 Sommerfeld 谱域积分式 (6) 就被转化成了有限项复镜像 Green 函数的求和形式 (11). 由于此时谱函数 $\tilde{g}(k_\rho)$ 与场源位置都无关, 这样拟合得到的复镜像参数可用于求解任意场源配置的 Sommerfeld 积分.

例如, 考虑 $z > 0$ 和 $z' > 0$ 的情况, 对附录 (B7) 式提取谱函数为

$$\tilde{g}(k_{z1}) = \frac{k_{z2} - k_{z1}}{k_{z2} + k_{z1}}. \quad (12)$$

将上式谱函数按 (7) 式对 k_{z1} 展开. 为获得展开系数, 对变量 k_{z1} 按附录 (A2) 式的过程离散, 得到 $\tilde{g}(t)$ 如图 2(a) 所示, 它是一个慢起伏函数, 对 t 的采样要求比较低, 因而附录 (A6) 和 (A7) 的矩阵维数较小, 本征值求解的运算量也相对较小.

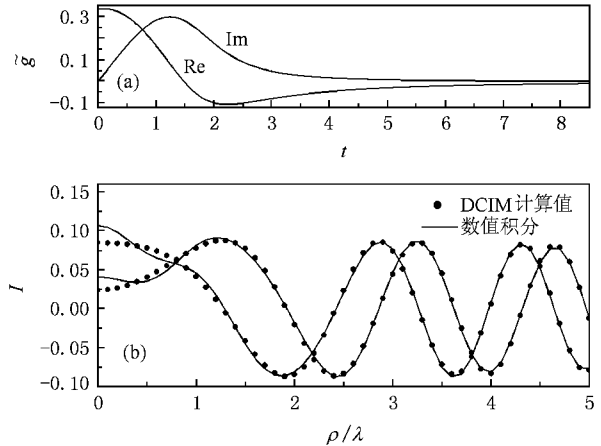


图 2 谱函数及其 Sommerfeld 积分 ($\epsilon_r = 4$)

对 (12) 式用 GPOF 方法拟合其复指数参数, 进而得到 Sommerfeld 积分值与横向矢径 ρ 的关系如图 2(b) 所示 (取 $z = 3.1\lambda$ 和 $z' = 0.7\lambda$), 可见它与直接数值积分的计算结果是相当符合的. 此外, 数值计算中发现: 当 ρ 较小时直接数值积分需对 k_ρ 进行很密的采样, 才能满足精度要求. 当 $z, z' < 0$ 时可作同样的处理.

对于附录 (B8) 式的积分, 可利用 $S_1 \{ \tilde{g}(k_\rho) \} = -\frac{\partial}{\partial \rho} S_0 \{ \tilde{g}(k_\rho) \}$ 的性质计算为

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N A_n 2\pi S_1 \left[\frac{e^{-jk_\rho |z+z' \pm jB_n|}}{jk_\rho} \right] \\ &= \rho \sum_{n=1}^N A_n \frac{(jk_\rho R_n + 1)}{R_n^2} g_\rho(R_n). \end{aligned} \quad (13)$$

4. 双重 GPOF 拟合方法计算跨界面的 Sommerfeld 积分

当场点与源点位于分界面两侧时, Sommerfeld 积分表达式如附录 (B14)~(B16) 式所示, 此时无法提取出与场源位置都无关的谱函数. 本文考虑将场

点位置分离后提取谱函数 $\tilde{g}(k_{z1}, z')$, 这样它只与源点 z' 相关. 例如当 $z > 0, z' < 0$ 时, 对附录 (B14) 式可提取谱函数如下:

$$\tilde{g}(k_{z1}, z') = e^{-jk_{z1}|z'|} - \frac{k_{z1}2}{k_{z2} + k_{z1}} e^{-jk_{z2}|z'|}, \quad (14)$$

对其作复指数展开, 即

$$\tilde{g}(k_{z1}, z') = \sum_{n=1}^N A_n(z') e^{-B_n(z')k_{z1}}, \quad (15)$$

则附录 (B14) 式的 Sommerfeld 积分可表示成类似 (11) 式的复镜像 Green 函数的求和形式. 不同的是由于 $\tilde{g}(k_{z1}, z')$ 与 z' 有关 (见图 3), 得到的展开参数 $A_n(z')$ 和 $B_n(z')$ 都是 z' 的函数. 例如, 对 $\epsilon_r = 4.0, z' = -0.7\lambda$ 和 -1.2λ , 获得的展开参数如表 1 所示 (这里取 $N = 4$, 该参数与矩阵 (A6) 和 (A7) 式的有效本征值的阈值有关). 可见, 对不同的源点位置 z' 获得的复镜像参数完全不同.



图 3 谱函数的离散 ($z > 0$ 和 $z' < 0$)

表 1 谱函数 $\tilde{g}(k_{z1}, z')$ 的展开参数

序号	$z' = -0.7\lambda$		$z' = -1.2\lambda$	
	$A_n(z')$	$B_n(z')$	$A_n(z')$	$B_n(z')$
1	(2.077, -1.736)	(0.031, 0.627)	(0.123, -0.15)	(-0.165, 1.181)
2	(-4.576, 8.343)	(0.333, 0.511)	(2.172, -7.016)	(0.274, 0.8)
3	(3.463, -18.855)	(0.7172, 0.457)	(12.233, 21.854)	(0.74, 0.639)
4	(13.798, 12.274)	(1.167, 0.392)	(-29.345, 9.66)	(1.280, 0.503)

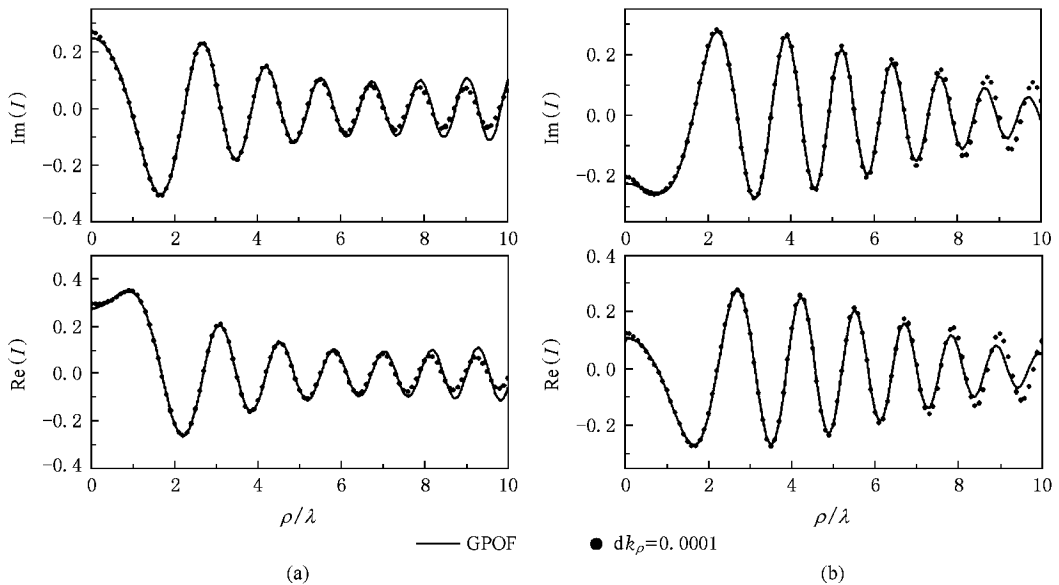


图 4 GPOF 方法和直接积分计算 Sommerfeld 积分 (a) $z' = 0.7\lambda$ (b) $z' = -1.2\lambda$

设 $z = 3.1\lambda$, 附录(B14)式的 Sommerfeld 积分可由展开系数 A_n 和 B_n 表示为

$$I = 2\pi S_0 \left[\tilde{g}(k_{z1}, z') \frac{e^{-jk_{z1}z}}{jk_{z1}} \right] \\ = \sum_{n=1}^N A_n \frac{e^{-jk_1 R_n}}{R_n}, \quad (16)$$

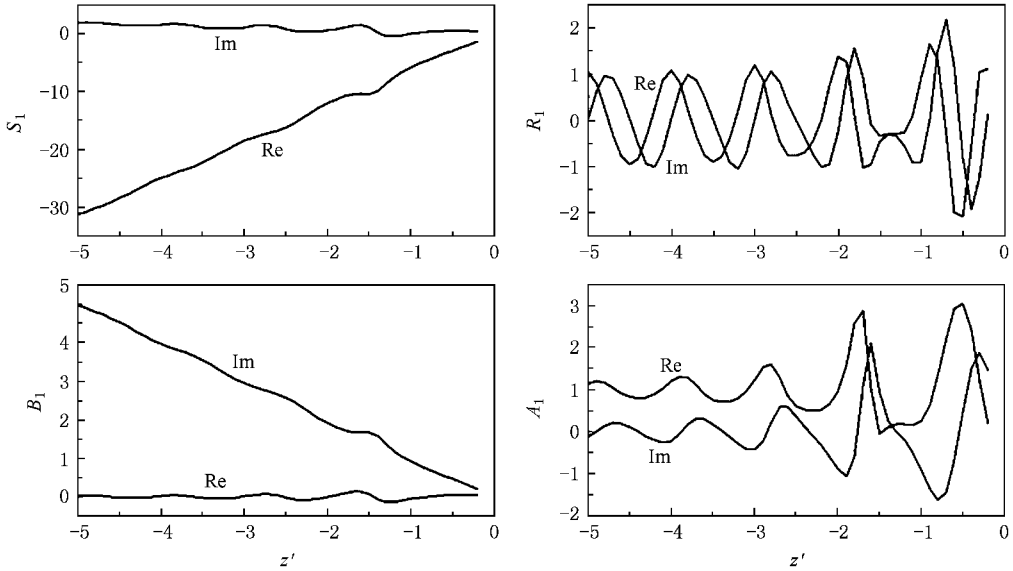


图5 对应第一个复镜像函数的参数随 z' 的变化

在跨界面目标的散射计算中, 阻抗元素的求解需对目标表面每个离散单元执行如上的 GPOF 过程, 而 GPOF 方法的主要运算在于本征值的求解过程, 这势必耗费大量的运算时间和存储空间. 本文用双重 GPOF 方法处理这个问题.

首先对若干个离散点 z'_l (这里取 $dz' = 0.2\lambda$) 提取谱函数 $\tilde{g}(k_{z1}, z'_l)$, 使用 GPOF 方法获得其对应的参数. 图5给出了(14)式的谱函数对应的第一个复指数参数随 z' 的变化关系(各参数的含义和关系见附录A). 可以看出, 参数 S_1 和 B_1 随 z' 的变化比较平缓, 而 R_1 和 A_1 则随 z' 振荡变化较快, 其他

这里 $R_n = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - jB_n)^2}$. 图4给出了两种不同 z' 取值所获得的 I 值. 可见, 在 $\rho < 6\lambda$ 的范围内(16)式的计算结果与直接数值积分结果相当符合, 而当 $\rho > 6\lambda$ 时, GPOF 方法不适用, 这是由于 Bessel 函数的大宗量振荡性造成.

参数 S_n 和 B_n , R_n 和 A_n 有类似变化特性. 事实上, 从谱函数的展开式可以看出, 参数 S_n 和 B_n 对应于复镜像位置的参量, 因而随源位置 z' 缓慢变化, 而 R_n 和 A_n 对应每个复镜像点的贡献强弱, 所有镜像点的整体贡献满足分界面的边界条件, 因而 R_n 和 A_n 可能会随源位置 z' 振荡变化.

鉴于参数 S_n 和 B_n 随 z' 的缓变性质, 本文考虑对 S_n (或者 B_n) 进行二次拟合(若拟合参数 R_n 和 A_n , 由于其快速振荡性要求较高的采样密度, 会增加运算量). 设

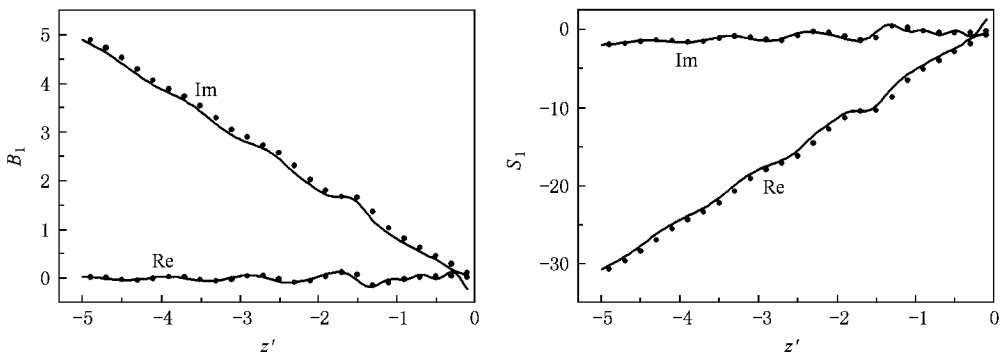


图6 GPOF 拟合第一个复镜像参数 B_1 和 S_1 (·, —分别为采样值和拟合值)

$$S_n(z') = \sum_{t=1}^T p_n^t(z') e^{-q_n^t z'},$$

$$B_n(z') = \sum_{t=1}^T p_n^t(z') e^{-q_n^t z'}, \quad (17)$$

表 2 谱函数 $S_1(z')$, $B_1(z')$ 的展开参数

序号 t	$S_1(z')$		$B_1(z')$	
	p_1^t	q_1^t	p_1^t	q_1^t
1	(-20.640, -7.138)	(0.115, -0.028)	(0.944, -3.340)	(0.115, -0.028)
2	(21.9740, 6.984)	(-0.183, 0.069)	(-0.907, 3.550)	(-0.183, 0.069)
3	(-0.998, 0.363)	(-1.016, 7.819)	(-0.067, -0.155)	(-1.016, 7.819)
4	(0.635, 0.866)	(-0.336, 5.711)	(-0.132, 0.109)	(-0.336, 5.711)

考虑求解场域 $z' \in (-5-0)$ 区间内间隔 0.05 的离散点 z'_k 上的 $S_1(z'_k)$ 和 $B_1(z'_k)$ 值, 若对每个离散点 z'_k 采用 GPOF 方法拟合求解, 需耗时 24.45 s.

在双重 GPOF 拟合方法中, 首先用 GPOF 方法计算若干个稀疏离散点 z'_l 上的 $S_1(z'_l)$ 和 $B_1(z'_l)$ 值 (这里取 $dz' = 0.2$), 约耗时 9.15 s; 然后再次利用 GPOF 方法拟合 $S_1(z')$ 和 $B_1(z')$ 随 z' 变化的闭式函数, 约耗时 0.03 s; 最后求解任意稠密离散点 z'_k 上的函数值, 共耗时 9.21 s. 可见双重 GPOF 方法只用约 1/3 的计算时间.

由于双重 GPOF 方法拟合的参量函数 $S_n(z')$ 和 $B_n(z')$ 只与媒质电参数有关, 一次拟合后可用于相同环境中任意目标的电磁散射计算, 无须对每个目标分别计算. 此外, 对于相同源位置 z' 不同 x', y' 和不同场点 r 的复镜像参量 $S_n(z')$ 和 $B_n(z')$ 相同, 无须对每一点分别计算, 这将对分层媒质中的多目标散射计算特别有用.

5. 跨界面目标的散射计算

考虑半径 $r = 0.5\lambda$ 的理想导体球目标跨越介质分界面的情况, 分界面下方半空间的相对介电常数 $\epsilon_r = 4.0$, 上方为自由空间. 水平极化均匀平面波 $E_i = \hat{h}_i e^{-jk_i \cdot r}$ 沿 \hat{k}_i 方向 ($\theta_i = 30^\circ, \varphi_i = 90^\circ$) 入射.

导体球表面的感应电流大小与方向分布如图 7 所示. 导体表面的感应电流基本趋于与入射电场方向 (\hat{x} 方向) 平行, 由入射场切入点 (导体上半左侧表面) 开始沿导体球表面爬行, 并向外部空间辐射能

量. 分界面附近的上下表面元由于界面反射和投射影响, 其感应电流方向偏转成关于界面对称, 以满足界面两边电磁场的连续条件. 入射场切入点附近由于受电磁波的直接照射, 其感应电流较强. 此外, 由于激励场沿 y 正方向入射, 表面感应电流呈现关于入射平面 (y - z 面) 的对称分布.

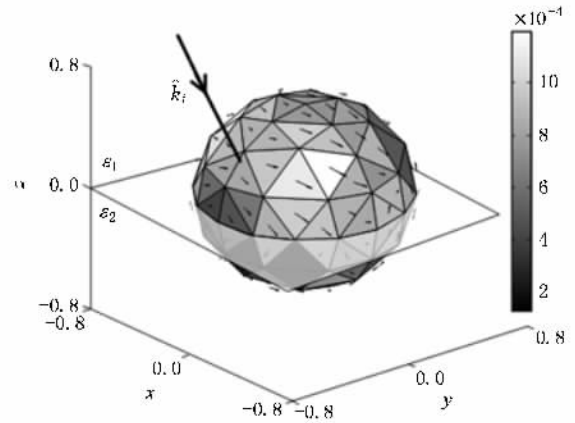


图 7 导体球上半表面的感应电流分布

图 8 和图 9 分别给出了导体球上方 $z = 5\lambda$ 处的水平面上的散射电场沿 x 和 y 两轴线方向的分布, 并与自由空间中导体球的散射进行比较. 图中 (a)(b)(c) 分别对应散射电场的 x, y, z 三个分量, (d) 对应总散射场.

自由空间中的导体球在平面波照射下, 其散射在沿着入射方向向前的位置散射最强, 其他方向只有较弱的爬行波绕射, 因而图 8 和图 9 中对自由空间散射电场 (粗实线) 的幅度相对较低.

位于介质分界面上的目标, 由于受到入射波和

界面反射波的共同激励,同时由于其与分界面的耦合散射作用,造成上半空间的散射较自由空间情况更强.然而,在目标中心位置 $\rho = 0$ 处,散射场主要来源于目标自身的散射贡献,分界面的贡献很弱,因而 $\rho = 0$ 处的散射场与自由空间的情况相当.此外,

由于本文所计算的散射场是体现目标散射及其与界面相互作用的耦合散射,故它们主要分布在距离目标较近的区域,并随着横向距离(x 或 y)的增大而减弱.目标中心两侧的散射峰值主要是由目标的直接散射及其与界面的耦合散射引起.

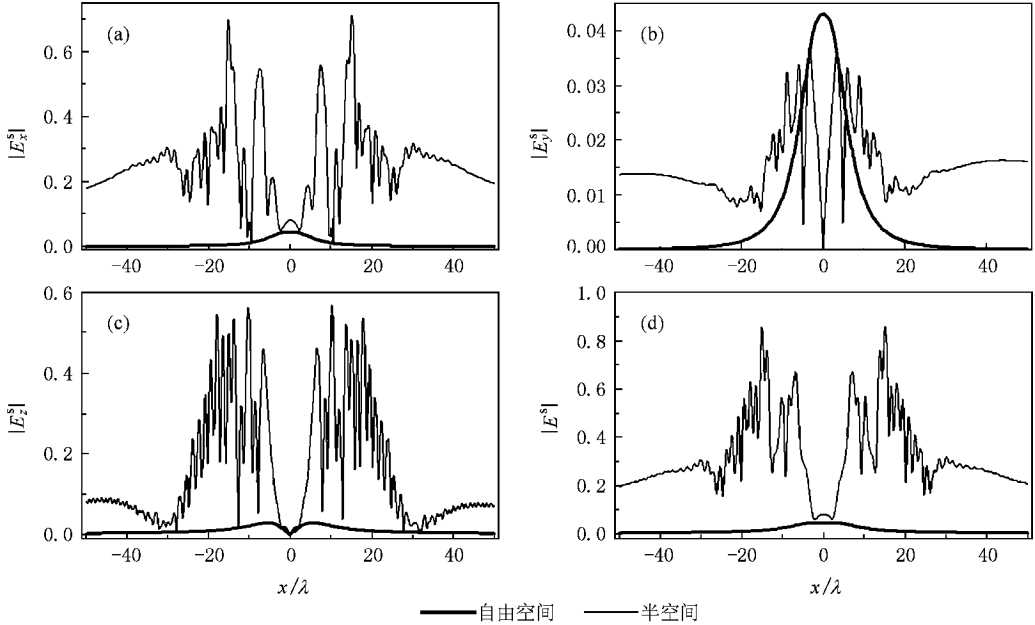


图 8 导体球上方的散射近场在垂直平面内的分布

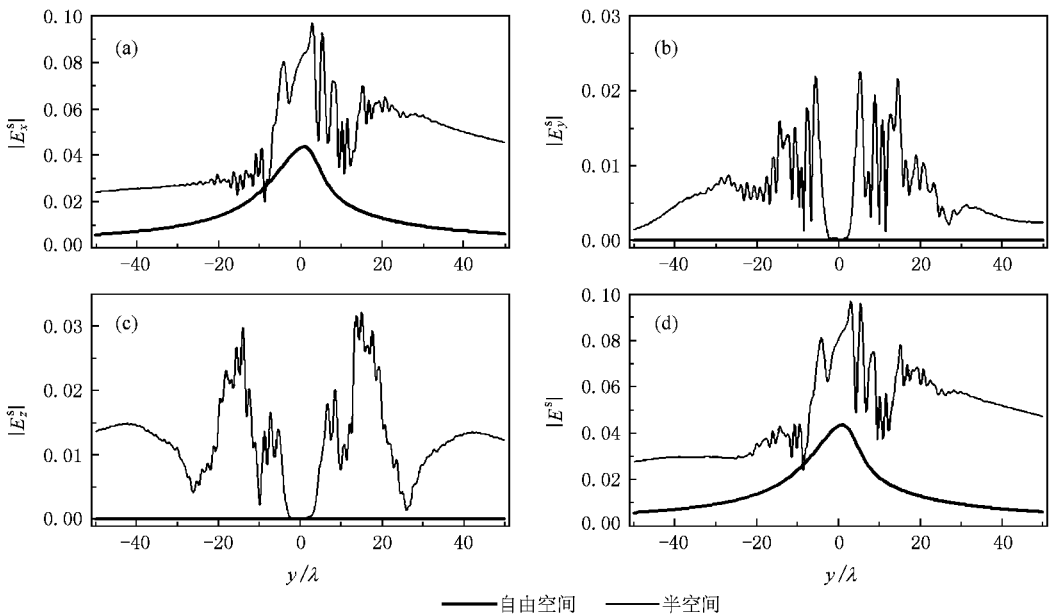


图 9 导体球上方的散射近场在平行平面内的分布

从图 9 可以看出,在平行平面($y-z$ 面)内,散射电场的 y 和 z 分量都很弱,这是因为该平面与入射

电场的极化方向(\hat{x} 方向)垂直, \hat{x} 极化的激励电场沿导体球表面爬行时不改变极化方向,故只能产生

相同极化方向的散射电场.此外,由于该平面与入射平面平行,而入射电场沿 y 轴正向斜入射,该平面内的散射峰值呈现向 y 轴正向偏移的特性.介质半空间的目标散射峰值基本与自由空间的散射峰值对应,源于目标自身的散射.而半空间目标散射峰值附近的若干抖动散射,对应于目标与半空间分界面的二次耦合散射.

现考虑不同尺寸导体球在介质分界面作用下的散射,导体球尺寸分别取 $r_1 = 0.5\lambda$ 和 $r_2 = 1\lambda$, \hat{h} 极化的平面电磁波沿 $\theta_i = 30^\circ, \varphi_i = 90^\circ$ 方向入射.图 10 比较了 $z = 5\lambda$ 高度处的散射电场,图 10(b) 中为鲜明比较两种情况,将 $r_1 = 0.5\lambda$ 球体的散射场放大了 10 倍.可以看出,目标尺寸的增加导致各点的散射场明显增强,并且出现了后向散射明显强于前向散射的现象(见图 10(b)).

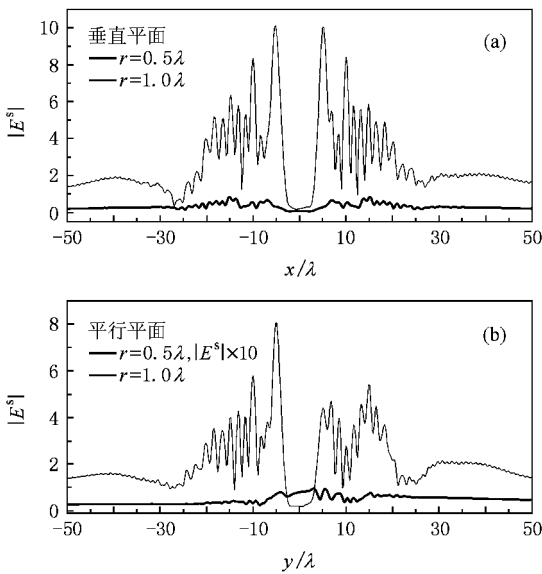


图 10 不同大小的球体目标的散射比较

图 11 给出了平行平面内导体球的同极化和交叉极化双站散射截面 RCS,比较了导体球尺寸和分界面对 RCS 的影响.可以看出,分界面存在明显提高了同极化散射强度,而交叉极化散射强度只出现明显的抖动现象.然而导体球尺寸的增加既明显增加了交叉极化的散射强度,也改变了其散射的角度性分布,而对同极化散射的改变不大.

图 12 给出了垂直平面内的同极化和交叉极化双站散射 RCS.可以看出,在该平面内分界面存在明显提高了交叉极化的散射强度,而同极化散射只出现角度性的抖动现象.此外导体球尺寸的增加能同

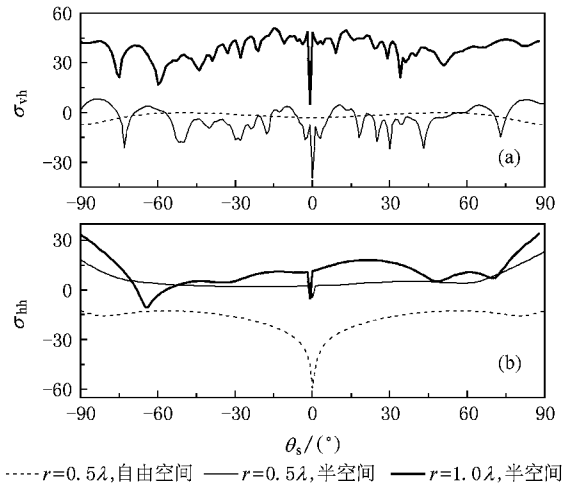


图 11 垂直平面内的同极化和交叉极化双站散射 RCS

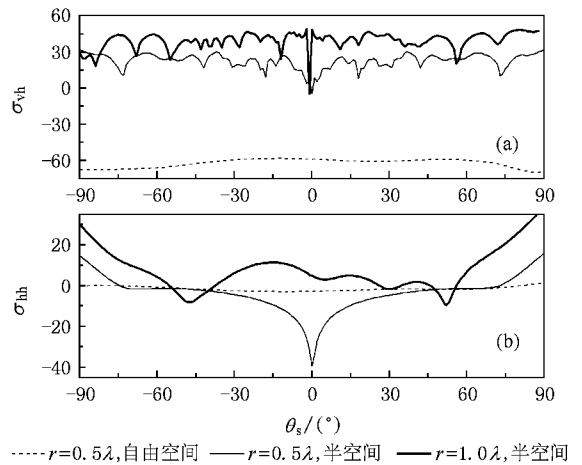


图 12 平行平面内的同极化和交叉极化双站散射 RCS

时增强同极化和交叉极化的散射强度.

6. 结 论

在研究介质半空间中目标电磁散射时,DCIM 方法常用来加速 Green 函数中 Sommerfeld 积分运算.但是,对于跨介质分界面的目标电磁散射,当阻抗矩阵的场点和源点分别位于分界面两侧时,其 Sommerfeld 积分式中的被积谱函数与场点和源点的纵坐标都有关.若对每一组场源配置进行 GPOF 运算来获得其复镜像参数,必然导致阻抗矩阵的求解耗费大量的运算时间.

本文提出双重 GPOF 拟合,首先将谱函数中关于场点的因式分离,剩下与源点有关的函数在源区

的有限个离散点上进行 GPOF 拟合过程, 获得每个复镜像参量在这些离散点上的值. 然后, 进一步利用 GPOF 方法拟合这些复镜像参量与源区纵坐标 z' 的函数关系, 从而使得任意 z' 位置的复镜像参数可直接由函数闭式计算, 无须进行烦杂的 GPOF 拟合过程. 由于这些拟合函数关系只与分界面两侧的媒质参数有关, 经一次拟合计算后可用于相同环境中任意形状目标和任意横向位置的电磁散射分析, 可大大节省计算时间.

本文将这一双重 GPOF/DCIM 方法应用于跨介质分界面的导体球目标电磁散射的数值计算, 分析了分界面对目标感应电流及同极化/交叉极化散射 RCS 的影响, 以及跨界面目标不同尺寸对同极化/交叉极化散射 RCS 的影响.

附录 A 广义函数束方法(GPOF)

设谱函数 $\tilde{g}(k_{zp})$ 可展开为关于 k_{zp} 的复指数求和形式, 即

$$\tilde{g}(k_{zp}) = \sum_{m=1}^M A_m e^{-B_m k_{zp}}, \quad (A1)$$

变量 k_{zp} 取如下形式:

$$k_{zp} = k_p \left(-jt + 1 - \frac{t}{T} \right) \quad (0 < t < T), \quad (A2)$$

其中 k_{zp} 和 k_p 分别是波数的纵向和横向分量, 且满足 $k_{zp}^2 + k_p^2 = k_\rho^2$. 上式中参量 T 的选择需保证 $\max(\text{Re}(k_p)) > k_1$ 和 k_2 , t 的取值保证 k_{zp} 的虚部小于零. 代入(A1)式得到

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) &= \sum_{m=1}^M A_m e^{-B_m k_p} e^{B_m k_p \left(j + \frac{1}{T} \right) t} \\ &= \sum_{m=1}^M R_m e^{S_m t}, \end{aligned} \quad (A3)$$

其中

$$R_m = A_m e^{-B_m k_p}, \quad S_m = B_m k_p \left(j + \frac{1}{T} \right). \quad (A4)$$

对变量离散 $t = nT_s$ (T_s 为采样间隔), 得到函数序列为

$$\tilde{g}(n) = \tilde{g}(nT_s) = \sum_{m=1}^M R_m (s_m)^n \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (A5)$$

其中 $s_m = e^{S_m T_s}$, 可由广义函数束方法求解. 即先构造两个 $(N-L) \times L$ 的矩阵如下:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \tilde{f}(1) & \tilde{f}(2) & \dots & \tilde{f}(L) \\ \tilde{f}(2) & \tilde{f}(3) & \dots & \tilde{f}(L+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{f}(N-L) & \tilde{f}(N-L+1) & \dots & \tilde{f}(N-1) \end{bmatrix}, \quad (A6)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} \tilde{f}(0) & \tilde{f}(1) & \dots & \tilde{f}(L-1) \\ \tilde{f}(1) & \tilde{f}(2) & \dots & \tilde{f}(L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{f}(N-L-1) & \tilde{f}(N-L) & \dots & \tilde{f}(N-2) \end{bmatrix}, \quad (A7)$$

则 s_m 是矩阵 $Y_2^+ Y_1$ 的本征值(具体参见文献[2]). 由 s_m 可求得相应的 S_m , 从而 R_m 可由最小二乘法求解. 相应的 A_m 和 B_m 可由(A4)式求解, 即

$$B_m = \frac{S_m}{k_p \left(j + \frac{1}{T} \right)}, \quad A_m = R_m e^{B_m k_p}.$$

附录 B 势函数的积分核

文献[5]推导了三种不同形式的矢量势 Green 函数 \bar{K}_A^{pq} 和标量势 Green 函数 K_φ^{pq} 的表达式(上标 $p, q = 1, 2$ 分别表示场点和源点所在的媒质区域), 分别标注为公式 A, B, C, 其中的公式 C 由于其标量势 Green 函数 K_φ^{pq} 在分界面两侧的连续性(即 $K_\varphi^{pq}(z'_i + 0) = K_\varphi^{pq}(z'_i - 0)$), 使得标量势 $\varphi(\mathbf{r})$ 表达式中复杂的围线积分抵消, 因而得到更广泛的应用.

在 Michalski 提出的公式 C 中, 矢量势 Green 函数 \bar{K}_A^{pq} 为并矢, 表示为

$$\bar{K}_A^{pq} = \begin{bmatrix} K_{xx}^{pq} & 0 & K_{xz}^{pq} \\ 0 & K_{yy}^{pq} & K_{yz}^{pq} \\ -K_{xz}^{pq} & -K_{yz}^{pq} & K_{zz}^{pq} \end{bmatrix}. \quad (B1)$$

当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r$ 时, 文献[5]中的各式可得到简化. 例如, 当源点和场点位于分界面同侧时, 各分量的表达式简化为

$$K_{xx}^{pp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \{ g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - I_1^p \}, \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} K_{xz}^{pp} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x - x'}{\rho} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \frac{1}{\rho} [e^{-jk_p} |z+z'| - |z+z'| g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] - I_3^p \right\}, \end{aligned} \quad (B3)$$

$$\begin{aligned} K_{yz}^{pp} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{y - y'}{\rho} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \frac{1}{\rho} [e^{-jk_p} |z+z'| - |z+z'| g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] - I_3^p \right\}, \end{aligned} \quad (B4)$$

$$\begin{aligned} K_{zz}^{pp} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + 2 \frac{\epsilon_q - \epsilon_p}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right. \\ &\quad \times [g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - I_2^p] - I_1^p \left. \right\}, \end{aligned} \quad (B5)$$

$$\begin{aligned} K_\varphi^{pp} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_p} \left\{ g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \frac{\epsilon_q - \epsilon_p}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right. \\ &\quad \times g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \frac{2\epsilon_p}{\epsilon_1 + \epsilon_2} I_2^p \left. \right\}, \end{aligned} \quad (B6)$$

其中 I_1^p , I_2^p 和 I_3^p 是 Sommerfeld 类型的谱域积分, 体现分界面对 Green 函数的影响, 其表达式如下:

$$I_1^{pp} = 2\pi S_0 \left\{ \frac{k_{zq} - k_{zp}}{k_{z2} + k_{z1}} \frac{e^{-jk_{zp}|z+z'|}}{jk_{zp}} \right\}, \quad (B7)$$

$$I_2^{pp} = 2\pi S_0 \left\{ \frac{\epsilon_p (k_{zq} - k_{zp}) e^{-jk_{zp}|z+z'|}}{\epsilon_1 k_{z2} + \epsilon_2 k_{z1}} \frac{1}{jk_{zp}} \right\}, \quad (B8)$$

$$I_3^{pp} = 2\pi S_1 \left\{ \left[\frac{\chi(\epsilon_r + 1)}{(k_{z2} + k_{z1}) \chi(k_{z2} + \epsilon_r k_{z1})} + \frac{1}{k_\rho^2} \right] \times e^{-jk_{zp}|z+z'|} \right\}, \quad (B9)$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}' = (x', y', z')$ 分别表示场点和原点的空间坐标矢量, $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - 2z'\hat{z}$ 为源点相对于分界面的镜像位置矢量(文献[6]中取 $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + 2z'\hat{z}$ 是有误的), 上标 $p, q = 1$ 或 2 但 $q \neq p$. 上面各式中 $g_p(r) = e^{-jk_p r}/r$ 称为均匀区域 p 的 Green 函数, $k_{p\rho} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_p}$ 为该区域的波数, $k_{zp} = \sqrt{k_p^2 - k_\rho^2}$ 为波矢的纵向分量, k_ρ 为波矢的横向分量.(B3) 和 (B4) 式中的 $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ 为场源之间的横向距离.

当源点和场点位于分界面两侧时(即 $p \neq q$), 矢量势和标量势 Green 函数的各分量简化为

$$K_{xx}^{pq} = K_{zz}^{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \{ g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - I_1^{pq} \}, \quad (B10)$$

$$K_{xz}^{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x-x'}{\rho} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \frac{1}{\rho} [e^{-jk_p|z-z'|} - |z-z'| g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] - I_3^{pq} \right\}, \quad (B11)$$

$$K_{yz}^{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{y-y'}{\rho} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \frac{1}{\rho} [e^{-jk_p|z-z'|} - |z-z'| g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] - I_3^{pq} \right\}, \quad (B12)$$

$$- |z-z'| g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - I_3^{pq} \}, \quad (B12)$$

$$K_\varphi^{pq} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \{ g_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - I_2^{pq} \}, \quad (B13)$$

此时 Sommerfeld 谱域积分 I_1^{pq}, I_2^{pq} 和 I_3^{pq} 表示为

$$I_1^{pq} = 2\pi S_0 \left\{ \left[e^{-jk_{zp}|z'|} - \frac{2k_{zp}}{k_{z2} + k_{z1}} e^{-jk_{zq}|z'|} \right] \frac{e^{-jk_{zp}|z|}}{jk_{zp}} \right\}, \quad (B14)$$

$$I_2^{pq} = 2\pi S_0 \left\{ \left[\frac{\chi(\epsilon_r + 1)}{k_{z2} + \epsilon_r k_{z1}} e^{-jk_{zq}|z'|} + \frac{e^{-jk_{zp}|z'|}}{jk_{zp}} \right] e^{-jk_{zp}|z|} \right\}, \quad (B15)$$

$$I_3^{pq} = 2\pi S_1 \left\{ \left[\frac{\chi(\epsilon_r + 1) e^{-jk_{zq}|z'|}}{(k_{z2} + k_{z1}) \chi(k_{z2} + \epsilon_r k_{z1})} + \frac{e^{-jk_{zp}|z'|}}{k_\rho^2} \right] e^{-jk_{zp}|z|} \right\}. \quad (B16)$$

当 $\epsilon_r = 1$ 时, 上下两区域的 Green 函数各分量相同, 简化为

$$\bar{K}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \bar{\mathbf{I}}, \quad (B17)$$

$$K_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (B17)$$

其中 $g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, $\bar{\mathbf{I}}$ 为 3×3 维的单位矩阵, 此时即已退化到无限大自由空间的情况

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1+S_2} \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \lambda ds',$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1+S_2} \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q(\mathbf{r}') \lambda ds'. \quad (B18)$$

[1] Kong J A 1990 *Electromagnetic Wave Theory* (New York : Wiley)
 [2] Cui T J, Wiesbeck W, Herschlein A 1998 *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* **36** 526
 [3] Cui T J, Chew W C 1999 *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* **37** 887
 [4] Michalski K A, Mosig J R 1997 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **45** 508
 [5] Michalski K A, Zheng D 1990 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **38** 345
 [6] Wang Y H, Zhang Y M, Guo L X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3524 (in Chinese)[王运华、张彦敏、郭立新 2008 物理学报 **57** 3524]
 [7] Li X F and Xie Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2930 (in Chinese) [李晓峰、谢拥军 2008 物理学报 **57** 2930]
 [8] Xu L M, Nie Z P 2005 *Acta Geophys. Sin.* **48** 209 (in Chinese) [徐利明、聂在平 2005 地球物理学报 **48** 209]
 [9] Michalski K A, Zheng D 1990 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **38** 345
 [10] Jin Y Q 1995 *Electromagnetic wave in complex systems* (Shanghai : Fudan University Publication)(in Chinese)[金亚秋 1995 复杂系

统中的电磁波(上海:复旦大学出版社)]
 [11] Zhao J, Kapur S, Long D E 1998 *Proc. 35th Design Automation Conf*
 [12] Xu L M, Nie Z P, Hu J 2005 *Chinese Journal of Radio Science* **20** 330 (in Chinese)[徐利明、聂在平、胡俊 2005 电波科学学报 **20** 330]
 [13] Chow Y L, Yang J J 1991 *IEEE Trans. on Microwave Theory and Technique* **39** 588
 [14] Shubair R M, Chow Y L 1993 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **41** 806
 [15] Ye H, Jin Y Q 2007 *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* **45** 1174
 [16] Ye H X, Jin Y Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 839 (in Chinese)[叶红霞、金亚秋 2008 物理学报 **57** 839]
 [17] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W 1982 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **30** 409
 [18] Hua Y, Sarkar T K 1989 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **37** 229
 [19] Sarkar T K, Pereira O 1995 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation Magazine* **37** 48

A novel approach of dual GPOF /DCIM for fast computation of the sommerfeld integrals and electromagnetic scattering from an object partially embedded in dielectric half-space^{*}

Ye Hong-Xia[†] Jin Ya-Qiu

(Key Laboratory of Wave Scattering and Remote Sensing Information (MoE), Fudan University , Shanghai 200433 , China)

(Received 4 December 2008 ; revised manuscript received 12 December 2008)

Abstract

The mixed-potential integral equation (MPIE) has been usually employed in numerical approach of electromagnetic scattering of the object , such as the method of moment (MoM) , due to its low-level singularity of vector and scalar potential Green functions . When an object is embedded partially in dielectric half-space medium , the Green 's function contains the Sommerfeld-type integrals , which embody the effect of the dielectric interface on scattering fields . Using the discrete complex image method (DCIM) and the Sommerfeld identity , the Sommerfeld integrals can be evaluated as the summation of finite complex image functions without directly numerical integration which always consumes large CPU time . As the points of the field and source are co-located in the same side of the interface , the spectrum function $\tilde{g}(k_{zp})$ is not related with the field or source positions , and the complex image parameters fitted with the general pencil of functions (GPOF) method are approximate for all positions . However , if the points of the field and source are located , separately , in different sides of the interface , the spectral function is now related to z and z' . Generally , the GPOF is repetitiously used to find the complex image parameters for every z and z' , which consumes large CPU time and memory .

This paper presents a novel method of Dual GPOF combining with DCIM for fast computation of the Sommerfeld integral . Firstly , the factors related with the variable z are separated , and the GPOF is used to find the complex image parameters for finite discrete source points z'_l . Secondly , GPOF is used again to fit the relationship of each complex image parameter with variable z' . Then , the complex image parameter of any z' can be evaluated as the direct function summation , and there is no need to perform GPOF for all z' points . Comparing numerical values of Dual GPOF , point-by-point GPOF , and direct numerical integration , the Dual GPOF method is proved effective and efficient . Finally , Dual GPOF is applied to computation of electromagnetic scattering from a P.E.C. sphere object partially embedded in dielectric half-space , and the scattering patterns are presented and analyzed .

Keywords : Sommerfeld integral , discrete complex image method , general pencil of function

PACC : 4110H , 4120

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40637033 , 60571050) .

[†] E-mail : hxye@fudan.ac.cn