

高斯-谢尔模型列阵光束的远场发散角 和远场辐射强度*

季小玲† 李晓庆

(四川师范大学物理学院, 成都 610068)

(2008 年 9 月 1 日收到, 2008 年 11 月 29 日收到修改稿)

推导出了高斯-谢尔模型(GSM)列阵光束通过自由空间传输其二阶矩束宽、远场发散角和远场辐射强度的解析表达式,并给出了 GSM 列阵光束与高斯光束具有相同远场发散角的条件.研究表明,具有相同远场发散角的 GSM 列阵光束与对应的高斯光束并不具有相同的远场辐射强度分布,这一特性与单束 GSM 光束的差异很大.

关键词:高斯-谢尔模型列阵光束,远场发散角,远场辐射强度

PACC:4225K,4225B

1. 引 言

列阵光束由于在高功率系统、惯性约束聚变和高能武器等方面的应用而日趋受到人们的关注^[1,2].迄今为止,已有大量文献研究了线形、矩形和径向排列的激光列阵的相干和非相干合成光束的传输特性^[3-6].最近,我们还研究了列阵光束通过湍流大气的传输特性^[7-9].另一方面,很长一段时间,完全的空间相干性被认为是实现很好方向性的必要条件.但是,1978年 Wolf 和 Collett 预言部分空间相干光,例如高斯-谢尔模型(GSM)光束在自由空间传输可以具有与完全空间相干光相同的方向性,即在一定的条件下 GSM 光束可以产生与高斯光束相同的远场辐射强度分布^[10].之后,这一理论预言被实验证实了^[11,12].光束的方向性可用远场辐射强度分布或远场发散角来描述^[10,13,14].对于 GSM 光束来说,两

种描述是一致的^[10,13,14].那么,GSM 列阵光束在自由空间中是否能够具有与完全空间相干光相同的方向性?对于 GSM 列阵光束,用远场辐射强度分布和远场发散角来描述光束方向性是否一致?本文研究了 GSM 列阵光束的远场发散角和远场辐射强度,得到一些有意义的结果,并给予了合理的物理解释.

2. 二阶矩束宽和远场发散角

为了简化数学运算,仅限于研究二维(2D)情况.假设在直角坐标系下, $z=0$ 平面处有 M 束束腰宽度均为 w_0 、相关长度均为 σ_0 的 GSM 光束沿 x 轴排列,相邻子光束间的间距均为 x_d ,它们构成了一个 1D 光束线阵(如图 1 所示).本文 M 取奇数,当 $M=1$ 时,图 1 所示的 1D 线阵光束简化为单束位于坐标原点的 GSM 光束.假设各子光束是相同并且相干的, $z=0$ 平面处的交叉谱密度函数可表示为^[3,7]

$$W^{(0)}(x'_1, x'_2, \omega) = \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \exp\left[-\frac{(x'_1 - mx_d)^2 + (x'_2 - nx_d)^2}{w_0^2}\right] \exp\left\{-\frac{[(x'_1 - mx_d) - (x'_2 - nx_d)]^2}{2\sigma_0^2}\right\},$$

$$m, n \in \left[-\frac{M-1}{2}, \frac{M-1}{2}\right], \quad (1)$$

式中,频率 $\omega = 2\pi c/\lambda$ (λ 为波长, c 为光速).

* 国家自然科学基金(批准号 60778048)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jixl100@163.com

基于广义惠更斯-菲涅尔原理 (1) 式表征的 GSM 列阵光束通过自由空间传输在 z 平面处的交叉谱密度函数为^[15]

$$W(x_1, x_2, z, \omega) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 dx'_2 W^{(0)}(x'_1, x'_2, \omega) \times \exp\left\{ \frac{ik}{2z} [(x'_1)^2 - (x'_2)^2 - \mathcal{A}(x_1 x'_1 - x_2 x'_2) + (x_1^2 - x_2^2)] \right\}, \quad (2)$$

式中, 波数 $k = 2\pi/\lambda$.

为了得到解析结果, 引入新的积分变量

$$u = (x'_2 + x'_1)/2, v = x'_2 - x'_1. \quad (3)$$

$$K(x, z) = W(x, x, z, \omega) = \frac{k}{2\pi z} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \exp\left[-\frac{2u^2 + v^2/2 - \mathcal{A}(m+n)x_d u + (m-n)x_d v + (m^2 + n^2)x_d^2}{w_0^2} \right] \times \exp\left[-\frac{v^2 + \mathcal{A}(m+n)x_d v + (m-n)^2 x_d^2}{2\sigma_0^2} \right] \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(-i\frac{k}{z}uv\right) \exp\left(i\frac{k}{z}xv\right). \quad (4)$$

二阶矩束宽定义为^[16]

$$w^2(z) = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x, z) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} K(x, z) dx}. \quad (5)$$

$$\sigma_I = \left\{ \sum_{m_1=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n_1=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \xi [w_0^2 + (m+n)^2 x_d^2] \right\}^{1/2} \left/ \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \xi \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

$$\sigma_J = \left\{ \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \frac{4\xi}{k^2} \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \right) (m-n)^2 x_d^2 \right] \right\}^{1/2} \left/ \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \xi \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

$$\xi = \exp\left[-\left(\frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) (m-n)^2 x_d^2 \right]. \quad (9)$$

值得指出的是, 推导(6)式时我们利用了积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-i2\pi xs) dx \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s), \quad (10)$$

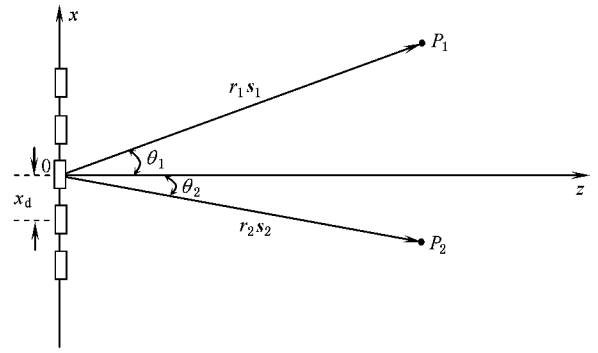


图1 一维 GSM 光束线阵及符号说明

将(1)式和(3)式代入(2)式, 得到 GSM 列阵光束通过自由空间传输在 z 平面处的光强为

将(4)式代入(5)式, 并采用积分变换技巧, 经过复杂积分运算后我们得到 GSM 列阵光束在自由空间传输的二阶矩束宽为

$$w^2(z) = \sigma_I^2 + \sigma_J^2 z^2, \quad (6)$$

式中

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta''(x) dx = f''(0),$$

其中, δ 表示 Dirac delta 函数, δ'' 为其二阶导数; f 为任意函数, f'' 为该函数的二阶导数.

由(6)式可以得到 GSM 列阵光束通过自由空间

传输的远场发散角

$$\theta_{sp}(z) \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{z} = \sigma_J. \quad (12)$$

当 $M = 1$ 和 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 时 (6) 式和 (12) 式分别简化为单束位于坐标原点的高斯光束在自由空间传输的二阶矩束宽和远场发散角(用下角标 'Gs' 表示)即

$$w^2(z)|_{Gs} = w_{0Gs}^2 + \frac{4}{w_{0Gs}^2 k_{Gs}^2} z^2, \quad (13)$$

$$\theta_{sp}(z)|_{Gs} = \frac{2}{w_{0Gs} k_{Gs}}. \quad (14)$$

比较 (12) 式和 (14) 式可知, 当满足

$$\sigma_J = \frac{2}{w_{0Gs} k_{Gs}} \quad (15)$$

条件时, 在自由空间中 GSM 列阵光束与单束高斯光束具有相同的远场发散角.

现以数值计算例说明以上所得结论. 图 2 为满足 (15) 式的三束 GSM 列阵光束(即光束 b, c 和 d) 和对应的高斯光束(即光束 a) 二阶矩束宽随传输距离变化曲线, 其数值计算参数见表 1. 图 2 表明, 随着传输距离的增加, GSM 列阵光束 b, c 和 d 与高斯光束 a 的二阶矩束宽相接近, 即它们具有相同的远场发散角.

表 1 光束计算参数

	M	x_d/mm	w_0/mm	σ_0/mm	$\lambda/\mu\text{m}$
a (高斯光束)	1	0	1	∞	1.06
b (GSM 列阵光束)	5	1.5	2.38	0.8	1.54
c (GSM 列阵光束)	7	1.8	0.66	1.1	0.6328
d (GSM 列阵光束)	9	2	1.23	1	1.06

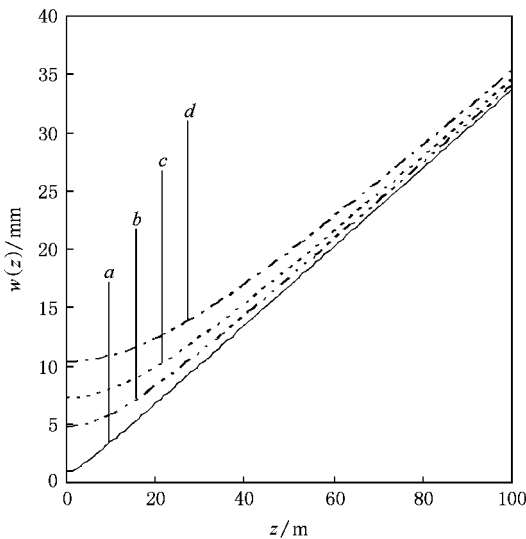


图 2 二阶矩束宽 $w(z)$ 随传输距离 z 变化曲线(计算参数见表 1. 曲线 a 为高斯光束; b, c, d 为 GSM 列阵光束)

3. 远场辐射强度分布

(1) 式表征的 GSM 列阵光束在远场 P_1 和 P_2 两点(见图 1)的远场交叉谱密度函数可表示为^[15]

$$\begin{aligned} W^\infty(x_1 s_1, x_2 s_2, \omega) &= \frac{k}{2\pi} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\exp[ik(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^{(0)}(x'_1, x'_2, \omega) \\ &\times \exp[-ik(s_2 \cdot x'_2 - s_1 \cdot x'_1)] \\ &\times dx'_1 dx'_2 \\ &= \frac{k}{2\pi} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\exp[ik(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^{(0)}(x'_1, x'_2, \omega) \\ &\times \exp[-ik(s_{2x} x'_2 - s_{1x} x'_1)] \\ &\times dx'_1 dx'_2, \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $r_1 s_1$ 和 $r_2 s_2$ 分别为 P_1 和 P_2 两点的位置矢量, θ_1 和 θ_2 分别为单位矢量 s_1 和 s_2 与 z 轴的夹角, $s_1^2 = s_2^2 = 1, s = (s_x, s_z), x'_1 = x'_1 j, x'_2 = x'_2 j, j$ 为沿 x 方向的单位矢量.

将 (1) 式代入 (16) 式, 并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 x^2 + \gamma x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(\frac{\gamma^2}{4\beta^2}\right), \quad (17)$$

经过繁琐的积分运算后, 我们得到

$$\begin{aligned}
 W^\infty(r_1 s_1, r_2 s_2, \omega) &= \frac{k}{2AB} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\exp[ik(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} \\
 &\times \exp\left[-\frac{k^2}{4A^2} \left(1 + \frac{1}{4A^2 B^2 \sigma_0^4}\right) s_{1x}^2 - \frac{k^2}{4B^2} s_{2x}^2 + \frac{k^2}{4A^2 B^2 \sigma_0^2} s_{1x} s_{2x}\right] \\
 &\times \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} [\cos kx_d (ms_{1x} - ns_{2x})], \quad (18)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2}\right)^{1/2}, \\
 B &= \left(A^2 - \frac{1}{4A^2 \sigma_0^4}\right)^{1/2}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

远场辐射强度表示频率为 ω 处,光源沿单位矢量 s 表征的方向在单位立体角内的辐射功率.远场辐射强度分布定义为^[15]

$$\mathcal{J}(s) = r^2 W^\infty(rs, rs, \omega). \quad (20)$$

将(18)式代入(20)式并利用关系式 $s_{1x}^2 = s_{2x}^2 = s_x^2 = \sin^2\theta$,得到 GSM 列阵光束的远场辐射强度为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\theta) &= \frac{k}{2AB} \cos^2\theta \exp(-P \sin^2\theta) \\
 &\times \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \cos[k(m-n)x_d \sin\theta], \quad (21)
 \end{aligned}$$

式中

$$P = \frac{k^2}{4} \left[\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \left(1 - \frac{1}{2A^2 \sigma_0^2}\right)^2 \right]. \quad (22)$$

(21)式表明, $\mathcal{J}(\theta)$ 由 $\sigma_0, w_0, x_d, M, \lambda$ 和 θ 等因数共同确定.

当 $M=1$ 和 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 时(21)式简化为单束位于坐标原点的高斯光束在自由空间传输的远场辐射强度

$$\mathcal{J}(\theta)|_{\text{Gs}} = \frac{k_{\text{Gs}} w_{0\text{Gs}}^2}{2} \cos^2\theta \exp\left(-\frac{k_{\text{Gs}}^2 w_{0\text{Gs}}^2}{2} \sin^2\theta\right). \quad (23)$$

图3为满足(15)式的 GSM 列阵光束(即光束 b, c 和 d)和对应的高斯光束(即光束 a)的归一化远场辐射强度分布 $\mathcal{J}(\theta)/\mathcal{J}(0)$,数值计算参数见表1.虚线表示高斯光束的 $\mathcal{J}(\theta)/\mathcal{J}(0)$,实线表示 GSM 列阵光束的 $\mathcal{J}(\theta)/\mathcal{J}(0)$.比较图2和图3可知,虽然 GSM 列阵光束 b, c 和 d 与对应的高斯光束 a 具有相同的远场发散角(见图2),但是它们的归一化远场辐射强度分布并不相同(见图3).图3还表明,高斯光束的归一化远场辐射强度分布仍然为高斯型,而 GSM 列阵光束的归一化远场辐射强度分布出现旁瓣,并且其主瓣宽度小于对应的高斯光束的宽度.

4. 结 论

本文研究了 GSM 列阵光束的方向性.推导出了 GSM 列阵光束通过自由空间传输其二阶矩束宽、远场发散角和远场辐射强度.研究表明,满足条件(15)式的 GSM 列阵光束与对应的高斯光束具有相同远场发散角,但是它们的远场辐射强度分布并不相同.这一结论与单束 GSM 光束的相关结论(即满足一定条件的 GSM 光束可以产生与高斯光束相同的远场发散角和远场辐射强度分布^[10,13,14])存在差异,其物理原因 GSM 列阵光束由于光束的干涉引起远场辐射强度出现旁瓣分布,并导致其主瓣宽度小于对应的高斯光束的宽度.本文所得结论对合成光束的应用具有重要意义.

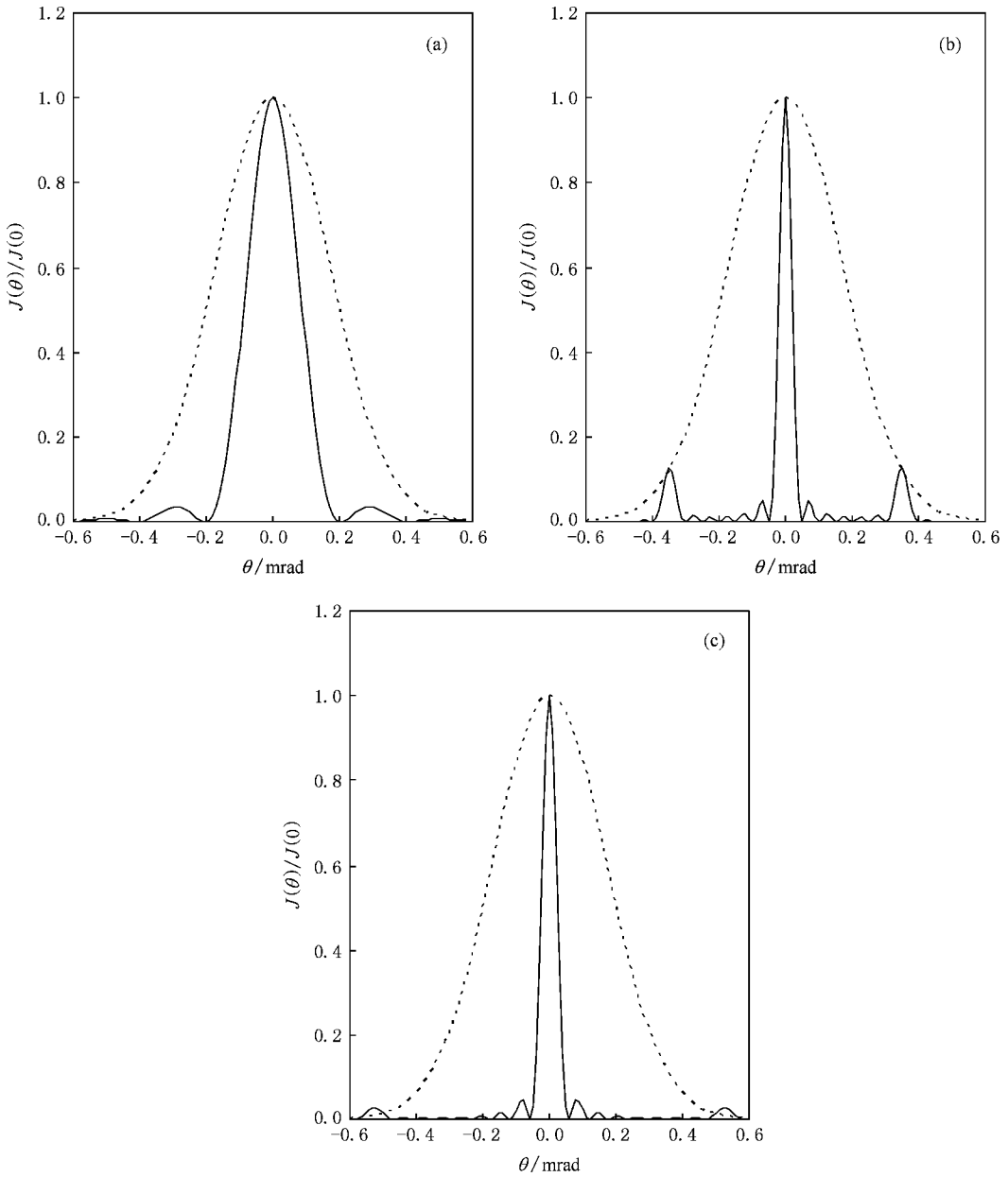


图3 归一化远场辐射强度分布 $J(\theta)/J(0)$ 计算参数见表1. 虚线: 高斯光束 a , 实线: (a) GSM 列阵光束 b , (b) GSM 列阵光束 c , (c) GSM 列阵光束 d

[1] Strohscchein J D , Herb J J , Clarence E C 1998 *Appl. Opt.* **37** 1045
 [2] Brunel M , Floch A L , Bretenaker F , Marty J , Molva E 1998 *Appl. Opt.* **37** 2402
 [3] Li B , Lü B D 2003 *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.* **5** 303
 [4] Lü B D , Ma H 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 2005
 [5] Cai Y , Lin Q 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1111
 [6] Xiao R , Zhou P , Hou J , Jiang Z F , Liu M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 819 (in Chinese) [肖 瑞、周 朴、侯 静、姜宗福、刘 明 2007 物理学报 **56** 819]

[7] Ji X L , Zhang E T , Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 825
 [8] Ji X L , Tang M Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4968 (in Chinese) [季小玲、汤明 2006 物理学报 **55** 4968]
 [9] Ji X L , Li X Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7674 (in Chinese) [季小玲、李晓庆 2008 物理学报 **57** 7674]
 [10] Wolf E , Collett E 1978 *Opt. Commun.* **25** 293
 [11] Santis P D , Gori F , Guattari G , Palma C 1979 *Opt. Commun.* **29** 256
 [12] Farina J D , Narducci L M , Collett E 1980 *Opt. Commun.* **32** 203

- [13] Foley J T , Zubairy M S 1978 *Opt. Commun.* **26** 297 (Cambridge , Cambridge University Press)
[14] Shirai T , Dogariu A , Wolf E 2003 *Opt. Lett.* **28** 610 [16] Siegman A E 1990 *SPIE* **1224** 2
[15] Mandel L , Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics*

The far-field divergence angle and the far-field radiant intensity distribution of Gaussian Schell-model array beams ^{*}

Ji Xiao-Ling[†] Li Xiao-Qing

(Department of Physics , Sichuan Normal University , Chengdu 610068 , China)

(Received 1 September 2008 ; revised manuscript received 29 November 2008)

Abstract

The analytical expressions for the mean-squared beam width , the far-field divergence angle and the far-field radiant intensity of Gaussian Schell-model (GSM) array beams are derived , and the condition under which GSM array beams have the same far-field divergence angle as a single Gaussian beam. It is shown that GSM array beams and a Gaussian beam which have the same far-field divergence angle may have different far-field radiant intensity distribution , which is quite different from the behavior of GSM beams.

Keywords : Gaussian Schell-model (GSM) array beams , far-field divergence angle , far-field radiant intensity

PACC : 4225K , 4225B

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048).

[†] Corresponding author. E-mail : jixl100@163.com