

# 偶极相互作用存在的前提下 Kerr 介质 对系统纠缠度的影响\*

齐琳娜 张 寿†

(延边大学理学院物理系, 延吉 133002)

(2008 年 9 月 6 日收到, 2008 年 11 月 4 日收到修改稿)

在 Milburn 方程的支配下, 研究了在偶极相互作用存在的前提下 Kerr 介质对两原子系统纠缠度的影响. 通过 concurrence 计算了系统的纠缠度, 讨论了 concurrence 随时间的振荡情况. 结果表明, 在偶极相互作用存在的前提下, 通过适当选取 Kerr 介质的耦合常数  $\chi$ , 可以更好地提高系统的纠缠度, 从而有效地抑制内禀消相干的作用. 同时还发现在增大纠缠度方面, 对于  $\Omega$  的不同取值, 倍数  $\Delta$  的取值也不同.

关键词: Milburn 理论, 偶极相互作用, Kerr 介质, concurrence

PACC: 4250, 0365

量子纠缠是量子力学最显著最奇特的特性之一, 在量子信息<sup>[1-4]</sup>方面具有重要的应用. 但在实际的应用中, 由于哈密顿量的任意性和微扰, 导致密度算符演化的不可逆性和量子通信的消相干现象. 近几年来, 消相干问题<sup>[5-10]</sup>已经得到了理论和实验上的广泛关注. 由于它在量子通信和量子计算中的消极影响, 人们引入了多套方案来解决消相干问题. 自从 Milburn<sup>[11]</sup>提出了一个由 Milburn 方程支配的简单的内禀消相干模型以来, 一些文章已经研究了不同系统中内禀消相干的影响<sup>[12-18]</sup>. 如 Zhang 等人已经指出 Kerr 介质可以有效地抑制内禀消相干的作用<sup>[17]</sup>; 另外文献<sup>[18]</sup>也指出对于适当选择偶极相互作用的耦合常数  $\Omega$  可以抑制系统的内禀消相干<sup>[18]</sup>. 事实上, 偶极相互作用确实存在于一些系统中. 那么, 在偶极相互作用存在的前提下, 本文将呈现 Kerr 介质如何影响系统的纠缠度. 所以本文考虑在 Kerr 介质环境中两个带有偶极相互作用的二能级原子同时耦合于一个单模腔场的系统.

在旋波近似下<sup>[19, 20]</sup>, 系统的哈密顿量( $\hbar = 1$ )

$$H = \omega_f a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sum_{j=1}^2 \sigma_z^j + \epsilon \sum_{i=1}^2 (a \sigma_+^i + a^\dagger \sigma_-^i) + \Omega (\sigma_-^1 \sigma_+^2 + \sigma_+^1 \sigma_-^2) + \chi (a^\dagger a a^\dagger a). \quad (1)$$

其中  $a^\dagger$  和  $a$  分别表示单模光场的产生和湮没算

符,  $|g\rangle$  和  $|e\rangle$  分别是二能级原子的基态和激发态,  $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  和  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$  为二能级原子的赝自旋算符,  $\omega_f$  和  $\omega_0$  分别表示光场的频率和原子的跃迁频率,  $\epsilon$  为原子和光场的耦合常数,  $\chi$  为 Kerr 介质的非线性耦合常数,  $\Omega$  表示原子的偶极相互作用的耦合常数. 在共振情况下<sup>[21]</sup> ( $\omega_f = \omega_0 = \omega$ ), 容易看出存在一个守恒量

$$K = a^\dagger a + 1 + \frac{\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}}{2}. \quad (2)$$

在子空间  $K = 1$  时, 系统的本征值为

$$\begin{aligned} E_0 &= -\Omega, \\ E_1 &= \frac{1}{2}(\Omega + \chi - \alpha), \\ E_2 &= \frac{1}{2}(\Omega + \chi + \alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

相应的本征矢为

$$\begin{aligned} |E_0\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-|eg\rangle + |ge\rangle), \\ |E_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega - \chi + \alpha}{2\epsilon}\right)^2 + 2}} \\ &\times \left(-\frac{\Omega - \chi + \alpha}{2\epsilon}|gg\rangle + |eg\rangle + |ge\rangle\right), \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金(批准号 60667001)和延边大学教育基金资助的课题.

† E-mail: szhang@ybu.edu.cn

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega - \chi - \alpha}{2\epsilon}\right)^2 + 2}} \times \left( -\frac{\Omega - \chi - \alpha}{2\epsilon} |gg\rangle + |eg\rangle + |ge\rangle \right), \quad (4)$$

其中  $\alpha = \sqrt{8\epsilon^2 + (\chi - \Omega)^2}$ .

考虑系统中内禀消相干的作用, 时间演化密度算符  $\rho(t)$  满足

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \gamma \left[ \exp\left(-\frac{i}{\gamma}H\right)\rho(t)\exp\left(\frac{i}{\gamma}H\right) - \rho(t) \right], \quad (5)$$

其中  $\gamma$  表示单位时间段的平均频率, 被称为消相干因子<sup>[16]</sup>. 可以看出在极限  $\gamma \rightarrow \infty$  条件下, 由(5)式可导出 von Neumann 方程. 方程(5)取  $\gamma^{-1}$  的一阶展开, Milburn 获得了下面的动力学方程:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -[H, \rho(t)] - \frac{1}{2\gamma}[H[H, \rho(t)]], \quad (6)$$

即 Milburn 方程. 通过超算符的引入, 方程的形式解为<sup>[5, 7, 21-24]</sup>

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} M^k(t) \rho(0) M^{\dagger k}(t), \quad (7)$$

其中  $\rho(0)$  是原子和场的初始密度算符,  $M^k(t)$  被定义为

$$M^k(t) = H^k \exp(-iHt) \exp\left(-\frac{t}{2\gamma}H^2\right). \quad (8)$$

我们假设两个原子中的一个处于激发态, 另一个处于基态, 光场为真空态. 整个系统的初始态为  $|\Psi_0\rangle = |eg\rangle$ , 系统的初始密度算符表示为  $\rho(0) = |eg\rangle\langle eg|$ . 把  $\rho(0)$  代入(7)式, 得到密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho_a(t) = & \left[ 2\left(\frac{\Omega - \chi}{8\alpha\epsilon} - \frac{\alpha^2}{8\alpha\epsilon}\right)^2 - 2\left(\frac{\Omega - \chi}{8\alpha\epsilon} - \frac{\alpha^2}{8\alpha\epsilon}\right)^2 e^{-\frac{t}{2\gamma^2}} \cos(\alpha t) \right] |gg\rangle\langle gg| \\ & + 2\frac{\alpha^2 + (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} + 2\frac{\alpha^2 - (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} e^{-\frac{t}{2\gamma^2}} \cos(\alpha t) \left[ |R_1\rangle\langle R_1| \right. \\ & - \left[ \frac{\alpha + \Omega - \chi}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} + \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t} \right] |R_1\rangle\langle R_2| \\ & - \left[ \frac{\alpha + \Omega - \chi}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} + \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t} \right] |R_2\rangle\langle R_1| \\ & \left. + \frac{1}{4} |R_2\rangle\langle R_2| \right], \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$|R_1\rangle = |eg\rangle + |ge\rangle,$$

$\rho(t)$  的表达式

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \left(\frac{\alpha + \Omega - \chi}{4\alpha}\right)^2 \frac{1}{B^2} |E_2\rangle\langle E_2| \\ & + \frac{\alpha^2 - (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} \frac{1}{AB} e^{-\frac{t}{2\gamma^2}} e^{-i\alpha t} |E_2\rangle\langle E_1| \\ & - \frac{\alpha + \Omega - \chi}{4\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2B} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} \\ & \times e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} |E_2\rangle\langle E_0| \\ & + \frac{\alpha^2 - (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} \frac{1}{AB} e^{-\frac{t}{2\gamma^2}} e^{i\alpha t} |E_1\rangle\langle E_2| \\ & + \left(\frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{4\alpha}\right)^2 \frac{1}{A^2} |E_1\rangle\langle E_1| \\ & - \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{4\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2A} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} \\ & \times e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t} |E_1\rangle\langle E_0| \\ & - \frac{\alpha + \Omega - \chi}{4\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2B} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} \\ & \times e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} |E_0\rangle\langle E_2| + \frac{1}{2} |E_0\rangle\langle E_0| \\ & - \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{4\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2A} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} \\ & \times e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t} |E_0\rangle\langle E_1|, \quad (9) \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega - \chi + \alpha}{2\epsilon}\right)^2 + 2}}, \quad (9)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega - \chi - \alpha}{2\epsilon}\right)^2 + 2}}. \quad (10)$$

通过约化掉腔场, 获得两原子系统的约化密度矩阵为

$$|R_2\rangle = -|eg\rangle + |ge\rangle. \quad (12)$$

根据 concurrence 定义<sup>[25]</sup>

$$\alpha(\rho) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (13)$$

其中  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$  是“自旋翻转”密度算符  $R$  的本征值的平方根。“自旋翻转”密度算符  $R$  为

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (14)$$

其中“ $*$ ”表示复共轭。通过计算获得 concurrence 的表达式为

$$C = \sqrt{\left| \frac{1}{8} + 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 + 2\sqrt{\left[ (b-d)^2 - \left(-\frac{1}{4} + c\right)^2 \right] \left[ (b+d)^2 - \left(\frac{1}{4} + c\right)^2 \right]} \right|} - \sqrt{\left| \frac{1}{8} + 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2\sqrt{\left[ (b-d)^2 - \left(-\frac{1}{4} + c\right)^2 \right] \left[ (b+d)^2 - \left(\frac{1}{4} + c\right)^2 \right]} \right|}, \quad (15)$$

其中

$$b = 2 \frac{\alpha^2 + (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} + 2 \frac{\alpha^2 - (\Omega - \chi)^2}{(4\alpha)^2} e^{-\frac{t}{2\gamma^2}} \cos(t\alpha), \quad (16a)$$

$$c = -\frac{\alpha + \Omega - \chi}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} - \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} e^{-\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t}, \quad (16b)$$

$$d = -\frac{\alpha + \Omega - \chi}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi + \alpha)^2} e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi + \alpha)t} - \frac{\alpha - (\Omega - \chi)}{8\alpha} e^{-\frac{t}{8\gamma}(3\Omega + \chi - \alpha)^2} e^{\frac{i}{2}(3\Omega + \chi - \alpha)t}, \quad (16c)$$

同时,从(15)式可以获得系统纠缠度的稳态表达式为

$$C_{(t \rightarrow \infty)} = \frac{2\varepsilon^2}{8\varepsilon^2 + (\Omega - \chi)^2}. \quad (17)$$

在不同的偶极相互作用耦合常数  $\Omega$ , Kerr 介质的非线性常数  $\chi$  下,我们给出了纠缠度随时间的演化图形,如图 1—3 所示。为了方便比较,我们把前人的工作<sup>[14,17,18]</sup>总结如图 1(a)。从图 1(a)中可以看出,

偶极相互作用和 Kerr 介质单独一方存在于系统中时,无论在纠缠度的最大值还是纠缠度的周期方面,系统的纠缠度都有不同程度的提高,有效地抑制了内禀消相干的作用。但是,从图 1(a)中同时也发现一个弊端,偶极相互作用和 Kerr 介质单独存在的曲线,纠缠度随时间振荡最终趋于稳定的纠缠值不同程度的降低了。从稳态(17)式我们进一步看出,在削减纠缠度的稳态值方面, $\Omega$  和  $\chi$  的影响是对称的。考虑实验上的不同需要,本文研究的两原子系统的纠缠度可以克服上面弊端的同时提高系统的纠缠度,即  $\Omega = \chi$ ,如图 1(b)。在图 1(b)中,我们可以看出当  $\Omega = \chi = 0.5$  时,带有偶极相互作用和 Kerr 介质的曲线最终趋于稳定时的稳态值没有减小;并且发现当  $\Omega = \chi = 0.7$  时,曲线出现较大周期的振荡。这个大周期的振荡延长了相干时间,有效地抑制了内禀消相干的作用。

然而,图 2 和图 3 是本文关注的重点。本文着重阐述一下在原子间偶极相互作用存在的前提下,Kerr 介质对系统纠缠度的影响。在实验上,调节 Kerr 介质的耦合常数比调节偶极相互作用的耦合常数更为容易。原子间偶极相互作用的调节较为复杂,它依赖于三方面:腔的长度、原子的位置和偶极极化。目前,通过激光冷却技术可以精确地控制原子间的偶极相互作用<sup>[26,27]</sup>。但是从实验的角度考虑,采用将原子置于不同耦合常数的 Kerr 介质腔中的方法相对于控制原子间的偶极相互作用是比较简单的。所以对于一个确定的  $\Omega$ ,试图寻找较为适合的 Kerr 介质

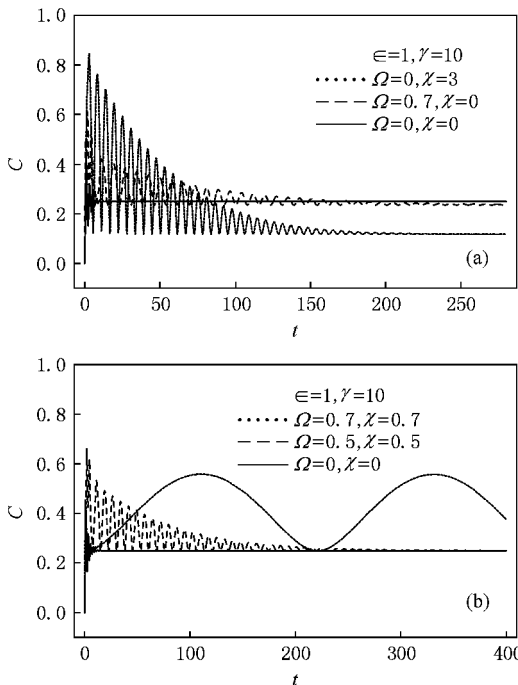


图 1 纠缠度随时间的演化

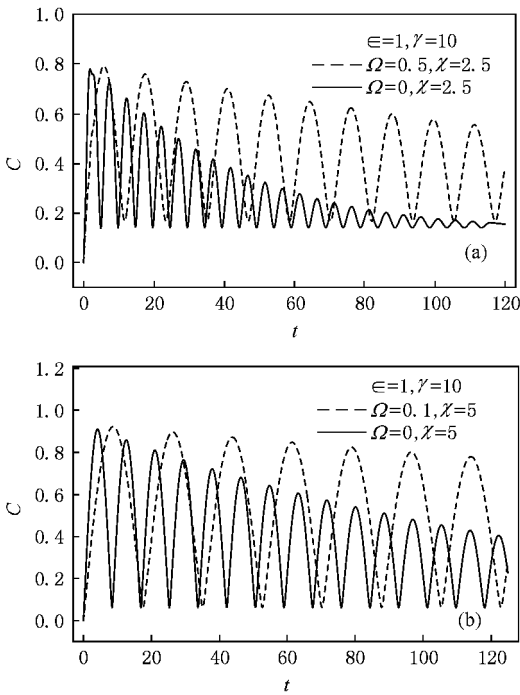


图 2 纠缠度随时间的演化

环境. 我们发现偶极相互作用取一定值时, Kerr 介质

可以更好地提高系统的纠缠度, 如图 2. 图 2 以  $\Omega = 0.5$  和  $\Omega = 0.1$  为例给出了系统纠缠度随时间演化的图形. 从图 2 可以看出在 Kerr 介质环境下, 带有偶极相互作用的曲线的纠缠度明显比不带有偶极相互作用的曲线的纠缠度要好. 换句话说, 偶极相互作用和 Kerr 介质同时存在时的纠缠度比相同 Kerr 介质单独存在时的纠缠度好. 此时, 偶极相互作用的存在增大了系统纠缠度的周期, 延长了相干时间, 有效地抑制了内禀消相干的作用. 对出现这种数值模拟结果的物理原因进行分析, 主要是因为哈密顿中偶极相互作用项的存在所导致的. 由于偶极相互作用项的存在, 增强了原子间的纠缠, 而这种原子间的纠缠适当存在的时候对增强系统纠缠度是有帮助的<sup>[18-28]</sup>. 但是随着  $\Omega$  和  $\chi$  取值的不同, 系统的纠缠度呈现微妙的变化. 我们设  $\chi/\Omega = \Delta$ , 同样以  $\Omega = 0.5$  和  $\Omega = 0.1$  为例给出  $C-\Delta-t$  的三维图形, 如图 3. 从图 3 中可以直接地看出系统纠缠度  $C$  随  $\Delta$  和  $t$  的演化趋势. 我们发现原来倍数  $\Delta$  成周期性影响系统的纠缠度. 比较两个三维图可以看出, 在增大纠缠度方面对于  $\Omega$  的不同取值, 倍数  $\Delta$  的取值也不同.

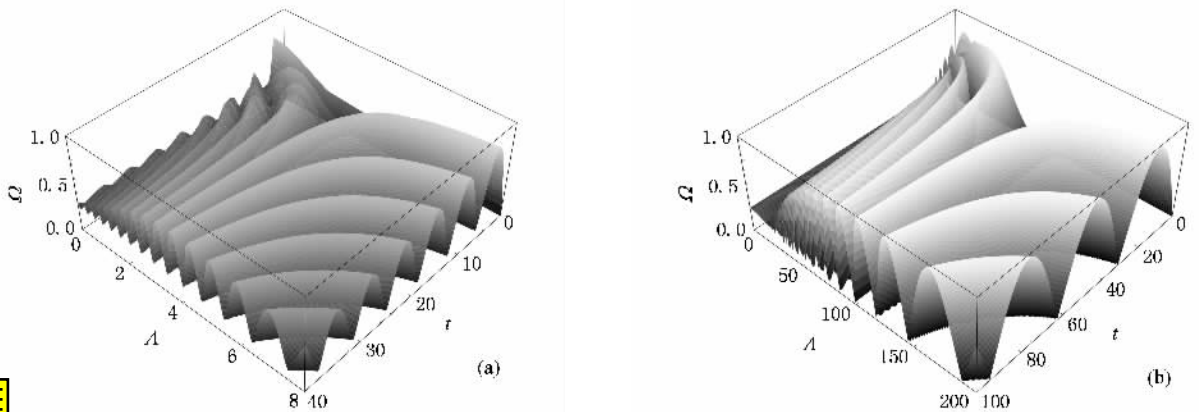


图 3 在  $\epsilon = 1$  和  $\gamma = 10$  下, 纠缠度随倍数  $\Delta$  与时间的演化 (a)  $\Omega = 0.5$  (b)  $\Omega = 0.1$

总之, 我们考虑了 Kerr 介质中带有偶极相互作用的两原子系统, 在 Milburn 方程支配下研究了偶极相互作用和 Kerr 介质对系统纠缠度的影响. 结果表明, 在偶极相互作用存在的前提下, Kerr 介质成周期

性影响系统的纠缠度. 通过适当选取 Kerr 介质的耦合常数, 可以更好地提高系统的纠缠度, 从而有效地抑制内禀消相干的作用.

[ 1 ] Shor P W 1995 *Phys. Rev. A* **52** R2493

[ 2 ] Chuang I L, Yamamoto Y 1997 *Phys. Rev. A* **55** 114

[ 3 ] Song J, Xia Y, Song H S, Guo J L, Nie J 2007 *Europhys. Lett.* **80** 60001

- [ 4 ] Wang H F , Zhang S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1165
- [ 5 ] Hao S R , Wang L Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 610 ( in Chinese )  
[ 郝三如、王麓雅 2000 物理学报 **49** 610 ]
- [ 6 ] Zhang D Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 0532 ( in Chinese ) [ 张登玉  
2002 物理学报 **51** 0532 ]
- [ 7 ] Wang C Z , Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 ( in Chinese )  
[ 王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989 ]
- [ 8 ] Zhang D Y , Guo P , Gao F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1906 ( in  
Chinese ) [ 张登玉、郭 萍、高 峰 2007 物理学报 **56** 1906 ]
- [ 9 ] Huang Y X , Zhao P Y , Huang X , Zhan M S 2004 *Acta Phys. Sin.*  
**53** 75 ( in Chinese ) [ 黄燕霞、赵朋义、黄 熙、詹明生 2004 物理  
学报 **53** 75 ]
- [ 10 ] Guo D J , Shan C J , Xia Y J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2139 ( in  
Chinese ) [ 郭德军、单传家、夏云杰 2007 物理学报 **56** 2139 ]
- [ 11 ] Milburn G J 1991 *Phys. Rev. A* **44** 5401
- [ 12 ] Milburn G J 1993 *Phys. Rev. A* **47** 2415
- [ 13 ] Gong J , Brumer P 2003 *Phys. Rev. A* **68** 022101
- [ 14 ] Li S B , Xu J B 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 985
- [ 15 ] He Z H , Xiong Z H , Zhang Y L 2006 *Phys. Lett. A* **354** 79
- [ 16 ] Tan X , Zhang C Q , Xia Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2263 ( in  
Chinese ) [ 谭 霞、张成强、夏云杰 2006 物理学报 **55** 2263 ]
- [ 17 ] Zhang X T , Zhu A D , Zhang S 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1460
- [ 18 ] Qi L N , Zhu A D , Zhang S 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1183
- [ 19 ] Wu Y , Yang X X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
- [ 20 ] Liu X , Fang M F 2002 *Chin. Phys.* **11** 926
- [ 21 ] Plenio M B , Huelga S F , Beige A , Knight P L 1999 *Phys. Rev. A*  
**59** 2468
- [ 22 ] Xu J B , Zou X B 1999 *Phys. Rev. A* **60** 4743
- [ 23 ] Wu Y 2000 *Phys. Rev. A* **61** 033803
- [ 24 ] Kuang L M , Chen X , Chen G H , Ge M L 1997 *Phys. Rev. A* **56**  
3139
- [ 25 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [ 26 ] Guo J 1994 *Phys. Rev. A* **50** 2830(R)
- [ 27 ] Beige A , Huelga S F , Knight P L , Plenio M B , Thompson R C  
2000 *J. Mod. Opt.* **47** 401
- [ 28 ] Guo H , Xiong H N 2008 *Chin. Phys. B* **17** 971

## The influence of Kerr medium on the intrinsic decoherence under the condition of existence of dipole-dipole interaction \*

Qi Lin-Na Zhang Shou<sup>†</sup>

( Department of Physics , College of Science , Yanbian University , Yanji 133002 , China )

( Received 6 September 2008 ; revised manuscript received 4 November 2008 )

### Abstract

We investigate the influence of Kerr medium on the concurrence of the two-atom system under the condition of existence of dipole-dipole interaction. The entanglement of the system is calculated by making use of concurrence. We discuss the variation of the concurrence with time. The result shows that the appropriate choice for the nonlinear coupling constant  $\chi$  of Kerr medium can improve the concurrence of the system and restrain effectively the intrinsic decoherence of the system. We also find that with respect to increasing concurrence , the multiple  $\Lambda$  may take different values as  $\Omega$  varies.

**Keywords** : Milburn theory , dipole-dipole interaction , Kerr medium , concurrence

**PACC** : 4250 , 0365

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60667001 ) , and the Education Foundation of Yanbian University.

<sup>†</sup> E-mail : szhang@ydu.edu.cn