

二维不可压流体 Kelvin-Helmholtz 不稳定性的弱非线性研究*

王立锋^{1)†} 叶文华^{2)‡} 范征锋²⁾ 李英骏¹⁾

1) 中国矿业大学(北京), 北京 100083)

2) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

3) 浙江大学物理系, 杭州 310028)

(2008 年 9 月 11 日收到, 2008 年 10 月 11 日收到修改稿)

通过将扰动速度势展至三阶, 提出了 Kelvin-Helmholtz (KH) 不稳定性的弱非线性理论. 在模耦合过程中观察到一个重要的共振现象, 共振使得模耦合过程变得相当复杂, 单模扰动很快进入非线性区, 产生大量高次谐波, 共振加强了非线性作用. 分析了单模扰动中二次和三次谐波产生效应, 以及对基模指数增长的非线性校正. 模拟结果支持了解析理论. 利用该理论, 分析了 KH 不稳定的非线性阈值问题.

关键词: Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 弱非线性理论, 非线性阈值

PACC: 5235, 4720, 4735

1. 引言

当相互接触的两层流体存在速度间断时, 流体是 KH 不稳定的^[1]. 在这种不稳定性作用下, 流体界面上的一个小扰动会经线性和弱非线性的增长, 并由强非线性作用发展成为湍流混合. KH 不稳定性广泛存在于自然界中, 如乌云的剪切翻滚, 海浪的形成和破碎, 太阳风和地球磁圈相互作用^[2], 河外射电源中的射流^[3], 超新星爆炸^[4], 以及双星系统的合并等等. KH 不稳定性对经典 Rayleigh-Taylor (RT) 和 Richtmyer-Meshko (RM) 不稳定性中的小尺度混合尤为重要, 在 RT 或 RM 不稳定发展的后期流体界面产生强剪切流, KH 不稳定性被激发从而导致流体小尺度混合^[5]. KH 不稳定的出现加重了 RT 和 RM 不稳定性后期的非线性发展, 加剧了界面附近流体的混合过程. 在烧蚀 RT 和 RM 不稳定性中^[6,7], KH 不稳定性被有效抑制, 特别对中等预热和强预热的情况, 尖顶不断裂, 并形成烧蚀射流.

初始单模扰动是最简单的情况, 其线性增长已有较多的研究^[8,9]. 当单模扰动特征幅度增长到与其

波长可比时, 逐步产生二次, 三次等谐波, 扰动进入非线性阶段. 目前, 初始单模扰动的弱非线性研究还比较少. 虽然最近在单模 KH 不稳定性非线性演化实验方面获得重大进展^[10,11], 但对弱非线性阶段的 KH 不稳定性的理解并不完善 (比如文献 [4] 并没有详细地考虑模耦合效应), 很有必要进行深入细致的研究, 揭示其发展规律, 同时对以后阶段的非线性演化过程的理解提供重要的帮助.

为此, 我们发展了不可压缩流体的 KH 不稳定性弱非线性理论, 该理论采用标准速度势方法. 在第二部分我们将详细介绍该方法, 第三部分采用数值模拟方法来验证我们的弱非线性理论, 第四部分讨论了非线性阈值问题, 第五部分是结论.

2. KH 不稳定性的弱非线性理论

在二维笛卡尔坐标系中, x 和 y 分别平行和垂直扰动界面. 考虑两层流体, 每层沿 x 方向具有有限速度并且忽略有势场, 这样速度可以写为 $u_i = u_i^{(0)} + \nabla \varphi_i$, 这里 φ_i 是扰动速度势. 界面上侧的物理量用下标 A 标记, 下侧的物理量用下标 B 标记. 我

* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号 2007CB815100), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20070290008), 国家自然科学基金(批准号: 10775020 和 10874242)资助的课题.

† E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn

们研究界面小扰动的发展,扰动用 $y = \eta(x, t)$ 描述. 边界条件(界面上压力和法向速度连续)写为

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x \varphi_{Ax} - \varphi_{Ay} \Big|_{\eta} &= 0, \\ \eta_t + \eta_x \varphi_{Bx} - \varphi_{By} \Big|_{\eta} &= 0, \\ \rho_A [\varphi_{At} + 1/2 \nabla \varphi_A \Big|_{\eta}^2 - 1/2 u_A^{(0)2}] \Big|_{\eta} \\ &= \rho_B [\varphi_{Bt} + 1/2 \nabla \varphi_B \Big|_{\eta}^2 - 1/2 u_B^{(0)2}] \Big|_{\eta}, \quad (1) \end{aligned}$$

这里 ρ 表示密度. 假定初始扰动幅度 ε 远小于扰动波长. 界面位置 η 和扰动速度势 φ_i 可以展为 ε 的级数,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \varepsilon \eta^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 \eta^{(2)}(x, t) \\ &\quad + \varepsilon^3 \eta^{(3)}(x, t) + O(\varepsilon^4), \\ \varphi_i(x, y, t) &= \varepsilon \varphi_i^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 \varphi_i^{(2)}(x, y, t) \\ &\quad + \varepsilon^3 \varphi_i^{(3)}(x, y, t) + O(\varepsilon^4). \quad (2) \end{aligned}$$

将这些表达式代入边界方程(1)得到 ε 的同级量的项. 其中 ε 的一阶项给出线性解, ε 的二阶项和 ε 的三阶项分别给出二阶和三阶弱非线性修正. 一阶量在界面 $y = \eta(x, t)$ 上满足的方程为

$$\begin{aligned} \eta_t^{(1)} - \varphi_{Ay}^{(1)} + u_A^{(0)} \eta_x^{(1)} &= 0, \\ \eta_t^{(1)} - \varphi_{By}^{(1)} + u_B^{(0)} \eta_x^{(1)} &= 0, \\ \rho_A [\varphi_{At}^{(1)} + u_A^{(0)} \varphi_{Ax}^{(1)}] &= \rho_B [\varphi_{Bt}^{(1)} + u_B^{(0)} \varphi_{Bx}^{(1)}], \quad (3) \end{aligned}$$

二阶量在界面 $y = \eta(x, t)$ 上满足的方程为

$$\begin{aligned} \eta_t^{(2)} - \varphi_{Ay}^{(2)} + u_A^{(0)} \eta_x^{(2)} + \eta_x^{(1)} \varphi_{Ax}^{(1)} &= 0, \\ \eta_t^{(2)} - \varphi_{By}^{(2)} + u_B^{(0)} \eta_x^{(2)} + \eta_x^{(1)} \varphi_{Bx}^{(1)} &= 0, \\ \rho_A [\varphi_{At}^{(2)} + 1/2 \varphi_{Ax}^{(1)2} + 1/2 \varphi_{Ay}^{(1)2} + u_A^{(0)} \varphi_{Ax}^{(2)}] \\ &= \rho_B [\varphi_{Bt}^{(2)} + 1/2 \varphi_{Bx}^{(1)2} + 1/2 \varphi_{By}^{(1)2} + u_B^{(0)} \varphi_{Bx}^{(2)}], \quad (4) \end{aligned}$$

三阶量在界面 $y = \eta(x, t)$ 上满足的方程为

$$\begin{aligned} \eta_t^{(3)} - \varphi_{Ay}^{(3)} + u_A^{(0)} \eta_x^{(3)} + \eta_x^{(2)} \varphi_{Ax}^{(1)} + \eta_x^{(1)} \varphi_{Ax}^{(2)} &= 0, \\ \eta_t^{(3)} - \varphi_{By}^{(3)} + u_B^{(0)} \eta_x^{(3)} + \eta_x^{(2)} \varphi_{Bx}^{(1)} + \eta_x^{(1)} \varphi_{Bx}^{(2)} &= 0, \\ \rho_A [\varphi_{At}^{(3)} + \varphi_{Ax}^{(1)} \varphi_{Ax}^{(2)} + \varphi_{Ay}^{(1)} \varphi_{Ay}^{(2)} + u_A^{(0)} \varphi_{Ax}^{(3)}] \\ &= \rho_B [\varphi_{Bt}^{(3)} + \varphi_{Bx}^{(1)} \varphi_{Bx}^{(2)} + \varphi_{By}^{(1)} \varphi_{By}^{(2)} + u_B^{(0)} \varphi_{Bx}^{(3)}]. \quad (5) \end{aligned}$$

这里假定初始为单模扰动 $\eta^{(1)}(x, t=0) = \varepsilon \cos kx$. 线性稳定性分析给出扰动增长 n 的实部(增长率 γ)和虚部(频率 ω)为

$$\begin{aligned} n(k) &= \chi(k) \pm i\alpha(k), \\ \chi(k) &= k \frac{\sqrt{(u_A^{(0)} - u_B^{(0)})^2 r}}{1+r}, \\ \alpha(k) &= k \frac{u_A^{(0)} + ru_B^{(0)}}{1+r}, \quad (6) \end{aligned}$$

扰动振幅和速度势为

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x, t) &= \varepsilon \exp[(\gamma - i\omega)t + ikx] + \text{c.c.}, \\ \varphi_A^{(1)}(x, y, t) &= - \left[\frac{\gamma}{k} \varepsilon + i\varepsilon \left(u_A^{(0)} - \frac{\omega}{k} \right) \right] \exp[(\gamma - i\omega)t + ikx - ky] + \text{c.c.}, \\ \varphi_B^{(1)}(x, y, t) &= \left[\frac{\gamma}{k} \varepsilon + i\varepsilon \left(u_B^{(0)} - \frac{\omega}{k} \right) \right] \exp[(\gamma - i\omega)t + ikx + ky] + \text{c.c.}, \quad (7) \end{aligned}$$

这里 $r = \rho_B / \rho_A$, c.c. 代表复共轭.

我们称方程(6)为经典 KH 不稳定性的色散关系. 这个色散关系很特别, 增长率是扰动波数的线性函数, 这样的系统是很容易发生共振的. 它不同于经典 RT 不稳定性, 经典 RT 不稳定性的色散关系是 $\chi(k) = \sqrt{Agk}$, 其中 $A = (\rho_A - \rho_B) / (\rho_A + \rho_B)$, 是

Atwood 数, g 是加速度, 经典 RT 不稳定性不会发生共振现象.

弱非线性阶段, 模耦合将很快激发二次和三次谐波, 并对基模增长产生抑制作用. 经过短暂的线性增长后, 含 $\exp(-\gamma t)$ 的项可以忽略, 作三阶近似展开,

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x, t) &= \varepsilon \exp[(\gamma - i\omega)t + ikx] + \varepsilon^3 (\hat{\eta}_{42} + t \hat{\eta}_{41}) \exp[3(\gamma + i\omega)t + ikx] + \text{c.c.}, \\ \eta^{(2)}(x, t) &= \varepsilon^2 (\hat{\eta}_{22} + t \hat{\eta}_{21}) \exp[2(\gamma - i\omega)t + i2kx] + \text{c.c.}, \\ \eta^{(3)}(x, t) &= \varepsilon^3 (\hat{\eta}_{33} + t \hat{\eta}_{32} + t^2 \hat{\eta}_{31}) \exp[3(\gamma - i\omega)t + i3kx] + \text{c.c.}, \quad (8) \end{aligned}$$

其中, 增长率 γ 和频率 ω 是利用线性稳定性分析得到的. $\hat{\eta}_{22}(k)$ 项和 $\hat{\eta}_{21}(k)$ 项来自二阶弱非线性效应(二次谐波产生). 二阶展开表明不存在零次谐波, 即

$\hat{\eta}_{20}(t, 0k)$ 消失, 这可以从能量守恒得到解释. 项 $\hat{\eta}_{33}(k)$, $\hat{\eta}_{32}(k)$ 和 $\hat{\eta}_{31}(k)$ 来自三阶弱非线性效应(三次谐波产生). 其他三阶项给出基模指数增长的非线

性校正. 基于下面的原因, 我们将扰动设为 (8) 式的

形式. 二次谐波所满足的二阶偏微分方程是

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_A + \rho_B}{2k} \frac{d^2 \eta^{(2)}(t)}{dt^2} + 2i(u_A^{(0)} \rho_A + u_B^{(0)} \rho_B) \frac{d\eta^{(2)}(t)}{dt} - 2k(u_A^{(0)} \rho_A + u_B^{(0)} \rho_B) \eta^{(2)}(t) \\ & = \epsilon^2 e^{2m} [k^2(u_A^{(0)} \rho_A - u_B^{(0)} \rho_B) - 2ink(u_A^{(0)} \rho_A - u_B^{(0)} \rho_B) - n^2(\rho_A - \rho_B)]. \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $n = \gamma - i\omega$. 方程 (9) 的左端是线性项, 也就是二次谐波的产生项; 右端是非线性, 也就是两个一阶量的耦合项. 方程 (9) 中会出现一个重根, 因为右端耦合项的增长率是 2γ 和左端二次谐波自己的增长率相同, 即二次谐波出现共振现象. 因此将二次谐波幅度设为 $(\hat{\eta}_{22} + t \hat{\eta}_{21})$ 的形式. 三次谐波同样存在共振, 故将三次谐波幅度设为 $(\hat{\eta}_{33} + t \hat{\eta}_{32} + t^2 \hat{\eta}_{31})$. 基模非线性校正系数由于类似的原因设为 $(\hat{\eta}_{42} + t \hat{\eta}_{41})$ 的形式. 下面简单的给出弱非线性阶段的最终结果.

二阶理论给出二次谐波幅度系数

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{22} &= \frac{kA}{16} + i \frac{\gamma}{8(u_A^{(0)} - u_B^{(0)})}, \\ \hat{\eta}_{21} &= -\frac{kA\gamma}{4} - i \frac{\gamma^2}{2(u_A^{(0)} - u_B^{(0)})}, \end{aligned} \quad (10)$$

三阶理论给出三次谐波幅度系数

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{33} &= \frac{k^2(1 - 6r + r^2)}{72(1+r)^2} + i \frac{k\gamma A}{18(u_A^{(0)} - u_B^{(0)})}, \\ \hat{\eta}_{32} &= -\frac{k^2\gamma(1 - 6r + r^2)}{12(1+r)^2} - i \frac{k\gamma^2 A}{3(u_A^{(0)} - u_B^{(0)})}, \\ \hat{\eta}_{31} &= \frac{k^4 r(u_A^{(0)} - u_B^{(0)}) (1 - 6r + r^2)}{4(1+r)^4} \\ &+ i \frac{k^3 \gamma A r (u_A^{(0)} - u_B^{(0)})}{(1+r)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

以及对基模的非线性校正系数

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{42} &= -\frac{1}{32} k^2, \\ \hat{\eta}_{41} &= -\frac{k^3 \gamma}{16}. \end{aligned} \quad (12)$$

弱非线性理论中, 扰动被展为基模振幅的级数, 并给出了各阶量的表达式. 以下通过与直接数值模拟的比较来展示我们上面推导结果的正确性. 幅度系数与扰动波数 k , 上下两层流体的密度 ρ_i 和速度 $u_i^{(0)}$ 有关. 为了更好更方便研究, 我们引入下面的无量纲数参数 $\rho_0 = \rho_A$ ($\rho_A \geq \rho_B$), $u_0 = \frac{u_A - u_B}{2}$ ($u_A \geq u_B$), $l_0 = \lambda$, $t_0 = 2\lambda(u_A - u_B)$, $p_0 = \frac{1}{4} \rho_A (u_A -$

$u_B)$ 并选取 $\frac{u_A + u_B}{2}$ 为参考速度来无量纲化我们的结果. 则上下两层流体的速度和密度以及扰动波数无量纲为 $u_A = 1, u_B = -1, \rho_A = 1, \rho_B = r, k = 2\pi$, 则 (6) 及 (10)–(12) 式可重写为

$$\gamma = \frac{4\pi\sqrt{r}}{1+r}, \quad \omega = \frac{2\pi(1-r)}{1+r}, \quad (6')$$

$$\hat{\eta}_{22} = -\frac{\pi(\sqrt{r}-i)}{8(\sqrt{r}+i)}, \quad \hat{\eta}_{21} = \frac{2\pi\sqrt{r}}{(\sqrt{r}+i)^2}, \quad (10')$$

$$\hat{\eta}_{33} = \frac{\pi^2(\sqrt{r}-i)^2}{18(\sqrt{r}+i)^2}, \quad \hat{\eta}_{32} = -\frac{4\pi^3\sqrt{r}(\sqrt{r}-i)}{3(\sqrt{r}+i)^3},$$

$$\hat{\eta}_{31} = \frac{16\pi^4 r}{(\sqrt{r}+i)^4}, \quad (11')$$

$$\hat{\eta}_{42} = -\frac{1}{8} \pi^2, \quad \hat{\eta}_{41} = -\frac{\pi^3 \sqrt{r}}{1+r}. \quad (12')$$

3. 数值模拟及结果讨论

直接数值模拟中使用激光聚变流体不稳定程序 LARED-S. LARED-S 中的流体方程空间上使用 FCT 算法 (flux-corrected transport), 时间上使用二阶珑格库塔方法. FCT 方法使用六阶精度的相位误差在均匀网格区具有二阶精度. 用 LARED-S 程序计算了线性和非线性 RM 不稳定性^[12]、经典和烧蚀 RT 不稳定性^[13,14]、线性和非线性 KH 不稳定性^[15,16], 计算结果和线性理论、国内外的实验结果和数值模拟结果符合得很好. 该程序已经过多方面考核, 这里用它来模拟弱非线性阶段的 KH 不稳定性.

直接数值模拟中, 在初始时刻引入这种形式的界面扰动 $\eta(x, t=0) = \epsilon \cos(kx)$. 为了定量的检验该理论, 另外引入了速度扰动. 因为解析理论中没有考虑 $\exp(-\gamma t)$ 这样的项, 在数值模拟中引入这样的扰动来抑制 $\exp(-\gamma t)$ 项的发展. 实际上, 在我们的数值模拟中, $\exp(-\gamma t)$ 项根本就没有增长. 由于模耦合过程中的二次谐波有共振, 所以很难区分模耦合的增长和二次谐波自己的增长. 幸运的是, 我们可以获得系数 $\hat{\eta}_{21}$, 因为它是时间 t 的系数. 基于同样

的原因,我们也可以获得系数 $\hat{\gamma}_{31}$ 和 $\hat{\gamma}_{41}$. 含时间 t 的二次谐波振幅是 $\eta_{21} = 2|\hat{\gamma}_{21}| = 4\pi^2 \frac{\sqrt{r}}{1+r}$, 含时间 t^2 的三次谐波振幅是 $\eta_{31} = 2|\hat{\gamma}_{31}| = 32\pi^4 \frac{r}{(r+1)^2}$, 含时间 t 的基模非线性校正振幅是 $\eta_{41} = 2|\hat{\gamma}_{41}| = -\frac{\pi^3 \sqrt{r}}{1+r}$ 这里 $||$ 代表取模.

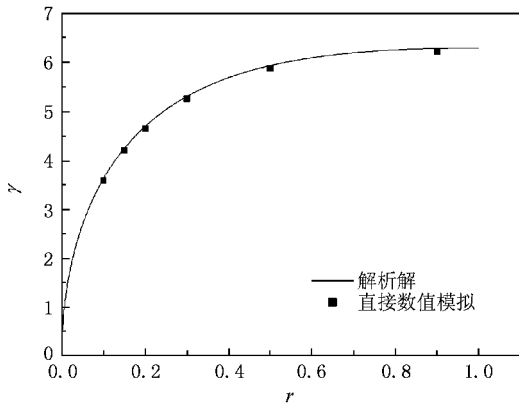


图 1 线性增长曲线和直接数值模拟结果的比较

首先使用 LARED-S 程序来计算线性增长率. 图 1 给出 LARED-S 计算的线性增长率与理论值的比较结果. 我们的直接数值模拟几乎给出精确结果, 相对误差在 1% 以内. 图 2 图 3 分别给出二次 (η_{21}) 和三次 (η_{31}) 谐波幅值的比较结果. 我们理论的结果和直接数值模拟符合得很好, 相对偏离在 2% 以内.

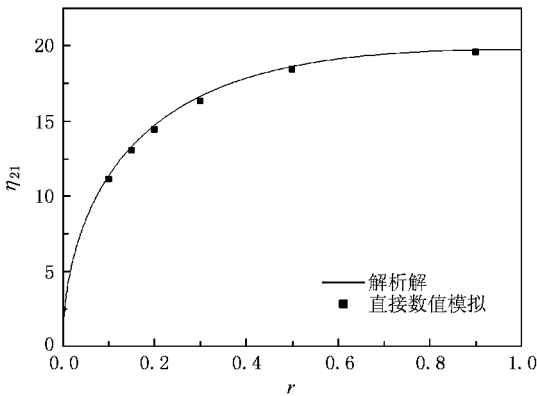


图 2 二次谐波幅值曲线和直接数值模拟结果的比较

图 4 给出了基模非线性校正幅值 (η_{41}) 的比较结果. 我们的理论结果同样符合直接数值模拟结果, 但是相对偏离较大, 大约为 5%. 因为确定弱非线性理论适用的非线性校正期是很困难的, 在相对较早

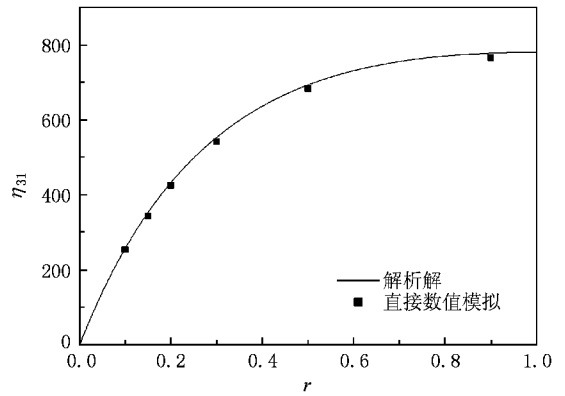


图 3 三次谐波幅值曲线和直接数值模拟结果的比较

的时期, 三次谐波幅值很小, 非线性校正不明显; 在相对较晚的时期, 四次谐波的产生使得弱非线性理论不再适用, 该弱非线性理论给出的基模非线性校正适用的时间相对较短. 因此, 很难从直接数值模拟的数据来拟合对基模的非线性校正系数. 尽管如此, 该理论给出的结果和直接数值模拟结果是符合的. 改变无量纲参数, 得到类似的结果.

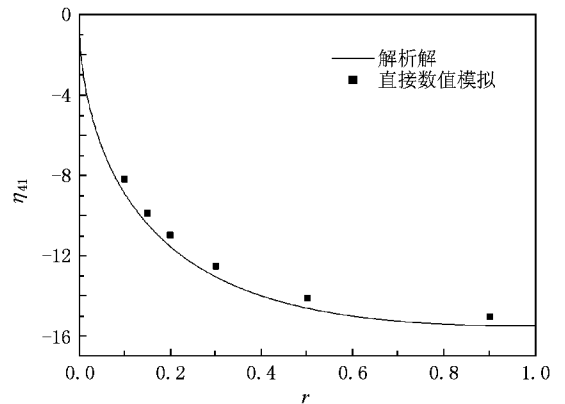


图 4 非线性校正曲线和直接数值模拟结果的比较

4. 非线性阈值

对于非线性阈值, KH 不稳定性不同于 RT 不稳定性, 在 RT 不稳定性中三阶负反馈的系数与时间无关^[17], 而 KH 不稳定性中三阶负反馈系数与时间有关, 其负反馈随时间迅速增加, 因此 KH 不稳定性的线性阶段较 RT 短. RT 不稳定性取扰动增长偏离线性增长 10% 作为非线性过程的开始, 此时得到基模扰动振幅约为 0.1λ . 如果同样取扰动增长偏离线性增长 10% 作为非线性过程的开始, 给出到达非线性

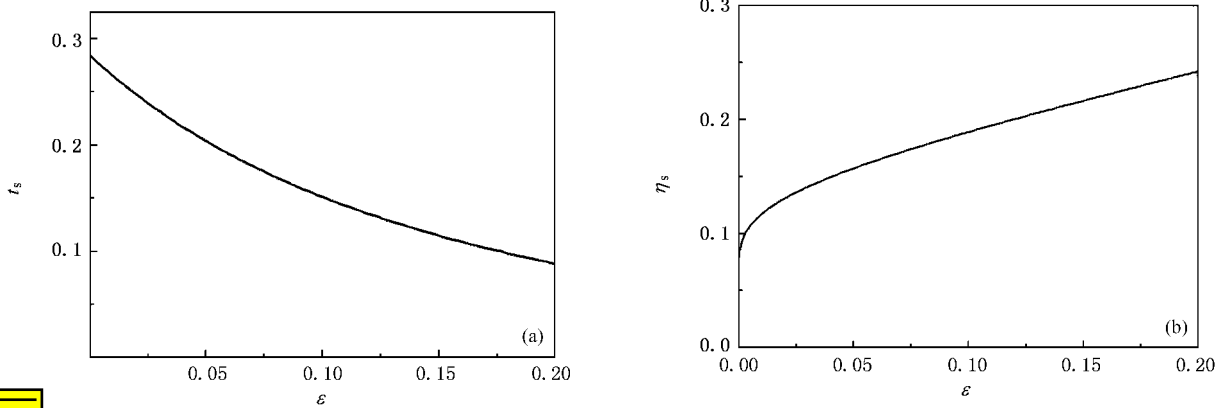


图5 非线性阈值,密度比为0.1

性阈值所需时间和扰动波数及初始扰动幅度的关系

$$\frac{1}{32}k^2 + \frac{1}{16}\gamma k^2 t_s = \frac{1}{10\eta_L^2}, \text{ 这里 } t_s \text{ 是非线性饱和时间,}$$

$\eta_L = \epsilon e^{\gamma t}$ 是基模的线性增长振幅. 采用我们上面介绍的无量纲方法, 上式无量纲为

$$\frac{1}{32}(2\pi)^2 + \frac{1}{16} \frac{4\pi\sqrt{r}}{1+r} (2\pi)^2 t_s = \frac{1}{10\epsilon^2} \exp\left(-\frac{8\pi\sqrt{r}}{1+r} t_s\right).$$

图5给出密度比为0.1时饱和时间以及饱和幅度与初始扰动幅度的关系.

从图5可以看出, 非线性饱和时间和初始扰动幅值有关, 非线性饱和阈值也和初始扰动幅值有关, 这是RT不稳定性所不具有的^[17,18].

5. 结 论

本文发展了不可压流体KH不稳定的弱非线性理论, 该理论的解析解和数值模拟符合得很好. 解析地给出了不稳定的界面, 由于共振的存在, 高次谐波被加速激发, 扰动很快进入非线性阶段. 理论结果与直接数值模拟结果很好符合, 讨论了二次谐波、三次谐波的产生和基模三阶校准中的共振现象以及非线性阈值问题. 该弱非线性理论有助于理解非线性KH不稳定性以及混合问题.

[1] Chandrasekhar S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon) p481
 [2] Hasegawa H, Fujimoto M, Phan T D et al 2004 *Nature* **430** 755
 [3] Lobanov A P, Zensus J A 2001 *Science* **294** 128
 [4] Gamexo V N, Khokhlo A M, Oran E S et al 2003 *Science* **299** 77
 [5] Young Y N, Calder A C, Fryxell B 2006 *Phys. Rev. E* **74** 66308
 [6] Fan Z F, Luo J S, Ye W H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2308
 [7] Fan Z F, Luo J S 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 624
 [8] Walker J S 1993 *Phys. Fluids A* **5**(1) 1466
 [9] Bau H H 1982 *Phys. Fluids* **25**(10) 1719
 [10] Horton W, Perez J C, Carter T, Bengtson R 2005 *Phys. Plasmas* **12** 22303

[11] Keskinen M J 1996 *Phys. Plasmas* **3**(4) 1259
 [12] Ye W H, Zhang W Y, Chen G N 1998 *High power laser and particle beams* **10** 403 (in Chinese) [叶文华、张维岩、陈光楠 1998 强激光与粒子束 **10** 403]
 [13] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2000 *Acta Phys. Sinica* **49** 765 (in Chinese) [叶文华、张维岩、贺贤士 2000 物理学报 **49** 765]
 [14] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2002 *Phys. Rev. E* **65** 57401
 [15] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2008 *Acta Phys. Sinica* **57** 3038 (in Chinese) [王立锋、叶文华、李英骏 2008 物理学报 **57** 3038]
 [16] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2008 *Chin Phys. B* **17** 3792
 [17] Haan S W 1991 *Phys. Fluids B* **3** 2349
 [18] Haan S W 1989 *Phys. Rev. A* **39** 5812

Study on the Kelvin-Helmholtz instability in two-dimensional incompressible fluid^{*}

Wang Li-Feng^{1,2)} Ye Wen-Hua^{2,3)†} Fan Zheng-Feng²⁾ Li Ying-Jun¹⁾

1 *China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China*

2 *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*

3 *Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China*

(Received 11 September 2008; revised manuscript received 16 October 2008)

Abstract

A weakly nonlinear model is proposed for the Kelvin-Helmholtz instability by expanding the perturbation velocity potential to third order. It is found that there is an important resonance in the process of mode coupling. This resonance makes the coupling processes very complex and interesting. Single-mode perturbation enters nonlinear stage quickly and produces lots of harmonics. The resonance reinforces the action of nonlinear process. The second and third harmonic generation efficiency of a single-mode disturbance is computed, as well as the nonlinear correction to the exponential growth of the fundamental modulation. Our simulations support the weakly nonlinear results from our analytic model. The nonlinear threshold phenomenon is also analyzed.

Keywords : Kelvin-Helmholtz instability, weakly nonlinear theory, nonlinear threshold

PACC : 5235, 4720, 4735

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2007CB815100), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070290008) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10775020, 10874242)

[†] Corresponding author. E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn